OPTYMALNE POSTĘPOWANIE W PROBLEMIE SEKWENCYJNEJ SELEKCJI: PRAKTYKA I TEORIA

Krzysztof Szajowski*

Politechnika Wrocławska

Streszczenie: *Analizowana jest modyfikacja problemu sekwencyjnego wyboru najlepszego obiektu. Selekcjoner obserwuje rangi względne obiektów, których prawdziwe wartości są losowe, niezależne o rozkładzie jednostajnym na [0, 1]. Zadaniem selekcjonera jest wybór jednego obiektu w chwili obserwacji. Otrzymana wypłata to prawdziwa wartość wybranego obiektu pomniejszona o pewien koszt, odzwierciedlający koszt decyzji. Podejście używane do stworzenia modelu matematycznego oraz wyznaczenia strategii optymalnej polega na zastosowaniu metody optymalnego zatrzymania do ciągu wypłat, które są wartościami w innych zadaniach optymalnego zatrzymania. Obserwowane wielkości losowe tworzą łańcuch Markowa, a optymalne strategie wyznaczane są metodą indukcji wstecznej. Zbadano asymptotyczne zachowanie rozwiązań ze skończonym horyzontem czasowym. Przedstawione zagadnienia są dyskusją problemu poruszonego przez Beardena (2006) i analizowanego przez Autora w pracy Szajowskiego (2006).*

Słowa kluczowe: *decyzje w warunkach niepewności, koszt decyzji, łańcuch Markowa, reguła zatrzymania.*

1. Wprowadzenie

Tyle jest w każdym poznaniu nauki, ile jest w nim matematyki[1]. Jeden ze znanych problemów decyzyjnych można sformułować następująco: dyrektor pewnej firmy ma zamiar zatrudnić nową sekretarkę. Na ogłoszony konkurs zgłosiło się N kandydatek, jednak nic prócz danych potrzebnych do przesłania zaproszenia na rozmowę nie wolno im było podawać. Kandydatki mają zgłaszać się w siedzibie firmy pojedynczo, co oznacza, że wiedza na temat ich kwalifikacji jest dostępna w chwili rozmowy ocenia-

* Politechnika Wrocławska, Instytut Matematyki i Informatyki, Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, email: Krzysztof.Szajowski@pwr.wroc.pl

[1] Karol Fryderyk Gauss (1777-1855).

jącej lub po jej zakończeniu. Zatem kwalifikacje kandydatki można porównać jedynie z wcześniej ocenianymi. Dyrektor ma możliwość zatrudnienia kandydatki jedynie zaraz po zakończeniu rozmowy. Nie ma możliwości powracania do odrzuconych kandydatek. Celem jest wybór najlepszej kandydatki, a właściwie wskazanie strategii, która maksymalizuje szansę na wybór najlepszej.

Model matematyczny tego problemu powstał po jego sformułowaniu w artykule Martina Gardnera zamieszczonym w Scientific American w 1960 roku (Gardner 1960a, b). Sformułowanie problemu pokrewnego można znaleźć u Cayley'a (1875). Gilbert i Mosteller (1966) przeprowadzili dyskusję kilkunastu modyfikacji problemu podając ich rozwiązania. Jednak większość tych rozwiązań nie jest precyzyjna. Dopiero dalsze prace, sprowadzające problem do sekwencyjnej obserwacji zmiennych losowych i zadania optymalnego zatrzymania tych obserwacji, dały ścisłe uzasadnienie rozwiązania. Podstawy tej metody wraz z licznymi przykładami opisuje Bartoszyński (1974). Konstrukcja optymalnej strategii korzysta z programowania dynamicznego i indukcji wstecznej.

Niemal jednocześnie z analizą matematyczną problemu optymalnego sekwencyjnego wyboru analizowano przydatność tych rezultatów do modelowania zachowań osób podejmujących decyzje w podobnych okolicznościach. Z jednej strony, należało przeprowadzić badania empiryczne nad postępowaniem decydentów nieświadomych rezultatów otrzymanych przez matematyków. Z drugiej zaś, jeśli obserwacje nie potwierdzą zgodności, należy wykryć czynniki odpowiedzialne za niedoskonałość teorii i model matematyczny zmodyfikować. Opis wyników eksperymentalnych znaleźć można u Seale'a i Rapoporta (1997, 2000). Ujmując ogólnie i nieprecyzyjnie, opublikowane wyniki badań eksperymentalych pokazują, iż decydenci nie zachowują się zgodnie z optymalnymi regułami wyprowadzonymi w modelach matematycznych. Zwykle strategia optymalna polega na zbieraniu informacji o populacji przez pewien czas, a następnie zaakceptowaniu pierwszego obiektu lepszego od wcześniej obserwowanych. Różnica między optymalnym postępowaniem a postępowaniem decydenta polega na tym, że ten ostatni skraca czas zbierania informacji o populacji. Niezależnie od uzyskanych wyników eksperymentalnych, zanim jeszcze materiał empiryczny został zebrany, podstawowy model teoretyczny był modyfikowany przez osłabienie różnych założeń. Jednakże, *wprowadzone do tej pory modyfikacje i zmiany w modelu podstawowym nie dają wyjaśnienia wyników eksperymentów. Można więc uznać, że jeszcze mamy „za mało matematyki" w modelowaniu różnych aspektów tego problemu decyzyjnego – wpływu wcześniejszych eksperymentów, użyteczności wybranego obiektu w porównaniu z kosztem decyzji, perspektywy czasowej*.

Analizowano więc cel, jaki stawia sobie podejmujący decyzję. Będzie, być może, usatysfakcjonowany, gdy otrzyma jeden z k najlepszych obiektów (myślimy tutaj zwykle o dość małej liczbie k). Optymalną strategię przy tak postawionym celu wyznaczył

Gusejn-Zade (1966). Przy analizie matematycznej tej modyfikacji okazało się, że struktura rozwiązania jest bardzo prosta i przejrzysta. Decyzję o akceptacji podejmujemy na podstawie pozycji kandydatki wśród dotychczas analizowanych (tzn. jej relatywnej rangi). W optymalnym postępowaniu, przez pewien czas obserwujemy kandydatki, jednak decyzję o akceptacji podejmujemy dopiero wtedy, gdy liczba sprawdzonych kandydatek przekroczy pewien próg. Optymalny próg zależy od relatywnej rangi kandydatki. Przyjmując, że najlepsza kandydatka ma rangę 1, progi te rosną wraz z relatywną rangą. Ta własność optymalnego postępowania jest dość intuicyjna. Im bliżej wyczerpania kandydatek, tym niższą jakością jesteśmy skłonni się zadowolić. Jeśli celem będzie jednak wybór np. drugiej co do oceny kandydatki, to cechy optymalnej strategii nie są już takie oczywiste (patrz Szajowski, 1982).

W tym okresie badań stwierdzono również, że zwykle istnieje możliwość powrotu do wcześniej analizowanych obiektów, choć może okazać się, iż interesująca nas kandydatka jest już niedostępna. Takie teoretyczne modyfikacje modelu podstawowego wprowadzili Yang (1974) oraz Smith i Deely (1975).

Przydatność tego matematycznego podejścia do modelowania zachowań strategicznych w sytuacjach takich jak zakup samochodu, zatrudnienie pracownika czy poszukiwanie lokalu do wynajęcia widzieli liczni autorzy (patrz Corbin, 1980). Empiryczne badania prowadzone przez Seale'a i Rapoporta (1997, 2000) pokazują, że podejmowane w praktyce decyzje nie są zgodne z optymalnymi strategiami matematycznych modeli. Podejmowane są próby innego spojrzenia na sekwencyjny problem wyboru w celu konstrukcji bardziej adekwatnego modelu matematycznego. Wyniki eksperymentów przeprowadzonych przez Seale'a i Rapoporta (1997) wskazują na tendencję do obniżania progów decyzyjnych. Oznacza to, że decydenci mają tendencję do przedwczesnego akceptowania kandydatek. Bearden (2006) modelując zachowanie przy zakupie samochodu czy domu proponuje zastosować model problemu najlepszego wyboru do podjęcia decyzji, jednak wypłatę uzależnić od prawdziwej wartości obiektu danej przez wartości zmiennej losowej X_j, gdzie X_j są niezależnymi, o tym samym rozkładzie jednostajnym na [0, 1]. Wówczas przy wyborze najlepszego obiektu strategia optymalna polega na przepuszczeniu $d - 1$ kandydatek i zatrzymanie się na obserwacji $j \geq d$, która jest relatywnie najlepsza, o ile taka pojawi się, lub w chwili N. Próg d to $\lfloor \sqrt{N} \rfloor$ lub $\lceil \sqrt{N} \rceil$. Z matematycznego punktu widzenia ciekawe jest zachowanie asymptotyczne progu d. Miarą może być frakcja obserwacji przepuszczanych przed próbą akceptacji kandydata, która w tym przypadku dąży do zera. W klasycznym problemie wyboru najlepszego wariantu, gdy celem jest maksymalizacja prawdopodobieństwa, udział przepuszczanych obserwacji wynosi e^{-1}. Ta znaczna zmiana w asymptotycznej wartości progu idzie w kierunku zgodnym z eksperymentami, jednak nie prowadzi do próby wyjaśnienia czynników, znajdujących odzwierciedlenie w modelu matematycznym, decydujących o takiej tendencji w pojmowaniu optymalnego postępowania przez decydentów.

Pewnym wyjaśnieniem jest dopuszczenie różnych rozkładów obserwowanych wiekości X_j. Badanie takie przeprowadziła Samuel-Cahn (2005). Badane są trzy różne rodziny rozkładów, należących do trzech różnych obszarów przyciągania dla maksimów ciągów zmiennych losowych. Różne rozkłady mogą modelować różne tendencje w postrzeganiu wartości badanych obiektów.

Inne podejścia będą zaprezentowane w tej pracy. Uzależnia się tutaj wypłatę od prawdziwej wartości obserwowanych zmiennych i dodatkowo włączony jest indywidualny koszt decydenta podjęcia decyzji o wyborze obiektu. Nie jest to koszt obserwacji, tak jak to pojmują Bartoszyński i Govindarajulu (1978) (patrz także Yeo, (1998)). Wprowadzając taki koszt decyzji otrzymujemy inny niż u Beardena (2006) udział obiektów przepuszczanych bez próby zaakceptowania. Istotna różnica polega na tym, że asymptotyczny udział jest funkcją wprowadzonego kosztu decyzji i jest wielkością większą od 0 i mniejszą od e^{-1}. Dobór tego parametru jest możliwy metodami statystycznymi. Wydaje się, że może ten parametr charakteryzować różne grupy decydentów (kobiety, dzieci, z wykształceniem na różnym poziomie czy też z różnym doświadczeniem zawodowym).

Przedstawiony model matematyczny posiłkuje się odpowiednio skonstruowanym łańcuchem Markowa, jak sugerują to w swojej pracy Dynkin i Juszkiewicz (1970) i wykorzystują Szajowski (1982) oraz Suchwałko i Szajowski (2002). Ten fragment modelowania zagadnienia jest zawarty w sekcji 2, rozwiązanie optymalne w ramach tego modelu jest przedstawione w sekcji 3 wraz z badaniem asymptotycznych własności rozwiązania i wartości problemu. Pewne wnioski i porównania znajdują się w sekcji ostatniej, gdzie również są odsyłacze do literatury mogącej stanowić uzupełnienie przedstawionych zagadnień decyzyjnych. O modelowaniu matematycznym psychologicznych problemów podejmowania decyzji w warunkach niepewności traktuje monografia Kozieleckiego (1975).

2. Matematyczny model problemu decyzyjnego

Załóżmy, że selekcjoner obserwuje ciąg N kandydatek, których wartość jest realizacją ciągu zmiennych losowych niezależnych $\{X_1,X_2,\ldots,X_N\}$ o rozkładzie jednostajnym na E = [0, 1]. Dokładne wartości nie są dostępne, a jedynie relatywne rangi

$$R_k = \#\,(1 \le i \le k : X_i \le X_k\}.$$

Dla matematycznej ścisłości zakładamy, iż wszystkie rozpatrywane wielkości losowe są zdefiniowane na ustalonej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, F, \mathbf{P})$. Obserwacja relatywnych rang R_k, $k = 1,2,...,N$, daje ciąg σ-ciał $F_k = \sigma\{R_1,R_2,...,R_k\}$, $k \in T = \{1,2,...,N\}$. Można pokazać, że zmienne losowe R_k są niezależne i mają rozkład $\mathbf{P}(R_k = i) = \frac{1}{k}$.

Niech M^N będzie zbiorem momentów Markowa τ względem rodziny σ-ciał $\{F_k\}_{k=1}^N$ oraz $q: T \times S \times E \to R^+$ będzie funkcją wypłaty. Określimy wartość problemu optymalizacji

$$v_N = \sup_{\tau \in M^N} \mathrm{E}q(\tau, R_\tau, X_\tau). \tag{1}$$

Celem jest wyznaczenie $\tau^* \in M^N$ tak, aby $\mathrm{E}q(\tau^*,R_{\tau^*},X_{\tau^*}) = v_N$.

Ponieważ $\{q(n,R_n,X_n)\}_{n=1}^N$ nie jest ciągiem zgodnym z filtracją F_n, zastosujemy technikę sprowadzenia do równoważnego strategicznie problemu z wypłatami zgodnymi przez zastosowanie warunkowej wartości oczekiwanej. Z własności wartości oczekiwanej mamy

$$\mathbf{E}q(\tau,R_\tau,X_\tau) = \sum_{r=1}^{N} \int_{\{\tau=r\}} q(\tau,R_\tau,X_\tau)\,\mathrm{d}\mathbf{P} = \mathbf{E}\widetilde{g}(\tau,R_\tau)$$

gdzie

$$\widetilde{g}(r,R_r) = \mathbf{E}[q(r,R_r,X_r) \mid F_r] \tag{2}$$

dla $r = 1,2,...,N$. Na zbiorze $\{\omega : R_r = s\}$ mamy zatem $\widetilde{g}(r,s) = \mathbf{E}[q(r,R_r,X_r) \mid R_r = s]$.

Założenie 1.

W dalszej części rozważań zakładamy, iż selekcjoner wybiera spośród relatywnie najlepszych kandydatek.

Stąd funkcja $\widetilde{g}(r,l)$ zdefiniowana w (2) jest równa 0 przy $l > 1$ i dodatnia dla $l = 1$. Oznacza to, że selekcjoner może wybrać pożądany obiekt jedynie w chwilach r z $R_r = 1$. Oznaczmy $h(r) = \widetilde{g}(r,1)$.

Z każdą decyzją selekcjonera związane jest ryzyko. Odczucia co do poziomu ryzyka są różne dla różnych decydentów. W decyzjach sekwencyjnych, gdy sytuacja zmienia sie dynamicznie, poczucie ponoszenia ryzyka pojawia się w losowym momencie ξ. Rozkład tej zmiennej odzwierciedla obawy o trafność wyboru momentu akceptacji obiektu.

Założenie 2.

Zakładamy, że ξ ma rozkład jednostajny na $\{0,1,\dots,N\}$.

Uwaga 2.1. *Jeśli przyjmiemy, że koszt decyzji czy też miara stresu związanego z decyzją akceptacji obiektu jest c, to ten koszt pojawia się również, jeśli odłożymy decyzję o akceptacji obiektu. Ten odłożony koszt decyzji jest procesem, który można opisać jako* $C(t)=c\mathbf{I}_{\{\xi\geq t\}}$, *gdzie* $I_{\{\xi\geq t\}}$ *jest równe 1 gdy* $\xi \geq t$ *i 0 poza tym. W oparciu o obserwowane relatywne rangi i zakładając, że nie było akceptacji obiektu przed chwilą k, mamy*

$$c(k,t) = \mathbf{E}\,[C(t)\,|\,F_k] = c\frac{N-t+1}{N-k+1}. \tag{3}$$

Przyjęty model jest konsekwencją założenia, że obawa o to, iż podejmiemy błędną decyzję akceptacji dzisiaj jest większa niż obawa o ewentualną akceptację przyszłych kandydatek (im później wybieramy relatywnie najlepszą, tym szansa na wystąpienie kolejnego kandydata, lepszego od wybranego jest mniejsza).

Założenie 3.

Celem selekcjonera jest zmaksymalizowanie oczekiwanej wartości wybranego obiektu i jednoczesne zminimalizowanie kosztu podjętej decyzji.

Biorąc to pod uwagę funkcja

$$q(t,R_t,X_t) = g_c(t,R_t,X_t) = \begin{cases} (X_t - C(t))\ \mathbf{I}_{\{R_t=1\}}(R_t) & \text{gdy } t<N, \\ X_N - c & \text{poza tym.} \end{cases} \tag{4}$$

Stała c jest parametrem, który odzwierciedla koszt wyboru lub inaczej jest miarą stresu związanego z procesem akceptacji obiektu przy sekwencyjnym wyborze. Ponieważ X_r są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie jednostajnym na [0, 1], otrzymujemy

$$\widetilde{g}_c(r,t,R_t) = \mathbf{E}\,[g_c(t,R_t,X_t)\,|\,F_r] = \left(\frac{t}{t+1} - c\frac{N-t+1}{N-r+1}\right)\mathbf{I}_{\{R_t=1\}}(R_t) \text{ (patrz Resnick, 1987).}$$

Oznaczmy $\widetilde{h}(r,s) = \widetilde{g}(r,s,1)$.

Określmy $W_0 = (1,Y_1) = (1,1)$, $\gamma_t = \inf\{r > \gamma_{t-1}\colon Y_r = 1\}$ $(\inf(\varnothing = \infty))$ oraz $W_t = (\gamma_t, Y_{\gamma_t})$.

Jeśli $\gamma_t = \infty$, to przyjmujemy $W_t = (\infty,\infty)$. W_t jest łańcuchem Markowa o prawdopodobieństwach przejścia

$$(5)\quad p(r,s) = P\{W_{t+1} = (s,1) \mid W_t = (r,1)\} = \begin{cases} \frac{1}{s}, & \text{gdy } r = 1,\ s = 2, \\ \frac{r}{s(s-1)}, & \text{gdy } 1 < r < s, \\ 0 & \text{gdy } r \geq s \text{ lub } r = 1,\ s \neq 2 \end{cases}$$

oraz $p(\infty,\infty) = 1$, $p(r,\infty) = 1 - a\sum_{s=r+1}^{N} p(r,s)$. Niech $\mathcal{G}_t = \sigma\{W_1, W_2, \ldots, W_t\}$ i niech $\widetilde{\mathcal{M}}^N$ będzie zbiorem momentów zatrzymania względem $\{\mathcal{G}_t\}_{t=1}^N$. Ponieważ γ_t jest rosnący, to możemy określić $\widetilde{\mathcal{M}}_{r+1}^N = \{\sigma \in \widetilde{\mathcal{M}}^N : \gamma_\sigma > r\}$.

$\mathrm{P}_{(r,1)}(\cdot)$ jest miarą probabilistyczną związaną z łańcuchem Markowa W_t, gdy stan początkowy łańcucha to $(r,1)$ i $\mathrm{E}_{(r,1)}(\cdot)$ jest wartością oczekiwaną względem $\mathrm{P}_{(r,1)}(\cdot)$. Z (5) widać, że prawdopodobieństwa przejścia zależą od momentów r, w których pojawiają się obiekty o relatywnej randze $R_r = 1$.

Biorąc pod uwagę postać funkcji wypłaty $\tilde{g}_c(r,t,R_t)$ należy rozpatrywać dwuwymiarowy łańcuch Markowa. Oznaczmy Z_t: $\Omega \to T \times T$ łańcuch Markowa o prawdopodobieństwach przejścia w jednym kroku:

$$(6a)\qquad \mathbf{P}(Z_{t+1} = (s,j) | Z_t = (s,i)) = \frac{i}{j(j-1)} \qquad \text{gdy } s < i < j \leq N,$$

$$(6b)\qquad \mathbf{P}(Z_{t+1} = (k,i) | Z_t = (s,i)) = \frac{s}{k(k-1)} \qquad \text{gdy } s < k < i \leq N$$

i 0 poza tym.

Wprowadzamy operatory w oparciu o (6) i (5) dla $s > r$

$$(7a)\qquad T\tilde{h}(r,s) = \mathbf{E}_{(r,s)}\tilde{h}(Z_1) = \sum_{j=s+1}^{N-1} \frac{s}{j(j-1)}\tilde{h}(r,j) + \left(\frac{1}{2} - c\right)\left(1 - \sum_{j=s+1}^{N-1} \frac{s}{j(j-1)}\right),$$

$$(7b)\qquad Th(r) = \mathbf{E}_r h(W_1) = \sum_{j=r+1}^{N-1} \frac{r}{j(j-1)}\tilde{h}(r,j) + \left(\frac{1}{2} - c\right)\left(1 - \sum_{j=r+1}^{N-1} \frac{r}{j(j-1)}\right).$$

3. Koszty decyzji w problemie najlepszego wyboru losowej wartości wybieranego obiektu

Niech $\mathrm{M}_r^N = \{\tau \in \mathrm{M}^N : r \le \tau \le N\}$ oraz $v_N(r) = \sup_{\tau \in \mathrm{M}_r^N} \mathbf{E} g_c(\tau, R_\tau, X_\tau)$. Następujący algorytm pozwala na wyznaczenie wartości rozważanego problemu optymalnego wyboru v_N. Niech

(8) $$v_N(N) = \mathbf{E} g_c(N, R_N, X_N) = \mathbf{E}(X_N) - c$$

i dla $r < N$

(9a) $$w_N(r,s) = \max\{\widetilde{h}(r,s), Tw_N(r,s)\},$$

(9b) $$v_N(r) = \max\{h(r), Tv_N(r)\}.$$

Zbiór stanów definiujący optymalną regułę zatrzymania

(10) $$\Gamma_r = \{(r,s) : h(r,s) \ge w_N(r,s),\ r < s\} \cup \{(r,N)\},$$

gdzie $r \in T$. W klasie takich zbiorów zatrzymania mamy rozwiązanie obciętego problemu. Z wykorzystaniem tych rozwiązań definiujemy optymalną regułę zatrzymania. Mamy też zależność, iż $v_N = v_N(1)$.

Lemat 3.1. *W rozważanym problemie z funkcją wypłaty* (4) *oraz $c \in [0,½)$, istnieje k_0 takie, że dla $r \ge k_0$ optymalna reguła zatrzymania τ^* w M_r^N jest postaci*

$$\tau^* = \inf\{s \ge r : Y_s = 1\} \wedge N,$$

tzn. zbiór stanów definiujący optymalną regułę zatrzymania ma postać

$$\Gamma_r = \{(r,s) : s \ge r, Y_r = 1\} \cup \{(r,N)\}.$$

Uwaga 3.2. *Załóżmy, że $s > k > k_0$. Wyznaczmy granice $\frac{k}{N} \to y$ oraz $\frac{s}{N} \to x$ przy $N \to \infty$. Otrzymujemy wówczas*

$$\underline{h}(y,x) = \lim_{\frac{k}{N}\to y,\ \frac{s}{N}\to x,\ N\to\infty} \widetilde{h}(k,s) = 1 - c\frac{1-x}{1-y},$$

$$\overline{h}(y,x) = \lim_{\frac{k}{N}\to y,\ \frac{s}{N}\to x,\ N\to\infty} Th(k,s) = 1 - \frac{x}{2} - cx - c\frac{1-x}{1-y} - \frac{xc}{1-y}\log(x).$$

Dla $c \in [0,½)$ *równanie* $\log(y)=(y-1)(1+\frac{1}{2c})$ *ma pierwiastek* $\alpha \in (0,1)$. *Jeśli* $x \geq y \geq \alpha$, *to* $\overline{h}(y,x) \leq \underline{h}(y,x)$.

Optymalną regułę zatrzymania τ^* możemy zatem opisać następująco: należy zaakceptować obiekt w chwili r, którego relatywna ranga $Y_r = 1$, chyba, że $v_N(r) > h(r)$.

Twierdzenie 3.3. *Dla każdego* $c \in [0,½)$ *istnieje* k_0 *takie, że* $\Gamma = \{r : r \geq k_0,\ Y_r = 1\} \cup \{N\}$ i $v_N = v_N(k_0 - 1)$.

Tabela 1. Optymalne strategie oraz oczekiwane optymalne wypłaty zgodnie z Twierdzeniem 3.3 i 3.4

N	Koszt decyzji					
	$c = 0$		$c = 0,1$		$c = 0,2$	
5	2	13/20 = 0,65	2	343/600 ≈ 0,571667	2	7/15 ≈ 0,46667
10	3	11/15 ≈ 0,733333	3	0,654224	4	0,566339
15	4	31/40 = 0,775	4	0,69564	5	0,608834
50	7	0,868571	8	0,785822	9	0,70274
100	10	0,905446	12	0,819826	14	0,734604
∞	0	1	[0,0251646N]	0,9	[0,0340152N]	0,8

Niech liczba obiektów N dąży do nieskończoności. Jeśli koszt $0 < c < ½$ jest dodatni, to oczekiwana wartość problemu jest mniejsza niż 1, a asymptotyczna wartość progu jest większa od 0.

Twierdzenie 3.4. *Niech* $c \in [0,½)$. *Wówczas mamy*

$$\lim_{\frac{k_0}{N}\to\alpha,\ N\to\infty} v_N = 1 - c - (c+\frac{1}{2})\alpha - \frac{c\alpha}{1-\alpha}\log(\alpha) \tag{11}$$

i α *jest jednoznacznie określone jako jedyne rozwiazanie równania* $\log(x) = (1+\frac{1}{2c})(x-1)$ *w* $(0,1)$.

4. Uwagi końcowe

Włączenie do modelu kosztu decyzji dało parametr mierzący poziom obaw selekcjonera w momencie akceptowania kandydata, iż jego decyzja jest przedwczesna. Można sobie również wyobrazić działanie decyzyjne selekcjonera, gdy jego sposób obserwacji polega na sprawdzeniu, czy analizowany obiekt ma prawdziwą wartość powyżej czy też poniżej pewnego poziomu. W tym przypadku wartość progu determinuje oczekiwaną liczbę obserwacji do chwili selekcji (patrz Porosiński i Szajowski, 2000). Taki sposób częściowej obserwacji jest łatwo stosować w praktyce i jest to naturalne zachowanie wielu handlowców. Nie akceptują oni ceny poniżej pewnego poziomu.

Chmielecka i Porosiński (2005) analizują matematyczne podobieństwo strategii optymalnych w różnych modelach decyzyjnych związanych z sekwencyjną obserwacją ciągu zmiennych losowych modelujących jakość selekcjonowanych obiektów. Temat ten jest przedmiotem zainteresowania wielu matematyków i zbieżność optymalnych strategii w różnych modelach powinna być również przedmiotem zainteresowania specjalistów od psychologicznej teorii decyzji.

W wielu rzeczywistych sytuacjach zbliżonych do rozpatrywanego modelu selekcjoner waha się zbyt długo i odkłada decyzje o akceptacji odrzucając relatywnie pierwsze obiekty. Wyglada na to, że jest pełen obaw, iż utraci bardzo dobre możliwości. Model matematyczny dla takiego decydenta mógłby bazować na wielokryterialnym podejściu jak u Gnedina (2005), Fergusona (1992), Samuelsa i Chotlosa (1986), a ostatnio u Sakaguchi'ego i Szajowskiego (2000) oraz Beardena *et al.* (2005). W modelu analizowanym przez Sakaguchi'ego i Szajowskiego (2000) jedna ze zmiennych opisujących obiekty związana jest z wartością lub rangą obiektu, druga zaś mierzy nieokreślone ryzyko decyzji odczuwane przez selekcjonera. Potrzebne jest zbadanie jak powinny być określone składowe wektora opisującego obiekty do zadania selekcji prowadzonej przez decydenta o bliżej zdefiniowanym poczuciu lęku i odpowiedzialności za podejmowane decyzje. Biorąc to pod uwagę, potrzebne są teoretyczne rozważania w celu sfomułowania rozszerzeń problemu wyboru najlepszego obiektu.

Bibliografia

Bartoszyński, R., 1974. *Reguły zatrzymywania*. Wiadom. Mat. 18, 41-53.

Bartoszyński, R., Govindarajulu, Z., 1978. *The secretary problem with interview cost.* Sankhya, Ser. B 40, 11-28.

Bearden, J.N., 2006. *A new secretary problem with rank-based selection and cardinal payoffs*. J. Math. Psychology 50, 58-59.

Bearden, J.N., Murphy, R.O., Rapoport, A., 2005. *A multi-attribute extension of the secretary problem: Theory and experiments*. J. Math. Psychology 49, 410-422.

Cayley, A., 1875. *Mathematical questions with their solutions*. The Educational Times 23, 18-19.

Chmielecka, A., Porosiński, Z., 2005. *Matematyka w ochronie zdrowia ludzkiego, czyli jak unikać stresu związanego z koniecznością podejmowania decyzji – problem najlepszego wyboru w ujęciu sekwencyjnym*, [w]: Zagadnienia interdyscyplinarne w inżynierii ochrony środowiska, I Konferencja Naukowa Doktorantów, Szklarska Poręba, 21-23.11.2005. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 58-65.

Corbin, R.M., 1980. *The secretary problem as a model of choice*. J. Math. Psychol. 21, 1-29.

Dynkin, E., Juszkiewicz, A., 1970. *Twierdzenia i problemy procesów Markowa*. Biblioteka Naukowa Inżyniera, PWN Warszawa.

Ferguson, T.S., 1992. *Best-choice problems with dependent criteria*, [w:] Ferguson, T.S., Samuels, S.M. (Eds.), Strategies for Sequential Search and Selection in Real Time, Proceedings of the AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conferences held June 21-27, 1990. Vol. 125 of Contemporary Mathematics. American Mathematica Society, Providence, Rhode Island, University of Massachusetts at Amherst, 135-151.

Gardner, M., 1960 a. *Mathematical games*. Scientific American 202 (1), 150-156.

Gardner, M., 1960 b. *Mathematical games*. Scientific American 202 (3), 172-182.

Gilbert, J., Mosteller, F., 1966. *Recognizing the maximum of a sequence*. J. Amer. Statist. Assoc. 1 (313), 35-73.

Gnedin, A., 1981. *Multicriterial problem of optimum stopping of the selection process*. Autom. Remote Control 42, 981-986.

Gusejn-Zade, S., 1966. *Zadacha vybora i optimal'noe pravilo ostanovki posledovatel'nosti nezavisimykh ispytanij*. Teor. Veroyatn. Primen. 11, 534-537. Przekład ang.: *The problem of choice and the optimal rule for a sequence of independent trials*, Theor.Probab.Appl. 11, 472-476.

Kozielecki, J., 1975. *Psychologiczna teoria decyzji*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1975.

Porosiński, Z., Szajowski, K., 2000. *Full-information best choice problem with random starting point*. Math. Jap. 52 (1), 57-63.

Resnick, S.I., 1987. *Extreme values, regular variation, and point processes*. Applied Probability, Vol. 4, New York etc.: Springer-Verlag. XII, 320 p.; DM 145.00.

Sakaguchi, M., Szajowski, K., 2000. *Mixed-type secretary problems on sequences of bivariate random variables*. Math. Jap. 51 (1), 99-111.

Samuel-Cahn, E., October 2005. *When should you stop and what do you get? Some secretary problems*. Discussion Paper 407, Deparment of Statistics, The Hebrew University of Jerusalem, Jerusalem 91905, Israel; http://ratio.huji.ac.il/dp/dp407.pdf

Samuels, S.M., Chotlos, B., 1986. *A multiple criteria optimal selection problem*, [w:] Ryzin, J.V. (Ed.), Adaptive statistical procedures and related topics. Proceedings of the Symposium on Adaptive Statistical Procedures and Related Topics, held at Brookhaven National Laboratory, czerwiec 1985. Nr 8 w IMS Lect. Notes Monogr. Ser. Institute of Mathematical Statistics, Beachwood, OH 44122, U.S.A., 62-78.

Seale, D., Rapoport, A., 1997. *Sequential decision making with relative ranks: An experimental nvestigation of the "secretary problem"*. Organizational Behaviour and Human Decision Processes 69, 221-236.

Seale, D., Rapoport, A., 2000. *Optimal stopping behavior with relative ranks: The secretary problem with unknown population size*. J. Behavioral Decision Making 13, 391-411.

Smith, M., Deely, J., 1975. *A secretary problem with finite memory*. J. Amer. Stat. Assoc. 70, 357-361.

Suchwałko, A., Szajowski, K., 2002. *Non standard, no information secretary problems*. Sci. Math. Japonicae 56, 443-456.

Szajowski, K., 1982. *Optymalny wybór obiektu o a-tej randze*. Matem. Stos. 19, 51-65.

Szajowski, K., kwiecień 2006. *A rank-based selection with cardinal payoffs and a cost of choice*. Preprint I-18/2006, Instytut Matematyki i Informatyki, Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław; http://neyman.im.pwr.wroc.pl/~szajow/publ2002/pdf/RankStop06.pdf

Yang, M., 1974. *Recognizing the maximum of a random sequence based on the relative rank with the backward solicitation*. J. Appl. Prob. 11, 504-512.

Yeo, G.F., 1998. *Interview costs in the secretary problem*. Aust. N.Z.J. Stat. 40 (2), 215-219.