



Tom 27/2018, ss. 45-57
ISSN 1644-888X
e-ISSN 2449-7975
DOI: 10.19251/ne/2018.27(3)
www.ne.pwspzlock.pl

Marta Lipnicka

Uniwersytet Łódzki

Artur Lipnicki

Uniwersytet Łódzki

METODY APROKSYMACJI I PROGNOZOWANIA ZJAWISK CYKLICZNYCH

METHODS OF APPROXIMATION AND FORECASTING OF CYCLIC PHENOMENA

Streszczenie

W pracy podjęto problem zastosowania pewnych metod prognozowania i aproksymacji zjawisk cyklicznych. Wiele procesów gospodarczych ma charakter okresowy, dlatego możemy przedstawić je jako sumę pewnego szeregu trygonometrycznego lub też zastanowić się czy i w jakiej sytuacji możemy dany proces opisać wielomianem o współczynnikach całkowitych, co przyspieszyłoby pewne procesy algorytmiczne w tym przypadku. Zbadamy również jakiego rzędu dokładności możemy otrzymać w takim przypadku i w jakiej sytuacji będzie to w ogóle możliwe.

Summary

The paper addresses the problem of applying certain methods of forecasting and approximating cyclic phenomena. Many economic processes are periodic, so we can present them as the sum of a certain trigonometric series or consider whether and in what situation we can describe a given process with a polynomial with integer coefficients, which would accelerate some algorithmic processes in this case. We will also examine what's kind of accuracy we can obtain in this case. What is more, we obtain in which case it is possible at all.

Słowa kluczowe: promień pokrywający, prognoza, wielomian interpolacyjny Lagrange'a, szereg Fouriera.

Keywords: Covering radius, Forecast, The Lagrange Interpolating Polynomial, Fourier Series.

Wprowadzenie

Głównym przedmiotem zainteresowania wielu ekonomistów są zmiany, jakie mogą dokonywać się w zakresie aktywności pewnego zjawiska w czasie. Szczególnie ciekawe mogą być zagadnienia dotyczące zjawisk mających charakter cykliczny. Oczywiście za dwa najważniejsze cele analizy szeregów czasowych możemy tutaj uznać wykrycie natury opisywanego zjawiska oraz prognozowanie przyszłych wartości. W przypadku procesów cyklicznych mamy pewne narzędzia ułatwiające konstrukcje prognoz i symulacji, jak chociażby analizę harmoniczną.

Obecnie analiza harmoniczna jest bardzo dynamicznie rozwijającą się gałęzią matematyki. Początki badań sięgają wyników Josepha Fouriera, z początku XIX wieku, w pracach dotyczących równania przewodnictwa cieplnego. Jego dokonania odbiły się szerokim echem w świecie matematyki i dziedzin pokrewnych. Szeregiem Fouriera nazywać będziemy przedstawienie funkcji okresowej w postaci sumy nieskończonego ciągu funkcji sinus oraz cosinus pomnożonych przez pewne współczynniki. To właśnie Fourier podał wzory na wspomniane współczynniki i twierdził, że szereg ten jest zbieżny do wartości funkcji dla dość szerokich klas funkcyjnych. Z kolei Dirichlet podał warunki dostateczne takiej zbieżności. Głównym celem analizy szeregów czasowych jest niewątpliwie zbudowanie modelu pewnego procesu w oparciu o obserwowane zmiany w czasie pewnych mierzalnych wielkości opisujących ten proces. Oczywiście ogólnie przyjęte założenia wymagają aby obserwowany proces składał się z części systematycznej i części okresowej. Są to bez wątpienia czynniki determinujące nasze zjawisko.

Jak już wspominaliśmy jednym z narzędzi do opisu zjawisk cyklicznych są szeregi trygonometryczne. Jeśli funkcja okresowa opisująca dane zjawisko (o ile taka istnieje) jest wysokiej klasy np. C^1 , to możemy spodziewać się, że współczynniki rozwinięcia Fouriera dla niej będą na tyle dobre, że sam szereg Fouriera będzie jednostajnie zbieżny do niej w każdym punkcie. W przypadku wielu procesów ekonomicznych nie możemy niestety liczyć na fakt, że dane zjawisko na skali czasowej opiszemy w łatwy sposób funkcją ciągłą czy też różniczkowalną wewnątrz przedziału skali czasowej. W przypadku modeli dyskretnych również mamy do dyspozycji wzory na współczynniki rozwinię-

cia w szereg Fouriera. Otrzymać je możemy stosując metodę najmniejszych kwadratów. W tej sytuacji również otrzymujemy pewne prognozy i możemy wyznaczyć ich błędy. W pierwszej części pracy rozważać będziemy pewien model dyskretny. Dotyczyć on będzie konstrukcji szeregu trygonometrycznego dla wielkości przewozów w pewnej firmie transportowej. Omówimy przy tej okazji również jakie cechy musiałby posiadać nasz model, aby mógł być dobrze opisany z wykorzystaniem aparatu analizy harmoniczej. Możemy również badać sytuację, jak dokładnie model dyskretny możemy przybliżać modelem ciągłym, np.: wielomianami o współczynnikach rzeczywistych czy całkowitych. Wielomiany całkowite przyspieszałyby pewne operacje algorytmiczne. W drugiej części pracy postaramy się odpowiedzieć na pytanie: czy mając dany proces ekonomiczny o równych wartościach na końcach skali czasowej, możemy go przybliżyć wielomianem o współczynnikach całkowitych? W jakich sytuacjach jest to możliwe? Jakiego rzędu błędy mogą się wówczas pojawić?

1. Analiza harmoniczna w prognozowaniu

Analiza harmoniczna jest jedną z metod badania zjawiska okresowości w szeregach czasowych. W metodzie tej chodzi o budowę pewnego modelu będącego sumą harmonik. Bazował on będzie na ogólnej postaci szeregu Fouriera w modelu ciągłym. W tej sytuacji każdej funkcji okresowej spełniającej warunki Dirichleta możemy przyporządkować jej szereg Fouriera postaci

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{T}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{T}x\right),$$

gdzie T jest okresem podstawowym naszego modelu oraz a_k , b_k współczynnikami rozwinięcia wyrażonymi następującymi równościami (Tolstow G. [1954]):

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2k\pi}{T}x\right) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2k\pi}{T}x\right) dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

W naszym przypadku badane zjawisko y_t opisywać będziemy za pomocą sumy harmonik o zadanym okresie. Zatem wykorzystywać w istocie będą

dziemy tylko sumy częściowe szeregu Fouriera (liczba n będzie ustalona na początku omawianego problemu ekonomicznego i stanowić będzie najczęściej o skali czasowej), tj.

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{n} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{n} t\right),$$

gdzie T jest numerem harmoniki oraz a_0, a_k, b_k parametrami strukturalnymi. Pierwsza z harmonik ma okres długości całego szeregu, druga harmonika połowy tego szeregu, itd. Ostatnia z harmonik o indeksie $k = n/2$ ma okres równy $2/n$. W przypadku modeli dyskretnych, oceny parametrów modelu wyznacza się za pomocą metody najmniejszych kwadratów. Otrzymujemy wówczas wzory

$$a_0 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_t;$$

$$\alpha_k = \sum_{t=1}^{\frac{n}{2}} y_t \cos\left(\frac{2k\pi}{n} t\right), \quad \beta_k = \sum_{t=1}^{\frac{n}{2}} y_t \sin\left(\frac{2k\pi}{n} t\right), \quad k = 1, 2, \dots, n/2.$$

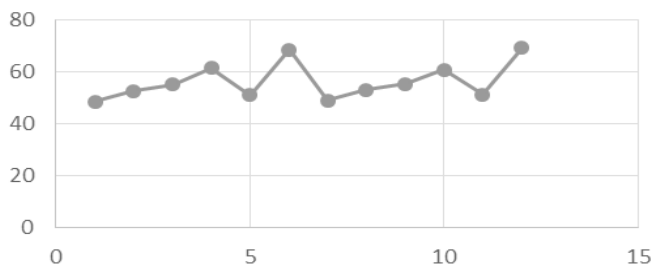
Rozważmy teraz przykład pewnego przedsiębiorstwa, dokładniej firmy przewozowej EUROP-TRANS w roku 2016. Wielkość przewozów firmy wyrażona będzie w milionach ton (od stycznia do grudnia).

Tabela 1. Dane uzyskane z firmy EUROP-TRANS

Miesiąc	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ilość	48,5	52,6	55,1	61,4	51	68,3	49	53	55,2	60,8	51,1	69

Na podstawie otrzymanych przez nas informacji zawartych w tabeli postaramy się zbudować odpowiedni model dotyczący aproksymacji i prognozy. W tym celu posłużymy się najpierw analizą harmoniczną, a następnie metodą interpolacji Lagrange'a. Dane pozyskane z firmy przedstawia tabela oraz rysunek 1.

Wielkość przewozów EURO-TRANS w roku 2016.



Rysunek 1. Interpretacja graficzna danych w roku 2016r.

Już sama ocena wzrokowa wskazuje na to, że w szeregu występują wahania sezonowe. W naszym przypadku otrzymujemy (dla $n = 12$ miesięcy) sześć harmonik. Stosując podane wcześniej wzory otrzymujemy szereg czasowy postaci

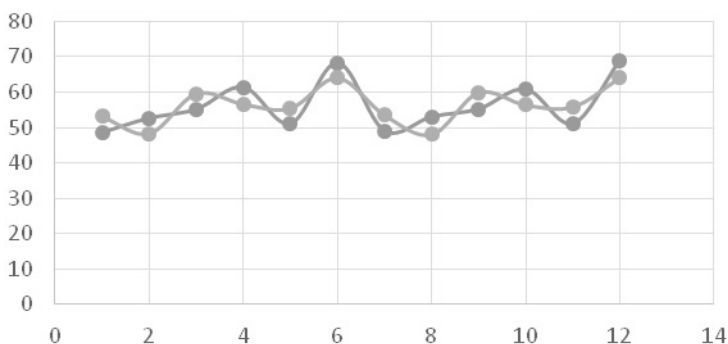
$$y_t = 56,25 + \sum_{k=1}^6 \alpha_k \cos\left(\frac{2k\pi}{n}t\right) + \beta_k \sin\left(\frac{2k\pi}{n}t\right),$$

gdzie $\alpha_1 \cong 0$, $\alpha_2 \cong 2,15$, $\alpha_3 \cong 0$, $\alpha_4 \cong 5,65$, $\alpha_5 \cong -0,1$

oraz $\beta_1 \cong -0,4$, $\beta_2 \cong -3,06$, $\beta_3 \cong -0,08$, $\beta_4 \cong 1,73$, $\beta_5 \cong -0,1$

Model prognozy wykorzystujący narzędzia analizy harmonicznej ilustruje rysunek 2. Oczywiście, w przypadku dodatkowych danych, po zwiększeniu indeksu sumy częściowej szeregu Fouriera, dostajemy dokładniejszą prognozę.

Prognoza i rzeczywiste dane



Rysunek 2. Porównanie prognozy i rzeczywistych danych w 2016r. Kolor niebieski – rzeczywiste dane. Kolor pomarańczowy – wartość sumy częściowej Fouriera.

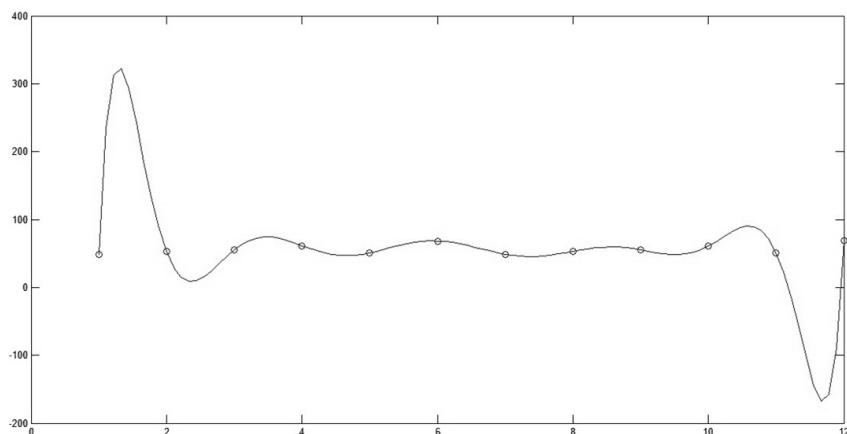
W przypadku, gdy rzeczywiste dane moglibyśmy wyrazić jako pewną funkcję ciągłą na przedziale czasowym $[t_0, t_1]$, to wówczas wzory na współczynniki Fouriera mogłyby być wyrażone całką. Współczynniki rozwinięcia jak nietrudno można wykazać będą wówczas zbieżne do zera, gdy indeks górny sumy częściowej Fouriera będzie kolejno zwiększany. W przypadku funkcji ciągłej (ewentualnie nieciągłej w skończonej liczbie punktów), opisującej nasz proces, możemy przypisać jej szereg Fouriera i testować jego zbieżność. W tym celu możemy sklasyfikować odpowiednio funkcję (klasa, rodzaj ciągłości/nieciągłości). Następnie dokonujemy na tej podstawie wyboru kryterium zbieżności. Będzie to istotne w punktach ewentualnej „nieciągłości” wartości procesu gospodarczego (punkty krańcowe przedziałów czasowych). Gdyby w naszym modelu wartość z grudnia 2016 r. nieznacznie nawet różniła się od wartości rzeczywistej dla stycznia 2017 r., nie moglibyśmy liczyć na jednostajną zbieżność sum częściowych naszych prognoz. W tej sytuacji sumy częściowe szeregu Fouriera mogłyby być zbieżne do średniej arytmetycznej wartości z grudnia 2016 r. oraz stycznia 2017 r. Widać zatem, że jeśli wartości te miałyby znaczącą różnicę, to wykorzystanie tutaj aparatu analizy harmonicznej nie dawałoby dobrego przybliżenia i prognozy (błąd mógłby być zbyt duży, rzędu $\frac{1}{2} * \text{średnia arytmetyczna zadanych wartości na krańcach}$). Jak wiadomo dla wszystkich funkcji ciągłych na pełnej skali czasowej szeregu, współczynniki rozwinięcia powinny oscylować w granicy przynajmniej $\frac{1}{n^\alpha}$ przy $\alpha > 1$. W tym przypadku moglibyśmy liczyć na jednostajną zbieżność naszego szeregu i tym samym uzyskać dobry wynik w prognozie. Wynika to z kryterium jednostajnej zbieżności szeregu Fouriera. W przypadku cyklicznych nieciągłości procesu, otrzymamy tylko pewne średnie arytmetyczne wartości krańcowych (lewo i prawo-stronnej). W sytuacji, gdy proces gospodarczy będzie przyjmował równe wartości na krańcach skali czasowej pełnego segmentu (np. pełny rok), możemy otrzymać szereg Fouriera zbieżny do wartości krańcowych (zakładamy, że w procesie tym mamy te same wartości na początku i końcu, a sam proces daje się opisać funkcją ciągłą). W tej sytuacji możemy oczekiwać że sama przyszła prognoza zjawiska w zadowalający sposób będzie opisywać nam dalsze wartości tego zjawiska.

Z drugiej strony poszukując wielomianu możliwie dopasowanego do naszych węzłów (tak nazywać będziemy teraz zadane z góry, znane nam wartości zjawiska) zastosujemy klasyczną interpolację Lagrange’a. Jest to metoda numeryczna przybliżania funkcji tzw. wielomianem Lagrange’a stopnia n przyjmującym w $n+1$ punktach zwanych węzłami interpolacji, wartości takie

same jak przybliżana funkcja. Interpolacja ta stosowana jest dość często w naukach doświadczalnych, gdzie dysponujemy skończoną liczbą danych (mamy pewien układ dyskretny) do określenia pewnych zależności między wielkościami. W przypadku naszych dwunastu węzłów dostajemy wielomian w następującej postaci:

$$W(x) = 0.000274x^{11} - 0.019762x^{10} + 0.627809x^9 - 11.574908x^8 + \\ + 137.117034x^7 - 1091.171461x^6 + 5922.297829x^5 - 21787.410733x^4 + \\ + 52837.720915x^3 - 79664.973204x^2 + 66335.286222x - 22629.400016$$

Oczywiście jest to wielomian o współczynnikach rzeczywistych, którego wykres ilustruje rysunek 3. W tym przypadku widać już pewne dość wysokie skoki wartości na krańcach określoności wielomianu.



Rysunek 3. Wykres wielomianu Lagrange'a dla 12 węzłów

Logika mogłaby w tej sytuacji podpowiadać, że zwiększając liczbę węzłów interpolacji (ewentualnie stopnia wielomianu interpolacyjnego) możemy oczekiwać, że pociąga to za sobą coraz lepsze przybliżenie naszej wyjściowej funkcji (wielomian interpolacyjny staje się coraz bardziej podobny do funkcji opisującej nasze zjawisko – układ dyskretny). Oczywiście jeśli zwiększymy liczbę węzłów (np. otrzymaliśmy dodatkowe dane) to wówczas zwiększamy tym samym stopień wielomianu. W takim przypadku możemy otrzymywać dość duże oscylacje tego wielomianu na zadanym przedziale (dokładniej, na jego krańcach). Nie dostaniemy również w tej sytuacji gwarancji, że w każdym punkcie granica ciągu interpolacyjnego wielomianów będzie dążyła

do wartości zadanej na początku. Zatem nasz wielomian interpolacyjny nie musi dobrze opisywać naszego zjawiska poza węzłami (z założenia w węzłach otrzymamy zadane z góry wartości). Co więcej, fakt ten wynika ze zjawiska Rungego, które mówi o pogorszeniu jakości interpolacji wielomianowej, mimo zwiększenia liczby jej węzłów. Początkowo ze wzrostem liczby węzłów n przybliżenie poprawia się, jednak po dalszym wzroście n , zaczyna się pogarszać, co jest szczególnie widoczne na końcach przedziałów. Taki charakter wielomianu interpolującego jest zjawiskiem dość charakterystycznym dla interpolacji za pomocą wielomianów mających wysoki stopień. Takie sytuacje możemy spotykać w przypadku pewnych zjawisk nieregularnych (zmiany charakteru działalności firmy, zmiany właściciela i tym samym poważne zmiany w produkcji). Aby uniknąć tego efektu, stosuje się interpolację z węzłami coraz gęściej upakowanymi na krańcach przedziału interpolacji. W przypadku jednak problemów ekonomicznych takie sytuacje nie są często możliwe w realizacji. Mając bowiem już zebrane dane w układzie dyskretnym nie dysponujemy często wcześniejszymi danymi. Przykładowo, mając dane z lutego często nie potrafimy powiedzieć, czy wartości były większe na początku tego miesiąca, czy bardziej skupione na jego końcu. Można oczywiście próbować wyznaczyć poszczególne „brakujące” węzły na danej skali czasowej, metodą częściowej regresji, ale możliwe są tutaj zbyt duże błędy. W takiej sytuacji pozbycie się zjawiska Rungego, w procesie dynamicznego procesu ekonomicznego, jest trudniejsze w realizacji oraz prawdopodobnie związane z większym błędem.

2. Wielomiany całkowite na skalach czasowych

W tej części pracy omówimy krótko problem aproksymacji funkcji prognozującej wielomianami o współczynnikach całkowitych zwanych dalej wielomianami całkowitymi. Tematyka ta jest związana z klasycznym, ale wciąż badaniem zagadnieniem aproksymacji funkcji wielomianami całkowitymi. Istotność problemu wynika m.in. ze związków z takimi działami teorii liczb jak aproksymacje diofantyczne. Zakładać będziemy, że wszystkie nasze funkcje rozważamy na odcinku $[0,1]$. Wiadomo, że każdą funkcję ciągłą na odcinku $[0,1]$, przyjmującą na końcach przedziału wartości całkowite, można jednostajnie aproksymować wielomianami o współczynnikach całkowitych. Prowadzi to do następującego pytania: jak dobrze można aproksymować jednostajnie wielomian stopnia n na odcinku $[0,1]$, przyjmującą na końcach

odcinka wartości całkowite, wielomianami o współczynnikach całkowitych? Oczywiście, bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że wartości całkowito-liczbowe osiągane przez nasze funkcje na krańcach przedziału to wartości zerowe. Wprowadźmy w tym miejscu kilka oznaczeń. Dla każdego n naturalnego oznaczmy przez P_n przestrzeń wielomianów stopnia co najwyżej n . Niech P_n^Z będzie podgrupą addytywną przestrzeni złożoną z wielomianów o współczynnikach całkowitych. Taką podgrupę możemy nazywać również kratą. Dla każdego $r = 0, 1, 2, \dots$ niech M_r będzie przestrzenią wszystkich wielomianów podzielnych przez wielomian $x^r(1-x)^r$. Tak więc, M_0 jest przestrzenią wszystkich wielomianów, M_1 zaś jest jej podprzestrzenią złożoną z wielomianów zerujących się na końcach odcinka $[0, 1]$. Gdy $n \leq 2r - 1$, wtedy $P_n \cap M_r = \{0\}$, dlatego w dalszym ciągu będziemy zakładać, że $n \geq 2r$. Oznaczmy teraz przez $\mu_{n,r}$ najmniejszą liczbę taką, że dla każdego wielomianu $P \in P_n \cap M_r$, istnieje wielomian $Q \in P_n^Z \cap M_r$, taki, że zachodzi następująca nierówność:

$$\max_{x \in [0,1]} |P(x) - Q(x)| \leq \mu_{n,r}.$$

A zatem otrzymujemy, że

$$\mu_{n,r} := \max_{P \in P_n \cap M_r} \min_{Q \in P_n^Z \cap M_r} \left(\max_{x \in [0,1]} |P(x) - Q(x)| \right).$$

Liczbę $\mu_{n,r}$ nazywać będziemy promieniem pokrywającym $P_n^Z \cap M_r$. Zatem nasze pytanie dotyczące problemu jak dobrze można aproksymować jednostajnie wielomian na odcinku $[0,1]$, przyjmujący wartości równe zero na końcach przedziału, możemy teraz sformułować w następujący sposób: jak zachowują się wielkości $\mu_{n,r}$? Zakładając zatem, że nasze zjawisko w przedziale czasowym $[t_1, t_2]$ przyjmuje identyczne wartości całkowito-liczbowe (np. wartość dochodu spółki na początek i koniec roku kalendarzowego są identyczne) możemy z pewną dokładnością pytać o prognozy na następne lata wyrażone jako całkowite funkcje wielomianowe. Wartości całkowite współczynników prognozy są niezwykle ważne w algorytmach, przyspieszając tym samym pewne operacje arytmetyczne w ich przypadku. Możemy oczywiście bez zmniejszenia ogólności przyjąć, że wartości osiągane na krańcach określoności są równe zero. W takim przypadku Wojciech Banaszczyk i Artur Lipnicki [2015] oraz Artur Lipnicki [2016] udowodnili, że dla ustalonego $r = 1, 2, \dots$ oraz $n \geq 6r$ zachodzą następujące nierówności:

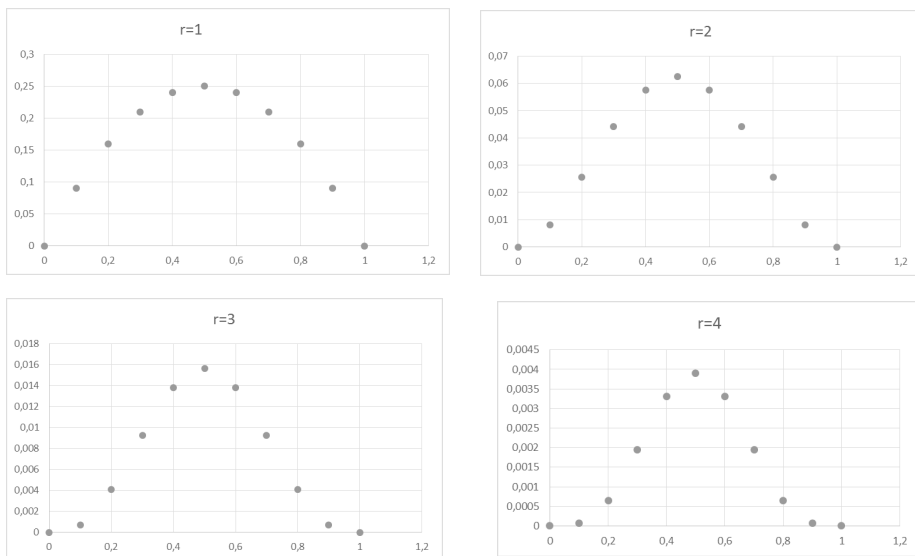
$$c_1 \cdot c_2^r \cdot r^{2r+\frac{1}{2}} \cdot n^{-2r} < \mu_{n,r} < c_3 \cdot c_4^r \cdot r^{2r+\frac{1}{2}} \cdot n^{-2r},$$

gdzie c_i , $i = 1, 2, 3, 4$ są stałymi liczbowymi. Można wówczas przyjąć, że

$$c_1 = \sqrt{\pi}, c_2 = e^{-2}, c_3 = 2\sqrt{\pi} + 1, c_4 = 16.$$

Widać zatem, że wielkość wspomnianego promienia pokrywającego jest rzędu n^{-2r} przy dużych wartościach n ($n \rightarrow \infty$).

Załóżmy zatem, że mamy pewne zjawisko gospodarcze. Rozważmy je na przedziale dwunastu miesięcy. Załóżmy ponadto, że w tym przypadku posiada ono na początku i na końcu roku kalendarzowego wartość równą zero (domyślnie mogą to być, jak wspominaliśmy, inne wartości całkowite). Wówczas niech r będzie ustaloną liczbą naturalną i niech $n \geq 6r$. W tej sytuacji oznaczmy przez $P \in P_n \cap M_r$ wielomian o współczynnikach rzeczywistych, najlepiej aproksymujący nasze zjawisko. Możemy przyjąć, że n jest liczbą miesięcy, tygodni, czy nawet godzin. Oczywiście, im mniejsza skala czasowa tym większe co do wartości bezwzględnej możemy uzyskać współczynniki naszego wielomianu. Na ogół w większości procesów gospodarczych wartości r nie będą zbyt duże ($r=0, 1, 2, 3$). W przypadku wartości $r=0$ oszacowanie promienia jest dość trywialne, można bowiem sprawdzić, że jest on stale równy $\frac{1}{2}$. Wystarczy jako przykład proces przyjmujący stale wartość 0.5 na całej skali czasowej (funkcja ciągła). W takim przypadku gdyby istniał wielomian całkowity aproksymujący naszą funkcję, posiadałby on w punkcie 0 wartość całkowitoliczbową. Z kolei najbliższą liczbą całkowitą byłaby tutaj 1 lub 0. Stąd otrzymujemy, że nasz błąd nie może być mniejszy niż $\frac{1}{2}$. Im większa jest wartość r tym bardziej nasza funkcja aproksymująca zjawisko jest zbliżona do wartości zero w lewo i prawostronnym sąsiedztwie krańców przedziału czasowego. Parametr r w pewien sposób wygładza nasz proces na końcach przedziału (przykleja funkcję modelującą proces do osi OX). Przykładowy model zjawiska dla kolejnych wartości r ilustruje rysunek 4. Przy kolejnym zwiększeniu parametru r otrzymujemy, że nasza funkcja staje się bardziej gładka na krańcach określoności. Proces opisywany w tym przypadku ma w przyszłości większe powodzenie wyrażenia go prognozą całkowito-liczbową.



Rysunek 4. Symulacja przykładowego zjawiska gospodarczego dla kolejnych r

Korzystając zatem z oszacowań promienia pokrywającego otrzymujemy, że w pierwszym przypadku, gdy $r=1$ oraz skala naszego czasu jest dość mała lub coraz mniejsza ($n \rightarrow \infty$) wielomianem o współczynnikach całkowitych możemy opisać nasze zjawisko z dokładnością rzędu $1/n$. W tym celu możemy stosować w aproksymacji klasyczny układ wielomianów Bernsteina. Dowód tego faktu to dość standardowa procedura ich konstrukcji dla funkcji modelującej proces oraz niezbyt trudne późniejsze oszacowanie pewnych sum. Można jednak poprawić ten rząd do $1/n^2$. Dowód ten opiera się już na bardziej zaawansowanym aparacie analizy matematycznej i wykorzystuje w swojej idei wielomiany Czebyszewa. Mając zatem dla konkretnego procesu gospodarczego symulację podobną do wspomnianych możemy otrzymać z pewną dokładnością wielomian o współczynnikach całkowitych opisujący to zjawisko w danej skali czasowej. Możemy się zatem zastanowić nad przybliżeniem wielomianu rzeczywistego, otrzymanego w pierwszej części pracy metodą interpolacji Lagrange'a, wielomianem całkowitym. Z wykresu wielomianu rzeczywistego wynika jasno (rys. 3), że największe błędy mogą dotyczyć początku i końca okresu skali czasowej. W przypadku wielomianów rzeczywistych z przestrzeni $P_n \cap M_r$ możemy liczyć na błędy aproksymacji naszego procesu wielomianem całkowitym rzędu n^{-2r} przy $n \rightarrow \infty$. W takiej sytuacji należałoby najpierw przybliżyć naszą funkcję modelującą (na zadanym przedziale czasowym skończonym) wielomianem o współczynnikach rzeczywistych (jest to

możliwe korzystając z twierdzenia Weierstrassa). Następnie otrzymany wielomian rzeczywisty (założyć możemy, że jego wartości na krańcach przedziału zerują się) przybliżyć wielomianem o współczynnikach całkowitych. W normie supremum w tej sytuacji otrzymamy wówczas wspomniany błąd rzędu n^{-2r} przy $n \rightarrow \infty$ (z dokładnością do stałych czynników).

Podsumowanie

Zmiany cykliczne, które mogą dokonywać się w zakresie aktywności pewnego zjawiska w czasie, w modelu dyskretnym możemy starać się opisać sumą częściową szeregu Fouriera. W takim przypadku po wyznaczeniu współczynników rozwinięcia możemy już konstruować model i analizować różnicę pomiędzy prognozą, a rzeczywistą wartością. Stosując szereg kryteriów związanych z charakterem sum Fouriera, możemy porównywać wyniki naszych prognoz z rzeczywistymi wartościami w przyszłości. Oczywiście im lepszy charakter cykliczności (okresowość), tym mniejsze błędy otrzymujemy w prognozie. W przypadku, gdy model daje się opisać funkcją dobrej klasy, współczynniki możemy wyrażać jako całki i badać zbieżność szeregu trygonometrycznego. W takiej sytuacji model musi spełniać dodatkowe warunki (np. Dirichleta), aby szereg zbiegał do zadanej wartości funkcji. Szereg kryteriów zbieżności pozwala otrzymać charakter zbieżności, tzn. czy szereg jest zbieżny tylko punktowo czy jednostajnie. Oczywiście w przypadku funkcji nieciągłych nie mamy szans na zbieżność jednostajną. Możemy mówić w takich sytuacjach o zbieżności punktowej naszej prognozy w punktach ciągłości funkcji modelującej bądź mieć świadomość otrzymania pewnych średnich arytmetycznych jako prognozy (średnia arytmetyczna wartości z sąsiedztwa funkcji modelującej). Gdy zachodzi potrzeba realizacji bardziej zaawansowanych algorytmów, a zwłaszcza operacji na wartościach prognoz, należałoby je wyrazić jako wielomiany całkowite. Nie zawsze jednak taka sytuacja jest możliwa w realizacji. W takim przypadku, jak zauważyliśmy, potrzeba nam pewnych założeń o samej naturze zjawiska (liczba r określająca gładkość procesu na krańcach skali czasowej). Możemy także zauważyć, że istnieje również pewna zależność między liczbą r a liczbą n stanowiącą o stopniu wielomianu całkowitego (zakładaliśmy, że $n \geq 6r$). W tym przypadku zauważmy, że mamy pewne oszacowania błędów naszej prognozy zarówno z góry, jak i z dołu w normie jednostajnej (supremum). Błąd aproksymacji wielomianem całkowitym daje w tym przypadku dość dokładną wartość rzędu n^{-2r} przy $n \rightarrow \infty$ z dokładnością do stałych czynników. Wszystkie powyższe prognozy

można również badać w normie L_2 . W tej sytuacji sprawa promienia pokrywającego przedstawia się nieco inaczej. Szereg oszacowań i nierówności związanych z tym problemem można odnaleźć w pracy [Banaszczyk i Lipnicki, 2015].

Literatura

- Banaszczyk Wojciech, Lipnicki Artur. 2015. „On the lattice of polynomials with integer coefficients: the covering radius in $L_p(0,1)$ ”. *Annales Polonici Mathematici* 115.2: 123-144.
- Gajda Jan B. 2017. *Prognozowanie i symulacje w ekonomii i zarządzaniu, Metody ilościowe*. Warszawa: C.H.Beck.
- Grafakos Loucas. 2014. *Classical Fourier Analysis*. Berlin: Springer.
- Lipnicki Artur. 2016. „Uniform approximation by polynomials with integer coefficients”. *Opuscula Math.* 36, no.4: 489-498.
- Radzikowska Barbara. 2001. *Metody prognozowania. Zbiór zadań*. Wrocław: Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Oscara Langego we Wrocławiu.
- Stein Elias M. 1993. *Harmonic Analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*. Princeton University Press.
- Tołstow G. 1954. *Szeregi Fouriera*. Warszawa: PWN.
- Torchinsky Alberto. 2004. *Real-Variable Methods in Harmonic Analysis*. Dover Publications.