

ESTYMACJA RYZYKA RYNKOWEGO W OPARCIU O MODELE GARCH I TEORIĘ WARTOŚCI EKSTREMALNYCH*

BARTOSZ SPAŁEK

42-200 Częstochowa, ul. Wierzbowa 24/13

e-mail: bartosz.spalek@gmail.com

Praca była przedstawiona przez autora 9 lipca 2010 r. na sesji Współczesna ekonometria w badaniach empirycznych młodych ekonomistów, którą zorganizowały: Komisja Nauk Ekonomicznych Polskiej Akademii Umiejętności, Komisja Nauk Ekonomicznych i Statystyki Oddziału PAN w Krakowie, Katedra Ekonometrii i Badań Operacyjnych Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie.

ABSTRACT

B. Spalek. *Estimation of market risk based on GARCH models and extreme value theory*. Folia Oeconomica Cracoviensia 2010, 51: 75–96.

This paper discusses estimation of two measures of market risk: Value at Risk and Expected Shortfall. Presented here approach is based on the use of GARCH models and extreme value theory. GARCH models with different innovation distributions were used to estimate the current volatility, while extreme value theory was used to model the tail of the innovation distribution of the GARCH model. This approach enabled to estimate separately the volatility of the financial market and the tails of the log return distribution, which led up to more precise estimation of heaviness of the tails. Backtesting enabled to compare the results of the proposed method with other standard approaches used in market risk estimation. Analysis was conducted for log returns of WIG20 index from 9 years period.

KEY WORDS — SŁOWA KLUCZOWE

value at risk, expected shortfall, POT method

wartość zagrożona, oczekiwany niedobór, metoda POT

* Oparto na pracy magisterskiej autora przygotowanej w Katedrze Ekonometrii i Badań Operacyjnych Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie pod kierunkiem J. Osiewalskiego.

1. WSTĘP

Zarządzanie ryzykiem finansowym jest subdziedziną, w której w ostatnich latach nastąpił bardzo dynamiczny rozwój. Najważniejszym etapem zarządzania ryzykiem jest jego pomiar. W tym zakresie zaproponowanych zostało wiele metod, a duża część z nich znalazła swoje zastosowanie w praktyce. Odpowiednie oszacowanie ryzyka jest kluczowym elementem zarządzania ryzykiem, ponieważ pozwala kierownictwu podmiotu gospodarczego zobrazować rozmiar możliwych, przyszłych strat, a także zbudować odpowiedni portfel inwestycyjny. Wiele instytucji finansowych do pomiaru ryzyka jest zobowiązanych ze względu na istniejące przepisy i regulacje prawne.

Niniejsza praca dotyczy estymacji ryzyka rynkowego z wykorzystaniem modeli GARCH i teorii wartości ekstremalnych. Ryzyko rynkowe jest jednym z rodzajów ryzyka finansowego, które wynika ze zmian cen na rynkach finansowych. Jego pomiar opiera się na dwóch najczęściej stosowanych miarach w praktyce: wartości zagrożonej (*Value at Risk*) oraz oczekiwanym niedoborze (*Expected Shortfall*). Teoria wartości ekstremalnych jest dziedziną statystyki, która w tym przypadku może pozwolić na lepsze modelowanie danych finansowych leżących w ogonach rozkładu empirycznego.

Celem pracy jest porównanie metod estymacji ryzyka z wykorzystaniem teorii wartości ekstremalnych, zastosowanych bezpośrednio do danych lub łącznie z ekonometrycznym modelem zmienności. Jak wykazują badania empiryczne finansowe szeregi czasowe nie spełniają założenia o niezależności obserwacji. Założenie to jest wymagane w przypadku stosowania metod wywodzących się z teorii wartości ekstremalnych. Podstawową kwestią jest sprawdzenie czy podejście, w którym założenie to jest ewidentnie niespełnione może przynieść satysfakcjonujące rezultaty. Dodatkowo, ważnym aspektem jest sprawdzenie jak metody bazujące na teorii wartości ekstremalnych wypadają na tle innych standardowych metod stosowanych w praktyce.

Empiryczna analiza ryzyka jest przeprowadzana dla logarytmicznych stóp zwrotu kursu zamknięcia indeksu WIG20. Badany okres obejmuje 9-letni szereg czasowy od 4 grudnia 2000 roku do 1 grudnia 2009 roku i zawiera 2257 obserwacji.

Estymacja ryzyka oparta na teorii wartości ekstremalnych zyskała dużą popularność pod koniec lat 90. ubiegłego wieku. We wszystkich jednak pracach zagadnienie to było rozpatrywane bez modelowania zmienności. Podejście łączące teorię wartości ekstremalnych i ekonometryczne modele zmienności zaproponowane zostało po raz pierwszy w pracy McNeila i Freya (2000). Od tego czasu podejście to stało się popularne i było często wykorzystywane w analizie ryzyka, zwłaszcza dla nowych rynków finansowych, które charakteryzowały się dużą zmiennością i występowaniem bardzo dużych spadków wartości (Kuester i in. 2006, Maghyreh i in. 2008). Podejście to zastosowano również do modelowania zmian cen energii elektrycznej (Bystrom 2005).

2. POMIAR RYZYKA

Miarą ryzyka rynkowego, która w praktyce zyskała ogromną popularność w ostatnich kilkunastu latach, jest wartość zagrożona (*Value at Risk*). Jest to taka strata, której prawdopodobieństwo osiągnięcia lub przekroczenia w zadanym okresie jest równe zadanemu poziomowi tolerancji (Jajuga i in. 2007).

Wartość zagrożoną można zapisać w postaci następującego wzoru:

$$P(W \leq W_0 - VaR) = \alpha, \quad (1)$$

gdzie:

W — wartość rynkowa na koniec rozpatrywanego okresu;

W_0 — obecna wartość rynkowa;

VaR — wartość zagrożona;

α — poziom tolerancji.

Formalnie określenie *Value at Risk* odnosi się do zmiennej ryzyka, którą jest wartość rynkowa, np. pojedynczego instrumentu finansowego, portfela instrumentów finansowych, przedsiębiorstwa. Jednak wartość zagrożoną łatwo można przedstawić w postaci zależnej od kwantyla rozkładu stóp zwrotu.

Wartość zagrożona związana jest z kwantylem rzędu α rozkładu wartości rynkowej (oznaczonym poniżej jako W_α) równaniem:

$$W_\alpha = W_0 - VaR. \quad (2)$$

Z kolei kwantyl rzędu α rozkładu logarytmicznych stóp zwrotu (x_α) zapisuje się następująco:

$$x_\alpha = 100(\ln W_\alpha - \ln W_0). \quad (3)$$

Po przekształceniach wzorów (2) i (3) otrzymujemy bezpośrednie określenie wartości zagrożonej za pomocą kwantyla rozkładu logarytmicznych stóp zwrotu:

$$VaR = W_0 \left(1 - \exp\left(\frac{1}{100} x_\alpha\right) \right). \quad (4)$$

Wyznaczenie wartości zagrożonej przy poziomie tolerancji α sprowadza się zatem do znalezienia kwantyla rzędu α rozkładu logarytmicznych stóp zwrotu, a następnie poddaniu go stosownej transformacji¹.

Główną wadą wartości zagrożonej jest fakt, że nie podaje ona informacji na temat wysokości spodziewanej straty, gdy ta przekroczy wartość zagrożo-

¹ W pracy tej policzony zostanie kwantyl logarytmicznych stóp zwrotu i jego oczekiwana warunkowa wartość przekroczenia, do której dalej odnosi się termin oczekiwany niedobór. Należy jednak pamiętać, że wartość zagrożona jest kwantylem rozkładu wartości portfela i w celu jej formalnego obliczenia należałoby użyć transformacji kwantyla analizowanych stóp zwrotu danej wzorem (4).

ną. Ta niedogodność została wyeliminowana w innej mierze ryzyka, która nosi nazwę *Expected Shortfall*, co w polskiej literaturze przedmiotu określane jest jako oczekiwany niedobór. Określona jest ona wzorem:

$$ES = E(L \mid L > VaR), \quad (5)$$

gdzie: L — wielkość straty, czyli $L = W - W_0$.

Jak wynika ze wzoru, jest to oczekiwana strata, pod warunkiem, że strata ta przekroczy wartość zagrożoną. Miara ta może być zatem traktowana jako uzupełnienie wartości zagrożonej (Jajuga i in. 2007).

Niech $(X_t, t \in Z)$ będzie procesem stochastycznym, którego realizacją jest szereg czasowy reprezentujący ujemne logarytmiczne stopy zwrotu². Zakłada się, że dynamika X_t dana jest formułą:

$$X_t = \mu_t + \sigma_t Z_t, \quad (6)$$

gdzie $\{Z_t\} \sim \text{iid}(0,1)$ o brzegowym rozkładzie $F_Z(\cdot)$. Zakłada się, że warunkowa średnia μ_t i warunkowa zmienność σ_t są mierzalne względem G_{t-1} , czyli względem historii procesu $\{X_t\}$ do dnia $t-1$.

Niniejsza praca zajmować się będzie kwantylem i oczekiwanym niedoborem dla jednokrokowych predykcji rozkładu logarytmicznych stóp zwrotu. Ponieważ:

$$F_{X_{t+1}|G_t}(x) = P\{\sigma_{t+1}Z_{t+1} + \mu_{t+1} \leq x \mid G_t\} = F_Z((x - \mu_{t+1})/\sigma_{t+1}), \quad (7)$$

więc miary X_q^t i S_q^t te upraszczają się do:

$$X_q^t = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1}z_q, \quad (8)$$

$$S_q^t = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1}E[Z \mid Z > z_q]. \quad (9)$$

gdzie X_q^t jest kwantylem logarytmicznych stóp zwrotu, S_q^t oczekiwanym niedoborem, a z_q jest q -tym kwantylem brzegowego rozkładu zmiennej Z_t .

W celu estymacji tych miar należy wybrać konkretny proces do modelowania dynamiki warunkowej średniej i zmienności. W tej pracy wykorzystano oszczędny, ale efektywny proces AR(1)-GARCH(1,1), który opisuje się równaniami:

$$X_t = \omega_0 + \omega_1 X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (10)$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t Z_t, \quad (11)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \delta_1 \sigma_{t-1}^2, \quad (12)$$

gdzie $\{Z_t\} \sim \text{iid}(0,1)$, $\alpha_0 > 0$ i $\alpha_1 \geq 0$ oraz $\delta_1 \geq 0$.

² Przez ujemne logarytmiczne stopy zwrotu rozumie się tu stopy przemnożone przez -1 . W przypadku miar ryzyka rynkowego interesujące są duże spadki wartości, które reprezentowane są przez lewy ogon rozkładu. Zmiana znaku stóp zwrotu spowoduje, że analiza będzie wykonywana dla prawego ogona, a straty będą wartościami dodatnimi.

Do estymacji parametrów przedstawionego modelu stosuje się metodę największej wiarygodności.

3. ROZKŁADY BŁĘDU W MODELACH GARCH

Przy założeniu, że zmienne losowe Z_t mają rozkład normalny kwantyl innowacji Z_t równy jest $\Phi^{-1}(q)$, gdzie $\Phi(z)$ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego. Z kolei oczekiwany niedobór, w tym przypadku wylicza się za pomocą formuły:

$$S_q^t = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} \frac{\phi(\Phi^{-1}(q))}{1-q}, \quad (13)$$

gdzie $\phi(z)$ jest funkcją gęstości standardowego rozkładu normalnego.

Badania empiryczne wskazują, że normalność rozkładów zakładana w modelach GARCH nie jest wystarczająca do opisu tzw. grubych ogonów. W celu lepszego dopasowania modeli jednym z najczęściej stosowanych, jako alternatywny rozkład zmiennej Z_t , jest standaryzowany rozkład t -Studenta z liczbą stopni swobody ν ($\nu > 2$). Jest to rozkład symetryczny o zerowej wartości oczekiwanej i jednostkowej wariancji. Jego funkcja gęstości jest postaci:

$$g(z) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\pi(\nu-2)}\Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{z^2}{\nu-2}\right)^{-\frac{(\nu+1)}{2}}, \quad (14)$$

gdzie Γ jest funkcją gamma.

W tym przypadku oczekiwany niedobór liczony jest jako:

$$S_q^t = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} \frac{g(t^{-1}(q))}{1-q} \left(\frac{\nu + (t^{-1}(q))^2}{\nu-1} \right), \quad (15)$$

gdzie t jest dystrybuantą standaryzowanego rozkładu t -Studenta.

Liczba stopni swobody jest dodatkowym parametrem szacowanym łącznie z innymi parametrami modelu GARCH.

Empiryczne rozkłady danych finansowych, oprócz własności grubych ogonów, charakteryzują się często skośnością. W celu wychwycenia tego zjawiska, stosuje się skośny rozkład t -Studenta. Skośny, ale niestandaryzowany rozkład t -Studenta zastosowali po raz pierwszy w modelu GARCH Osiewalski i Pipień (1999). Przy założeniu, że $\nu > 2$ oraz $\gamma > 0$, mówimy, że zmienna Z_t ma standaryzowany skośny rozkład t -Studenta z liczbą stopni swobody ν i współczynnikiem asymetrii γ , $Z_t \sim \text{SKST}(0, 1, \gamma, \nu)$, jeśli jego gęstość wyraża się wzorem:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{2}{\gamma + \gamma^{-1}} \operatorname{sg}(\gamma(sz + m)), & z < -\frac{m}{s} \\ \frac{2}{\gamma + \gamma^{-1}} \operatorname{sg}((sz + m)/\gamma), & z \geq -\frac{m}{s} \end{cases}, \quad (16)$$

gdzie g jest gęstością standaryzowanego rozkładu t -Studenta z ν stopniami swobody, określoną wzorem (14), a:

$$m = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)\sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}(\gamma - \gamma^{-1}), \quad (17)$$

$$s = \sqrt{\gamma^2 + \gamma^{-2} - 1 - m^2}. \quad (18)$$

Zakładając q na tyle duże, że ogon standaryzowanego skośnego rozkładu t -Studenta znajduje się będzie na prawo od modalnej, do przybliżonej estymacji oczekiwanego niedoboru można zastosować wzór dla przypadku symetrycznego rozkładu t -Studenta, odpowiednio przeskalowany współczynnikiem asymetrii γ .

$$S'_q = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} \gamma \frac{g(t^{-1}(q))}{1-q} \left(\frac{\nu + (t^{-1}(q))^2}{\nu-1} \right). \quad (19)$$

4. TEORIA WARTOŚCI EKSTREMALNYCH

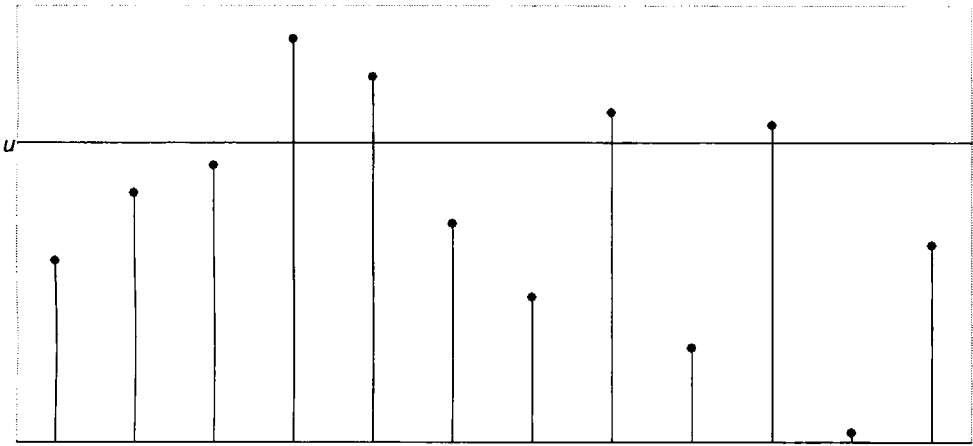
W niniejszej pracy zostanie wykorzystana również teoria wartości ekstremalnych. Jako wartości ekstremalne uważać się będzie te realizacje zmiennej losowej, które przekraczają pewną ustaloną, wysoką wartość (próg). W tym podejściu nie ma obawy, że do estymacji parametrów rozkładu wykorzystywane będą niskie wartości zmiennej losowej (Gilli i Këllezi 2006).

Dystrybuanta wartości przekraczających pewien ustalony próg rozpatrywana jest w metodzie POT (*Peak ove Threshold*). Problem ten zilustrowany jest na rycinie 2 — przedstawiona jest dystrybuanta F zmiennej losowej X .

Poszukiwana jest postać dystrybuanty F_u , która zwana jest dystrybuantą warunkowego przekroczenia. Można ją zdefiniować następująco:

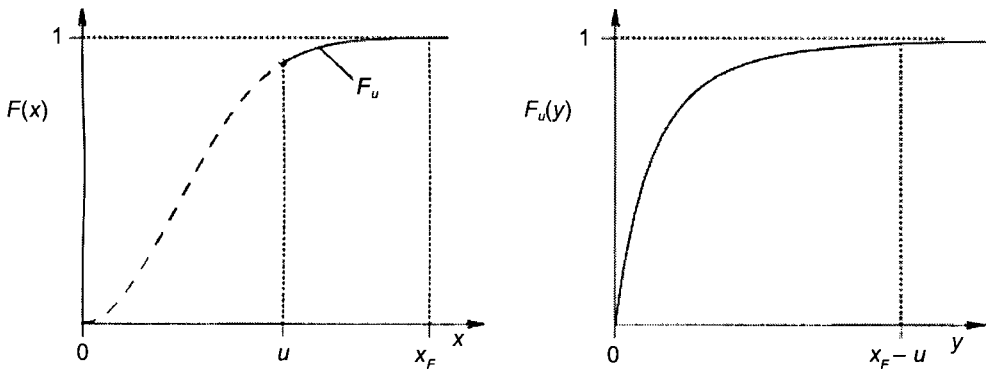
$$F_u(y) = P(X - u \leq y | X > u), \quad 0 \leq y \leq x_F - u \quad (20)$$

gdzie: $x_F = \max\{x: F(x) < 1\}$, u jest ustalonym progiem, a $y = x - u$ nadwyżkami nad progiem.



Źródło: opracowanie własne.

Ryc. 1. Wartości ekstremalne, jako wartości przekraczające ustalony próg



Źródło: Gilli i Kellezi 2006.

Ryc. 2. Dystrybuanta F i dystrybuantą warunkowego przekroczenia F_u

Realizacje zmiennej losowej X leżą przeważnie pomiędzy 0, a wartością progu u , stąd estymacja funkcji $F_u(y)$ może być trudna ze względu na niewielką liczbę obserwacji. Na tym etapie teoria wartości ekstremalnych okazuje się bardzo użyteczna, jako że dostarcza twierdzenia opisującego asymptotyczne zachowanie dystrybuanty $F_u(y)$.

Twierdzenie 1. [Pickands (1975), Balkema i de Haan (1974)]. Dla dużej rodziny rozkładów, warunkowa dystrybuanta przekroczenia dla dużych wartości progu u jest dobrze aproksymowana przez uogólniony rozkład Pareto (*Generalized Pareto Distribution — GPD*):

$$F_u(y) \approx G_{\xi, \beta}(y), \quad u \rightarrow x_F, \quad (21)$$

gdzie:

$$G_{\xi, \beta}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi}{\beta} y\right)^{-1/\xi} & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{y}{\beta}\right) & \xi = 0 \end{cases}, \quad (22)$$

dla $y \in [0, (e_F - u)]$ w przypadku $\xi \geq 0$ oraz $y \in [0, -\frac{\beta}{\xi}]$ w przypadku $\xi < 0$.

W praktyce problem stanowi wybór wartości prógu. Wraz ze wzrostem progu maleje liczba obserwacji użytych do estymacji modelu, a tym samym rośnie wariancja estymatorów. Z kolei próg wybrany zbyt nisko powoduje obciążenie estymacji ze względu na wykorzystanie obserwacji pochodzących z środka rozkładu (Śmiech 2002).

Zakładając funkcję GPD dla ogonów rozkładu, wartość zagrożona i oczekiwany niedobór mogą być wyrażone za pomocą parametrów uogólnionego rozkładu Pareto.

W niniejszej pracy liczba obserwacji w ogonie będzie ustalona z góry $N_u = k$. W konsekwencji próg będzie zmienną losową — równy $(k+1)$ -szej reszcie. Niech $z_{(1)} \geq z_{(2)} \geq \dots \geq z_{(n)}$ będą uszeregowanymi resztami, liczonymi jako:

$$(z_{t-n+1}, \dots, z_t) = \left(\frac{X_{t-n+1} - \hat{\mu}_{t-n+1}}{\hat{\sigma}_{t-n+1}}, \dots, \frac{X_t - \hat{\mu}_t}{\hat{\sigma}_t} \right). \quad (23)$$

Uogólniony rozkład Pareto z parametrami ξ i β będzie dopasowywany do nadwyżek nad progiem z reszt przekraczających próg, czyli do szeregu: $(z_{(1)} - z_{(k+1)}, \dots, z_{(k)} - z_{(k+1)})$.

Kwantyl innowacji, który potrzebny jest do szacowania kwantyla rozkładu stóp zwrotu, wyraża się wzorem:

$$\hat{z}_q = z_{(k+1)} + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left(\left(\frac{1-q}{k/n} \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right). \quad (24)$$

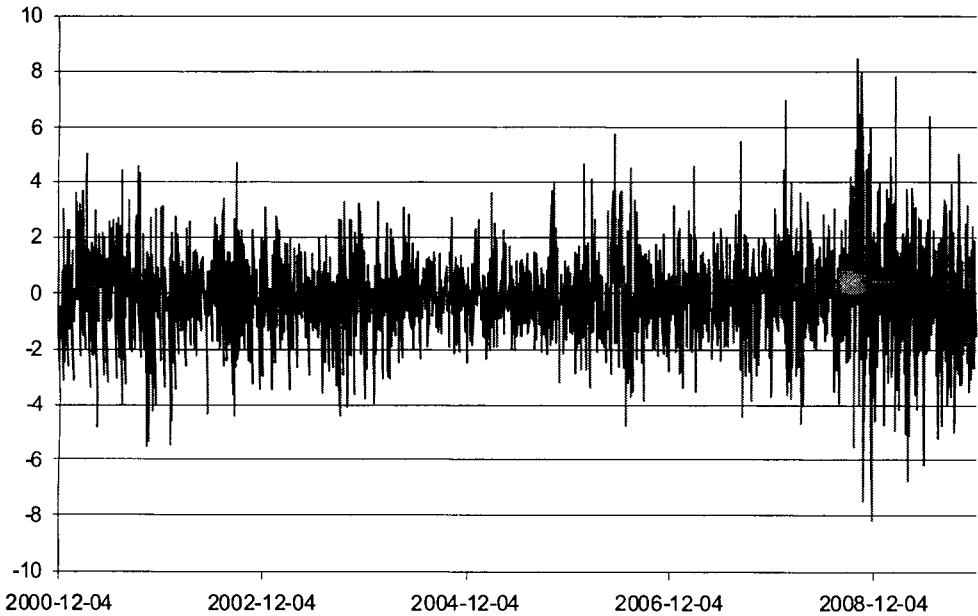
Natomiast oczekiwany niedobór wynosi:

$$\hat{S}_q^t = \hat{\mu}_{t+1} + \hat{\sigma}_{t+1} \hat{z}_q \left(\frac{1}{1-\hat{\xi}} + \frac{\hat{\beta} - \hat{\xi} z_{(k+1)}}{(1-\hat{\xi}) \hat{\xi}_q} \right). \quad (25)$$

5. WYNIKI BADAŃ EMPIRYCZNYCH

Analiza została przeprowadzona dla ujemnych, dziennych logarytmicznych stóp zwrotu pochodzących z kursów zamknięcia indeksu warszawskiej giełdy WIG20. Badany okres obejmował obserwacje od 4 grudnia 2000 roku do 1 grudnia 2009 roku i zawierał 2257 stóp zwrotu.

Na rycinie 3 zostały przedstawione ujemne logarytmiczne stopy zwrotu, liczone jako $X_t = -100 \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$, gdzie P_t oznacza wartość indeksu w chwili t . Analizując poniższy wykres zauważyć można, że stopy zwrotu mają tendencję do skupiania się w wąskich pasmach czasu. Co więcej, widać, że w badanym szeregu czasowym występują podokresy o różnej wielkości zmienności. Największą zmienność zaobserwowano pod koniec 2008 roku, kiedy to indeks WIG20 zaczął bardzo tracić na wartości.



Źródło: opracowanie własne.

Ryc. 3. Wartości ujemnych logarytmicznych stóp zwrotu

W tabeli 1 zostały przedstawione podstawowe charakterystyki opisowe dla analizowanych stóp zwrotu. Średnia zbliżona do zera, prawostronna asymetria i kurtoza większa niż w przypadku rozkładu normalnego są zgodne z empirycznymi własnościami danych finansowych. Porównanie wartości pierw-

Tabela 1

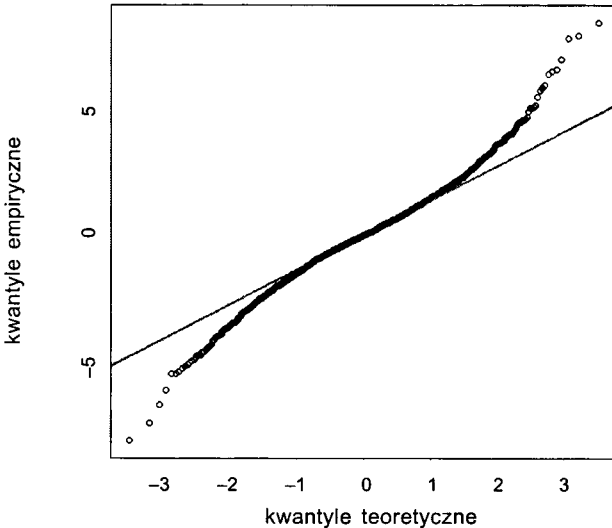
Podstawowe statystyki opisowe

| Średnia | Wariancja | Odchylenie standardowe | Asymetria | Kurtoza | Minimum | Kwartył pierwszy | Mediana | Kwartył trzeci | Maksimum |
|---------|-----------|------------------------|-----------|---------|---------|------------------|---------|----------------|----------|
| -0,0168 | 2,8398 | 1,6852 | 0,0826 | 4,9137 | -8,1548 | -0,9292 | -0,0177 | 0,9231 | 8,4428 |

Źródło: opracowanie własne.

szego i trzeciego kwartyła z wartościami minimalnymi i maksymalnymi wskazuje na występowanie grubych ogonów i leptokurtyczny charakter rozkładu.

Rycina 4 przedstawiający wykres kwantyl-kwantyl ujemnych logarytmicznych stóp zwrotu potwierdza ten wniosek. Na osi poziomej umieszczone zostały kwantyle standardowego rozkładu normalnego. Odchylenie od prostej świadczy o cięższych ogonach niż ogony rozkładu normalnego.



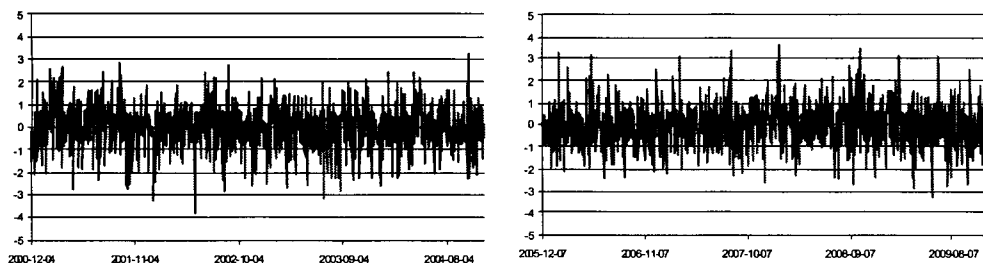
Źródło: opracowanie własne.

Ryc. 4. Wykres kwantyl-kwantyl ujemnych logarytmicznych stóp zwrotu

Założono, że ujemne logarytmiczne stopy zwrotu są realizacją procesu AR(1)-GARCH(1,1) o jednym z trzech rozpatrywanych rozkładów warunkowych: standardowym rozkładzie normalnym, standaryzowanym rozkładzie t -Studenta oraz standaryzowanym skośnym rozkładzie t -Studenta.

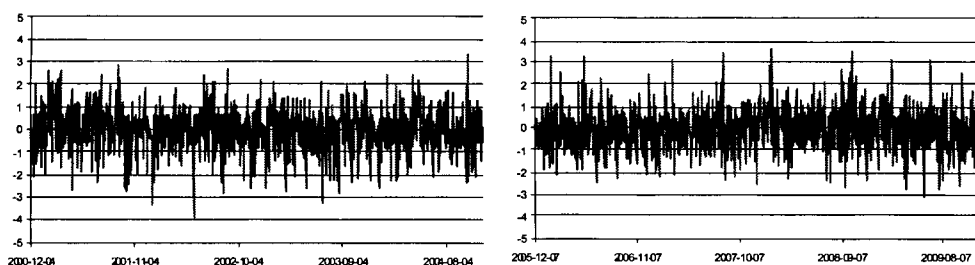
W celu nieformalnej oceny dopasowania modelu AR-GARCH sprawdzono czy standaryzowane reszty są generowane przez ciąg niezależnych zmiennych losowych o założonym w modelu rozkładzie. Analiza była przeprowadzona zarówno dla całego badanego okresu, jak i dla dwóch podokresów. Pierwszy podokres zawierał 1000 pierwszych obserwacji, natomiast drugi — 1000 ostatnich. Każde 1000 obserwacji to około 4 lata badanego szeregu.

Ryciny 5–7 przedstawiają standaryzowane reszty uzyskane w modelu o różnych rozkładach błędu. Założenie odmiennych rozkładów nie wpływa zasadniczo na wielkość analizowanych reszt i co do wartości nie różnią się one znacząco. Porównując te wykresy z ryciną 3, przedstawiającą ujemne logarytmiczne stopy zwrotu, można zauważyć, że założenie iid jest bardziej prawdopodobne dla standaryzowanych reszt.



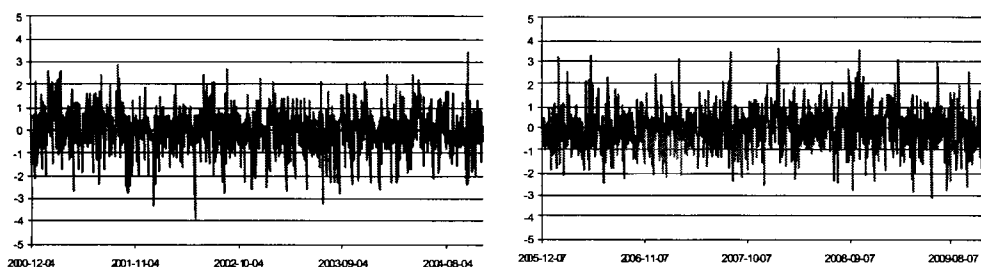
Źródło: opracowanie własne.

Ryc. 5. Standaryzowane reszty z modelu AR(1)-GARCH(1,1) o warunkowym rozkładzie normalnym dla pierwszego i drugiego okresu



Źródło: opracowanie własne.

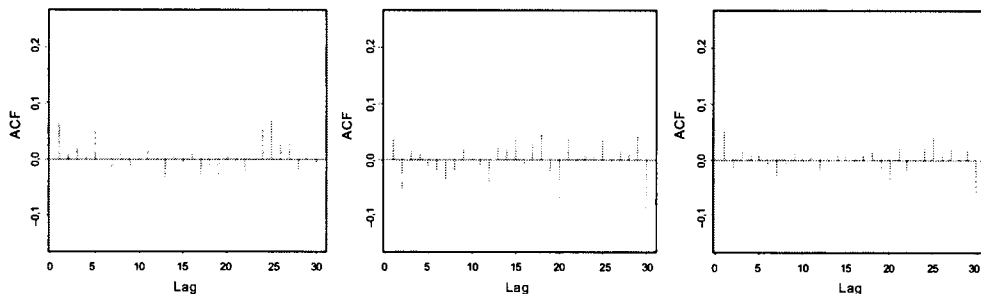
Ryc. 6. Standaryzowane reszty z modelu AR(1)-GARCH(1,1) o warunkowym rozkładzie t -Studenta dla pierwszego i drugiego okresu



Źródło: opracowanie własne.

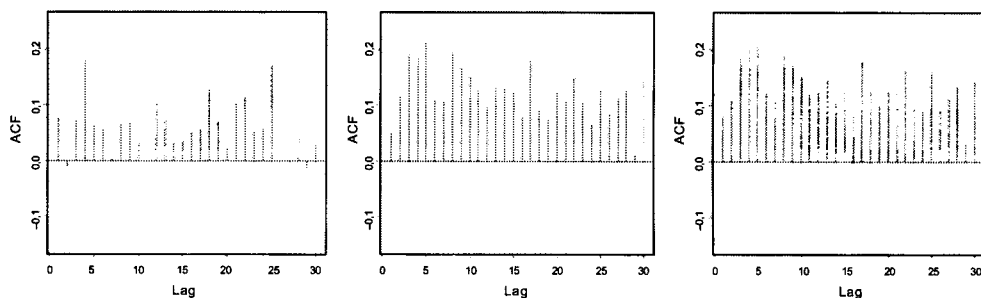
Ryc. 7. Standaryzowane reszty z modelu AR(1)-GARCH(1,1) o warunkowym skośnym rozkładzie t -Studenta dla pierwszego i drugiego okresu

Na kolejnych wykresach przedstawiono korelogramy dla stóp zwrotu oraz ich kwadratów, a także dla standaryzowanych reszt i ich kwadratów. Podczas, gdy stopy zwrotu na pewno nie są generowane przez ciąg niezależnych zmiennych losowych o założonym w modelu rozkładzie, to w przypadku standaryzowanych reszt założenie to wydaje się prawdziwe.



Źródło: opracowanie własne.

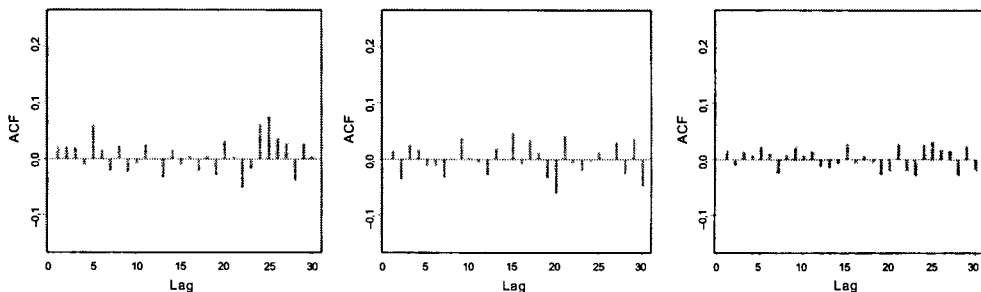
Ryc. 8. Korelogramy stóp zwrotu kolejno dla pierwszego, drugiego i całego okresu



Źródło: opracowanie własne.

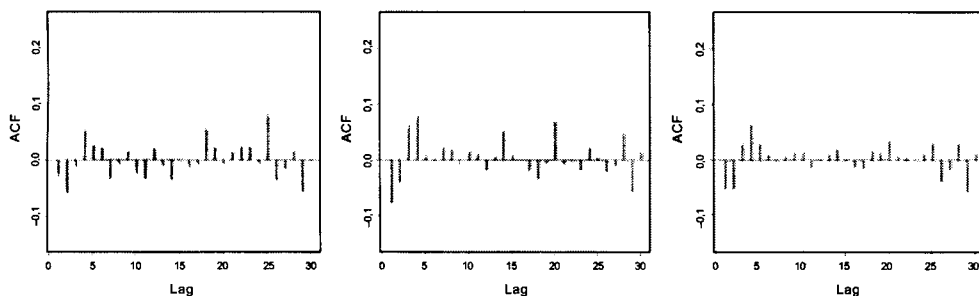
Ryc. 9. Korelogramy kwadratów stóp zwrotu kolejno dla pierwszego, drugiego i całego okresu

Na następnych korelogramach przy każdym opóźnieniu przedstawione są wartości dla reszt uzyskanych kolejno przy założeniu warunkowego rozkładu normalnego, rozkładu t -Studenta i skośnego rozkładu t -Studenta.



Źródło: opracowanie własne.

Ryc. 10. Korelogramy standaryzowanych reszt kolejno dla pierwszego, drugiego i całego okresu



Źródło: opracowanie własne.

Ryc. 11. Korelogramy kwadratów standaryzowanych reszt kolejno dla pierwszego, drugiego i całego okresu

Tabela 2 przedstawia wartości statystyki testowej Ljung-Boxa oraz *p-value* dla stóp zwrotu, ich kwadratów, standaryzowanych reszt uzyskanych, przy założeniu różnych rozkładów błędu oraz ich kwadratów.

Tabela 2

Wartości statystyki i *p-value* testu Ljung-Boxa

| | Statystyka testowa | | | <i>p-value</i> | | |
|--|--------------------|----------|-----------|----------------|----------|----------|
| | I okres | II okres | całość | I okres | II okres | całość |
| Stopy | 29,9717 | 37,1051 | 39,7032 | 0,4671 | 0,1741 | 0,1107 |
| Kwadraty stóp | 172,3366 | 520,1130 | 1307,6110 | <2,2e-16 | <2,2e-16 | <2,2e-16 |
| Reszty w modelu o warunkowym rozkładzie normalnym | 28,1347 | 23,1294 | 24,9442 | 0,5633 | 0,8099 | 0,7277 |
| Kwadraty reszt w modelu o warunkowym rozkładzie normalnym | 32,8118 | 35,4433 | 48,8865 | 0,3308 | 0,2269 | 0,01614 |
| Reszty w modelu o warunkowym rozkładzie <i>t</i> -Studenta | 29,1322 | 23,1926 | 25,2144 | 0,5107 | 0,8073 | 0,7145 |
| Kwadraty reszt w modelu o warunkowym rozkładzie <i>t</i> -Studenta | 31,0055 | 35,934 | 49,9007 | 0,4151 | 0,2102 | 0,0127 |
| Reszty w modelu o warunkowym skośnym rozkładzie <i>t</i> -Studenta | 28,8225 | 23,2025 | 25,1118 | 0,5269 | 0,8068 | 0,7196 |
| Kwadraty reszt w modelu o warunkowym skośnym rozkładzie <i>t</i> -Studenta | 31,0532 | 35,9929 | 49,6384 | 0,4128 | 0,2083 | 0,01352 |

Źródło: opracowanie własne.

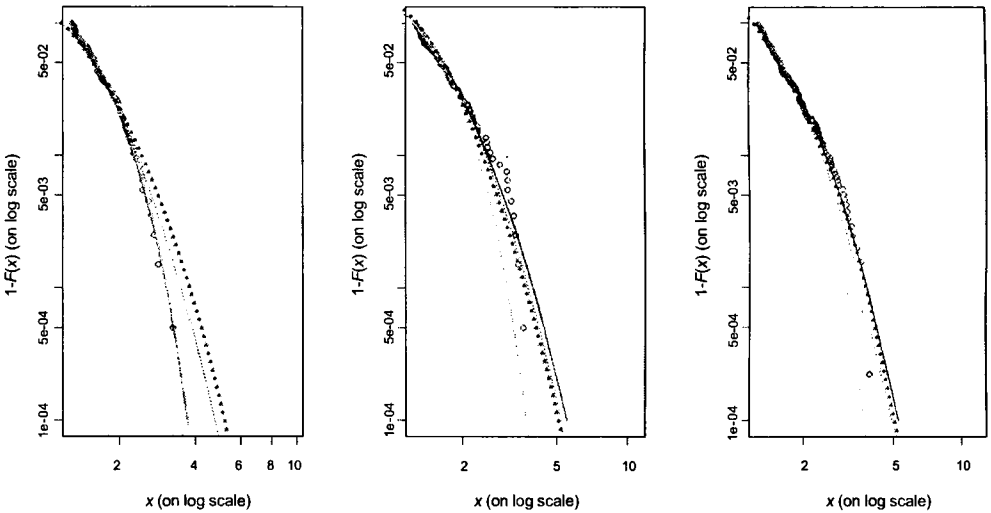
Analizując powyższą tabelę należy stwierdzić, że założenie o niezależności badanych stóp zwrotu jest fałszywe, o czym świadczą zerowe *p-value* dla kwadratów stóp dla każdego z okresów. Z kolei co do standaryzowanych reszt założenie to można uznać za prawdziwe. Największe wartości *p-value* uzyskuje się dla reszt pochodzących z modelu o warunkowym rozkładzie normalnym, a niewiele mniejsze dla reszt pochodzących z modelu o założeniu rozkładu *t*-Studenta i skośnego *t*-Studenta.

Na rycinach 12–14 przedstawione są estymatory GPD prawego ogona, liczone jako:

$$\hat{F}_z(z) = 1 - \frac{k}{n} \left(1 + \frac{\hat{\xi}}{\beta} (z - z_{(k+1)}) \right)^{-1/\hat{\xi}}, \quad (26)$$

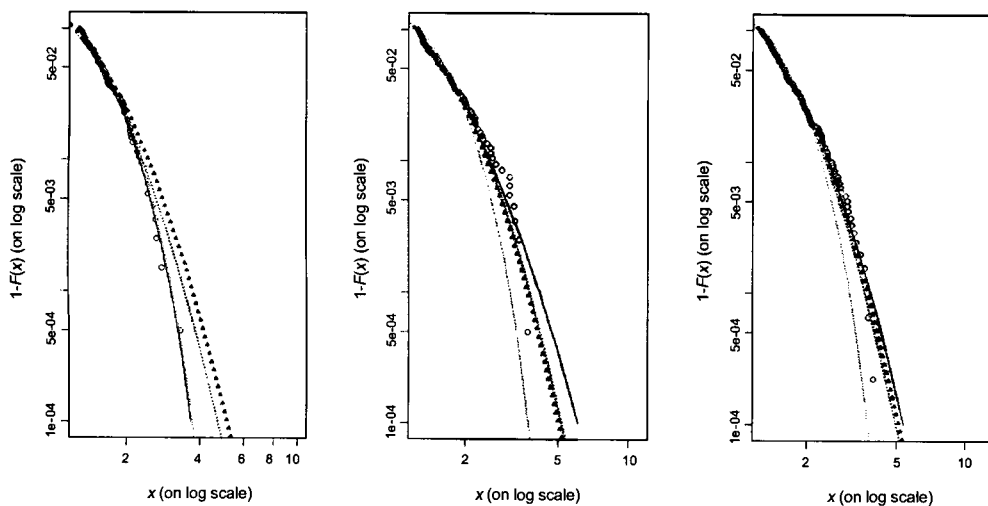
które zaznaczone są liniami czarnymi. Punkty pokazują rozkład empiryczny, natomiast szara linia oznacza ogon rozkładu normalnego, linia z trójkątami ogon rozkładu *t*-Studenta, a linia przerywana ogon skośnego rozkładu *t*-Studenta. Przy rozkładach *t*-Studenta przyjęto liczbę stopni swobody i wartość parametru skośności na tym samym poziomie co w odpowiednim rozkładzie oszacowanym w modelu AR(1)-GARCH(1,1).

Przy estymacji uogólnionego rozkładu Pareto dla podokresów zawierających po 1000 obserwacji ustalano próg jako 101. resztę, natomiast w przypadku całego badanego okresu próg ustalono jako 226. resztę. Pozwoliło to



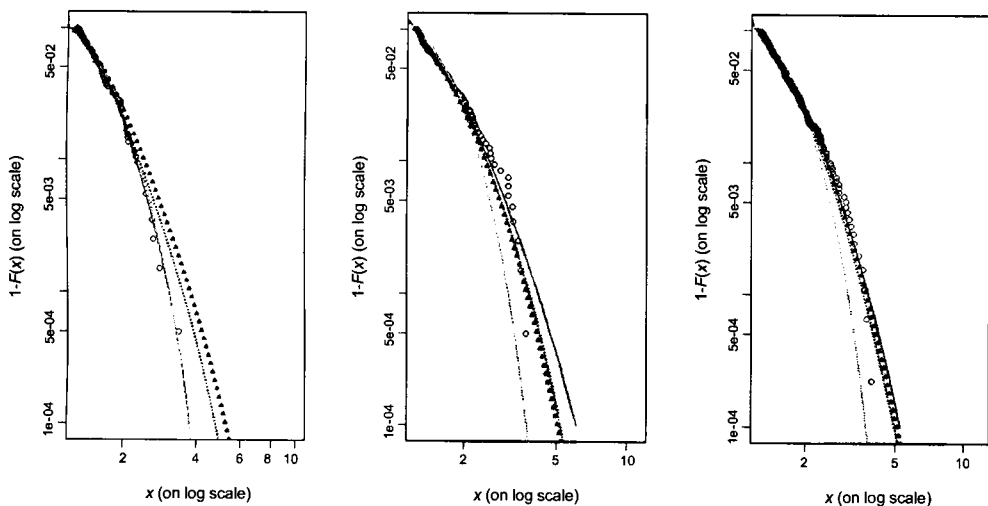
Źródło: opracowanie własne.

Ryc. 12. Oszacowanie ogona dla reszt z modelu AR(1)-GARCH(1,1) z warunkowym rozkładem normalnym kolejno dla pierwszego, drugiego i całego okresu



Źródło: opracowanie własne.

Ryc. 13. Oszacowanie ogona dla reszt z modelu AR(1)-GARCH(1,1) z warunkowym rozkładem t -Studenta kolejno dla pierwszego, drugiego i całego okresu



Źródło: opracowanie własne.

Ryc. 14. Oszacowanie ogona dla reszt z modelu AR(1)-GARCH(1,1) z warunkowym skośnym rozkładem t -Studenta kolejno dla pierwszego, drugiego i całego okresu

na oszacowanie kwantyli rzędu większego niż 0,9 z wykorzystaniem modelu GPD³.

Jak można zauważyć wykres ogona uogólnionego rozkładu Pareto pokrywa się z rozkładem empiryczny, co świadczy o tym, że rozkład ten sprawdza się dobrze w modelowaniu standaryzowanych reszt. Rozkład normalny w pierwszym okresie również dobrze opisuje analizowane reszty. Jednak, rozpatrując drugi lub cały badany okres, duże wartości reszt są niedoszacowane. Z kolei w przypadku obu rozkładów *t*-Studenta w pierwszym okresie reszty są przeszacowane, natomiast w dwóch pozostałych opisane są dość dobrze.

Kolejnym etapem badania empirycznego jest testowanie wsteczne, do którego użyto okna prognozy zawierającego 1000 obserwacji, czyli około 4 lat. Za każdym razem próg w metodzie POT ustalany był jako 101. reszta. W każdym kroku okno przesuwano o 1 dzień do przodu, a następnie ponownie estymowano model AR(1)-GARCH(1,1).

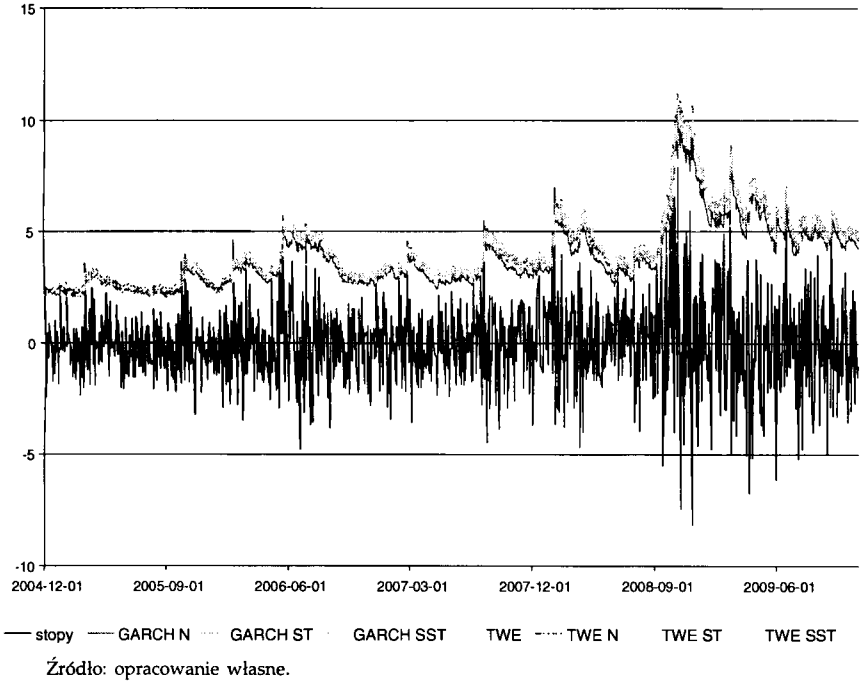
Porównanych ze sobą zostało siedem metod, które oznaczono następująco:

- GARCH N — miary ryzyka uzyskane w modelu AR(1)-GARCH(1,1) ze standardowym rozkładem normalnym;
- GARCH ST — miary ryzyka uzyskane w modelu AR(1)-GARCH(1,1) ze standaryzowanym rozkładem *t*-Studenta;
- GARCH SST — miary ryzyka uzyskane w modelu AR(1)-GARCH(1,1) ze standaryzowanym skośnym rozkładem *t*-Studenta;
- TWE — miary ryzyka uzyskane z wykorzystaniem uogólnionego rozkładu Pareto;
- TWE N — miary ryzyka uzyskane z wykorzystaniem uogólnionego rozkładu Pareto, do reszt z modelu AR(1)-GARCH(1,1) ze standardowym rozkładem normalnym;
- TWE ST — miary ryzyka uzyskane z wykorzystaniem uogólnionego rozkładu Pareto, do reszt z modelu AR(1)-GARCH(1,1) ze standaryzowanym rozkładem *t*-Studenta;
- TWE SST — miary ryzyka uzyskane z wykorzystaniem uogólnionego rozkładu Pareto, do reszt z modelu AR(1)-GARCH(1,1) ze standaryzowanym skośnym rozkładem *t*-Studenta.

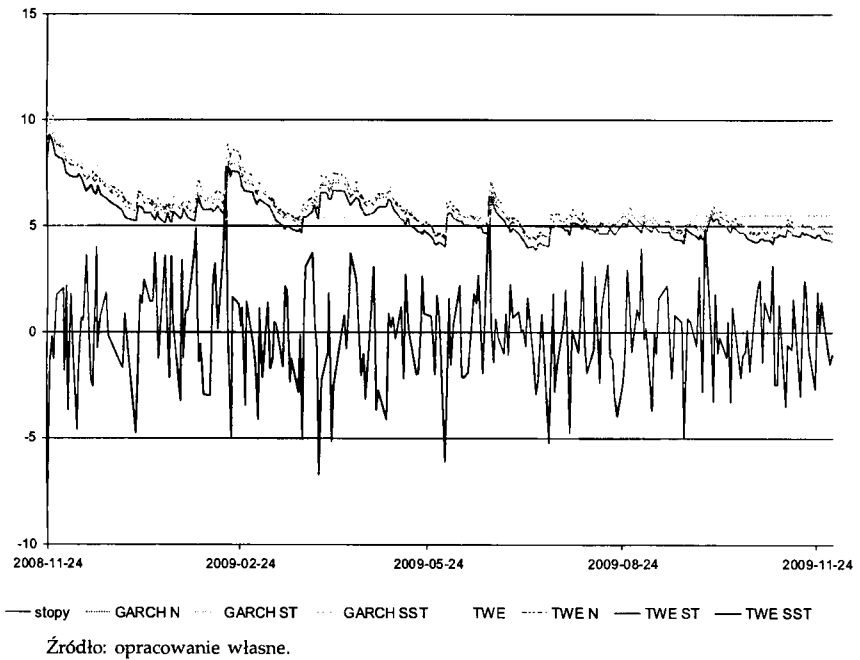
Rycina 15 przedstawia prognozy wygasłe dla kwantyla analizowanych stóp zwrotu rzędu 0,99. Na wykresie pokazano wszystkie badane metody dla całego rozpatrywanego okresu. Rycina 16 wykres jest fragmentem omawianego wykresu, na którym dokładniej widać zachowanie poszczególnych podejść.

Podejściem szacującym \hat{x}_q' , które najbardziej odróżnia się od pozostałych jest podejście oznaczone jako TWE, w którym to uogólniony rozkład Pareto jest dopasowywany bezpośrednio do stóp zwrotu. Jak widać w metodzie tej

³ Cały okres zawiera 2257 obserwacji, stąd w tym przypadku próg ustalono jako 226. resztę.



Ryc. 15. Prognozy wygasłe $\hat{x}_{0,99}^t$ dla całego badanego okresu



Ryc. 16. Fragment wykresu prognoz wygasłych $\hat{x}_{0,99}^t$

odpowieź na okresy o podwyższonej zmienności nie jest dostatecznie szybka, co skutkuje kilkoma przekroczeniami kwantyla jedno za drugim.

Drugim podejściem, które widocznie odznacza się od pozostałych jest podejście GARCH N, gdzie oszacowania kwantyla zostały uzyskane w modelu AR(1)-GARCH(1,1) ze standardowym rozkładem normalnym. W metodzie tej występuje odpowieź na grupowania się zmienności, jednak nie bierze się pod uwagę grubych ogonów reszt, a co za tym idzie, prowadzi to do większej liczby przekroczeń niż w pozostałych metodach.

Prognozy wygaśnię dla metod poza wspomnianymi wcześniej TWE oraz GARCH N na wykresach wyglądają podobnie. W celu sprawdzenia jakości metod zastosowano test Kupca oraz funkcję straty Lopeza, których to wyniki znajdują się kolejno w tabelach 3 i 4.

Tabela 3

Wyniki testu Kupca

| | Przekroczenia | | | Statystyka | | | <i>p-value</i> | | |
|--------------------|---------------|------|-------|------------|---------|---------|----------------|--------|--------|
| | 0,95 | 0,99 | 0,995 | 0,95 | 0,99 | 0,995 | 0,95 | 0,99 | 0,995 |
| GARCH N | 68 | 27 | 18 | 0,4332 | 12,5923 | 14,5595 | 0,5104 | 0,0004 | 0,0001 |
| GARCH ST | 70 | 19 | 15 | 0,8271 | 2,8721 | 8,7274 | 0,3631 | 0,0901 | 0,0031 |
| GARCH SST | 70 | 21 | 16 | 0,8271 | 4,7520 | 10,5472 | 0,3631 | 0,0293 | 0,0012 |
| TWE | 95 | 28 | 19 | 15,0674 | 14,1820 | 16,7381 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0000 |
| TWE N | 69 | 20 | 15 | 0,6148 | 3,7612 | 8,7274 | 0,4330 | 0,0525 | 0,0031 |
| TWE ST | 67 | 20 | 15 | 0,2826 | 3,7612 | 8,7274 | 0,5950 | 0,0525 | 0,0031 |
| TWE SST | 67 | 20 | 15 | 0,2826 | 3,7612 | 8,7274 | 0,5950 | 0,0525 | 0,0031 |
| Wartość oczekiwana | 63 | 13 | 6 | | | | | | |

Źródło: opracowanie własne.

W tabeli 3 przedstawiona jest liczba przekroczeń kwantyla uzyskana w poszczególnych podejściach, jak i ich oczekiwana liczba. Ponadto, znajdują się w niej wartości statystyki testowej testu Kupca i *p-value* związane z tym testem. Analiza wyników potwierdza, że podejście TWE nie daje dobrych rezultatów w szacowaniu ryzyka, gdyż liczba przekroczeń jest znacznie większa niż założono. Podobna sytuacja odnosi się do podejścia GARCH N, gdy rozważany jest kwantyl rzędu większego niż 0,95. Najlepsze wyniki w przypadku kwantyla rzędu 0,95 uzyskano stosując podejście TWE ST i TWE SST, w przypadku kwantyla rzędu 0,99 GARCH ST, a w przypadku kwantyla rzędu 0,995 GARCH ST, TWE N, TWE ST i TWE SST.

Tabela 4

Wartości funkcji straty Lopeza

| | Funkcja straty | | |
|-----------|----------------|-------------|-------------|
| | 0,95 | 0,99 | 0,995 |
| GARCH N | 0,099466928 | 0,032776728 | 0,020389575 |
| GARCH ST | 0,105084733 | 0,024017744 | 0,013233554 |
| GARCH SST | 0,104863223 | 0,024994623 | 0,013747649 |
| TWE | 0,186239099 | 0,048729235 | 0,025447276 |
| TWE N | 0,100128689 | 0,022135842 | 0,011700175 |
| TWE ST | 0,101327942 | 0,022465445 | 0,011848793 |
| TWE SST | 0,102113918 | 0,023137058 | 0,011924816 |

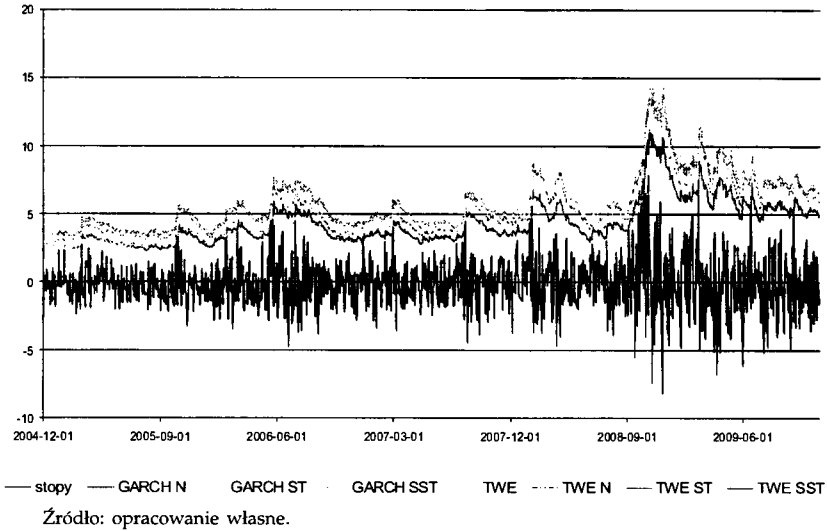
Źródło: opracowanie własne.

Dla kwantyla rzędu 0,995 niestety żadna z metod nie uzyskała satysfakcjonującego wyniku. Oczekiwana liczba przekroczeń wynosi 6, a jej najbliższym wynikiem jest 15. Kwantyl tak wysokiego rzędu jednak w praktyce jest używany bardzo rzadko.

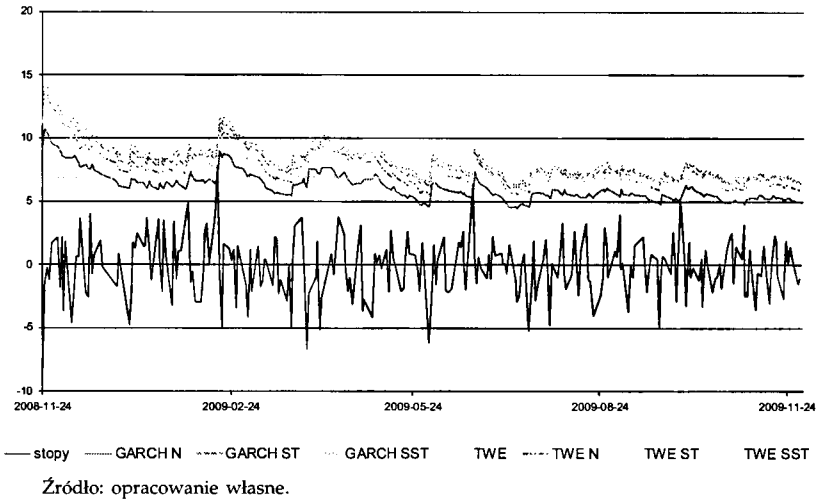
Najmniejsze wartości funkcja straty przyjmuje dla podejścia GARCH N w przypadku kwantyla 0,95 oraz dla podejścia TWE N w przypadku kwantyla rzędu 0,99 i 0,995.

Rezultaty niewiele gorsze od wspomnianych uzyskały metody TWE ST i TWE SST. Biorąc pod uwagę fakt, że wyniki testu Kupca dla tych metod są satysfakcjonujące, można uznać je za odpowiednie podejścia do modelowania wysokich kwantyli logarytmicznych stóp zwrotu.

Na rycinach 17 i 18 przedstawiono oszacowania oczekiwanego niedoboru, który może nieść dodatkową informację w stosunku do kwantyla rozkładu badanych stóp zwrotu. Przebieg podejścia GARCH N i TWE wygląda tak samo jak w przypadku analizowanego wcześniej kwantyla. Wartości w metodach TWE N, TWE ST i TWE SST są podobne i ich wykresy są zbliżone. W pierwszym okresie znacznie większe wartości przyjmują podejścia GARCH ST i GARCH SST. Jednak w okresie zwiększonej zmienności ich rezultaty są zbliżone do oszacowań uzyskanych pozostałymi metodami.



Ryc. 17. Prognozy wygasłe oczekiwane niedoboru rzędu 0,99



Ryc. 18. Fragment wykresu prognoz wygasłych oczekiwane niedoboru rzędu 0,99

6. PODSUMOWANIE

Niniejsza praca dotyczyła szacowania ryzyka rynkowego. Pomiar ryzyka opierał się głównie na teorii wartości ekstremalnych, która to pozwalała na lepsze modelowanie zdarzeń rzadkich i niosących za sobą duże konsekwencje. Celem pracy było sprawdzenie czy podejście wykorzystujące teorię wartości ekstremalnych bezpośrednio do logarytmicznych stóp zwrotu, mimo niespełnienia założenia o niezależności obserwacji, będzie dawało satysfakcjonujące resulta-

ty. Dodatkowo, podejścia wywodzące się z teorii wartości ekstremalnych (zarówno stosowane bezpośrednio do danych lub łącznie z ekonometrycznym modelem zmienności) miały być porównane ze standardowymi metodami stosowanymi przez praktyków (miary ryzyka uzyskiwane w modelu AR-GARCH ze standardowym rozkładem normalnym i standaryzowanym rozkładem t -Studenta).

Prognozy wygasłe dla kwantyla logarytmicznych stóp zwrotu świadczą o tym, że w podejściu wykorzystującym bezpośrednio uogólniony rozkład Pareto do stóp zwrotu nalicza się znacznie więcej przekroczeń niż jest to oczekiwane. W metodzie tej brak jest odpowiedzi na okresy o podwyższonej zmienności, a co za tym idzie następuje kilka przekroczeń kwantyla pod rząd. Z przeprowadzonego badania wynika, że podejście to nie daje satysfakcjonujących wyników w szacowaniu miar ryzyka, a w celu jego poprawy należało użyć dodatkowo ekonometrycznych modeli zmienności.

Jednym ze standardowych podejść, które były testowane równoległe z podejściami wykorzystującymi teorię wartości ekstremalnych, było podejście, w którym miary ryzyka były liczone z wykorzystaniem modelu AR(1)-GARCH(1,1) z warunkowym rozkładem normalnym. Jak wynika z badań empirycznych, założenie normalności nie jest wystarczające do opisu własności grubych ogonów. W tym podejściu występuje odpowiednia reakcja na okresy różnej zmienności, jednak wartości kwantyli rzędu większego niż 0,95 są niedoszacowane.

Podejście łączące teorię wartości ekstremalnych i modelowanie zmienności za pomocą modelu AR(1)-GARCH(1,1) w szacowaniu ryzyka uzyskuje zadowalające rezultaty, o czym świadczą wyniki testu Kupca i wartości funkcji straty Lopeza. Tylko kwantyl rzędu 0,995 jest lekko niedoszacowany, jednak w praktyce kwantyl tak wysokiego rzędu jest wykorzystywany bardzo rzadko.

W dalszych badaniach można wprowadzić szereg modyfikacji zaprezentowanego podejścia w celu uzyskania bardziej satysfakcjonujących wyników. Użyty w pracy model AR-GARCH można zastąpić modelem ogólniejszym, np. ARMA-APARCH, który mógłby pozwolić na lepszy opis analizowanych danych. Ponadto, oprócz rozpatrywanych rozkładów warunkowych można zastosować inne — np. rozkład GED zaproponowany przez Nelsona w 1991 roku. Co do estymacji uogólnionego rozkładu Pareto można zmodyfikować sposób wyboru prognozy. Wprowadzenie takich zmian mogłoby zaowocować w przyszłych pracach badawczych, wykorzystujących teorię wartości ekstremalnych i ekonometryczne modele zmienności, bardziej dokładnym pomiarem ryzyka.

BIBLIOGRAFIA

- Balkema A., de Haan L. 1974. *Residual life time at great age*, Annals of Probability 2, nr 5, 792–804.
 Bystrom H.N.E. 2005. *Extreme value theory and extremely large electricity price change*, International Review of Economics and Finance 14, 41–55.

- Bollerslev T., Chou R., Kroner K. 1992. *ARCH modeling in finance*, Journal of Econometrics 52, 5–59.
- Doman M., Doman R. 2009. *Modelowanie zmienności i ryzyka*, Wolters Kluwer, Kraków.
- Finkenstädt B., Rootzén H. 2003. *Extreme Values in Finance, Telecommunications, and the Environment*, Champan & Hall/CRC, Boca Raton, Florida.
- Fiszeder P. 2009. *Modele klasy GARCH w empirycznych badaniach finansowych*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika.
- Gençay R., Selçuk F. 2004. *Extreme value theory and Value-at-Risk: Relative performance in emerging markets*, International Journal of Forecasting 20, 287–303.
- Gilli M., Kellezi E. 2006. *An Application of Extreme Value Theory for Measuring Financial Risk*, Computational Economics 27, 1–23.
- Greene W.H. 2000. *Econometric Analysis*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey.
- Jajuga K. et al. 2007. *Zarządzanie ryzykiem*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Kuester K., Mittnik S., Paolella M.S. 2006. *Value-at-Risk Prediction: A Comparison of Alternative Strategies*, Journal of Financial Econometrics 1, nr 1, 53–89.
- Lopez J. 1998. *Methods for Evaluating Value-at-Risk Estimates*, Federal Reserve Bank of New York. www.frbsf.org/econsrch/econrev/99-2/3-17.pdf
- Maghyreh A.I., Al-Zoubi H.A. 2008. *The tail behavior of extreme stock returns in the Gulf emerging markets: An implication for financial risk management*, Studies in Economics and Finance 25(1), 21–37.
- McNeil A., Frey R. 2000. *Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach*, Journal of Empirical Finance 7, 271–300.
- McNeil A., Frey R., Embrechts P. 2004. *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools*, Princeton Series in Finance, Princeton, New Jersey.
- Mikosch T., Resnick S., Robinson S. 2007. *Heavy-Tail Phenomena, Probabilistic and Statistical Modeling*, Springer, New York, New York.
- Osiewalski J., Pipień M. 1999. *Bayesian forecasting of exchange rates using GARCH models with skewed t conditional distributions*, MACROMODELS'98 — Conference Proceedings, Łódź, t. 2, 195–218.
- Osiewalski J., Pajor A. 2010. *Bayesian Value-at-Risk for a portfolio: multi- and univariate approaches using MSF-SBEKK models*, maszynopis, referat wygłoszony na międzynarodowej konferencji FindEcon, Łódź..
- Osińska M. 2006. *Ekonometria finansowa*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- Pickands, J. 1975. *Statistical inference using extreme order statistics* The Annals of Statistics 3, nr 1, 119–131.
- Śmiech S. 2002. *Kilka uwag o metodach statystycznych wykorzystywanych w analizie wartości ekstremalnych*, [w:] *Przestrzenno-czasowe modelowanie i prognozowanie zjawisk gospodarczych*, red. A. Zeliaś, materiały z XXIII Ogólnopolskiego Seminarium Naukowego zorganizowanego przez Zakład Teorii Prognoz Katedry Statystyki Akademii Ekonomicznej w Krakowie, Zakopane, 2001, Wydawnictwo AE, Kraków.
- Śmiech S. 2005. *Metody analizy wartości ekstremalnych w zarządzaniu ryzykiem rynkowym*, praca doktorska, Akademia Ekonomiczna w Krakowie.
- Tarczyński W., Mojsiewicz M. 2001. *Zarządzanie ryzykiem: podstawowe zagadnienia*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.

BIBLIOTEKA KA

im. Andrzeja Frycza Modrzewskiego

Dar/Wymiana

Prenumerata

Data wpływu

prof. Swaiselin

14.03.2013