

## MODEL STOCKA I WATSONA ORAZ JEGO MODYFIKACJE — ANALIZA INFLACJI W POLSCE

JACEK KWIATKOWSKI

Katedra Ekonometrii i Statystyki WNEIZ  
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu  
PL 87-100 Toruń, ul. Gagarina 13a  
e-mail: [jkwiat@uni.torun.pl](mailto:jkwiat@uni.torun.pl)

Praca przedstawiona na posiedzeniu Komisji Nauk Ekonomicznych i Statystyki Oddziału PAN w Krakowie w dniu 30 kwietnia 2009 r.

### ABSTRACT

Jacek Kwiatkowski. *Stock and Watson's Model and Its Modifications — Analysis of Inflation in Poland*, Folia Oeconomica Cracoviensia 2008–2009, 49–50: 145–168.

The paper presents general local level model with stochastic volatility, recently proposed for U.S. inflation by Stock and Watson. The main purpose is to present and compare other local level model specifications, especially with Normal GARCH and Student-t GARCH disturbances. The paper is a full Bayesian analysis and concerns inflation in Poland during 1992–2007. The model selection and posterior estimates provide strong evidence in favor of a model with heavy-tailed disturbances in the core component, and the transitory component. Also, after the system transformations in the early 90's, the volatility of the disturbances driving both components have been substantially decreasing over time.

### KEY WORDS — SŁOWA KLUCZOWE

local level model, Bayesian Model Comparison, Inflation, conditional heteroscedasticity  
Model lokalnego poziomu, bayesowskie testowanie modeli, inflacja,  
warunkowa heteroskedastyczność

### 1. WSTĘP

Każdy poziom inflacji ma wpływ na procesy gospodarcze i społeczne. Wiele instytucji — rządowych, bankowych, finansowych, a także prywatni inwestorzy potrzebują wiarygodnego modelu inflacji aby móc przewidzieć prawdzi-

wą wartość bogactwa, dochodu oraz stopy zwrotu. Dlatego też tak ważne są badania mające na celu poprawne opisanie i prognozowanie tego zjawiska.

Problem modelowania inflacji jest znany od dawna zarówno w literaturze polskiej, jak i zagranicznej. Najnowszy przegląd w języku polskim tego typu literatury, głównie pod kątem analizy kointegracyjnej, przedstawia M. Majsterek (2008).

W artykule przedstawiono nowe narzędzia służące do modelowania i prognozowania inflacji, mianowicie modele ze zmieniającymi się losowo w czasie parametrami. Modele te mogą stanowić ciekawą alternatywę w stosunku do znanych i szeroko stosowanych modeli strukturalnych (np. Welfe, 2000). W niedawnym raporcie dotyczącym inflacji w krajach G-7 Cecchetti, Hooper, Kasmán, Schoenholtz i Watson (2007) wykazali, że w ciągu ostatnich 50 lat wartość współczynnika autoregresji w modelu AR(1) dla szeregu inflacji zmieniała się znacząco w zakresie od  $[-0,5$  do  $0]$ . Badania o podobnej tematyce podjęli wcześniej Koop i Potter (2001), którzy rozważali model autoregresyjny z parametrami generowanymi przez proces błędzenia przypadkowego dla kwartalnych danych amerykańskiego wskaźnika CPI (ang. *Consumer Price Index*). Przewaga tego modelu nad klasami konkurencyjnymi, w tym przypadku liniowym i progowym modelem autoregresyjnym, była tak duża, że model ten uzyskał prawdopodobieństwo *a posteriori* bliskie jeden<sup>1</sup>. Co więcej, w obszernej analizie przeprowadzonych przez Stocka i Watsona (2007, 2008), które również dotyczyły inflacji w Stanach Zjednoczonych, żaden z modeli jednorodnaniowych, nie uzyskał dokładniejszej prognozy niż ich model<sup>2</sup>. Rozważane przez nich konkurencyjne modele to zarówno typowe modele szeregów czasowych ARIMA, jak również modele oparte na krzywej Philipsa wraz z najnowszymi modyfikacjami oraz modele wykorzystujące koncepcję stopy bezrobocia nie powodującej przyspieszania inflacji — NAIRU. Przedstawiane w artykule modele inflacji są konstrukcjami formalnymi, które nie stawiają sobie za główny cel prawidłowe zdefiniowanie jej przyczyn. Główny nacisk położono na opis jej dynamiki i głębsze wniknięcie w jej wewnętrzną strukturę.

Rozpatrywane modele nawiązują do najnowszej literatury światowej, dotyczącej wykorzystania modeli z losowymi parametrami w analizie inflacji. O nowatorstwie prezentowanych w tym artykule tematyki może świadczyć, oprócz wspomnianej wcześniej literatury, również niepublikowany jeszcze artykuł Grassiego i Proietiego (2008), w którym autorzy podejmują konkurencyjny, w stosunku do prezentowanego artykułu, kierunek badań.

Układ artykułu jest następujący. W części 2 przedstawiono model lokalnego poziomu, a następnie jego rozszerzenie w wersji Stocka i Watsona (2007). W dalszej części artykułu zaproponowano modyfikacje wspomnianego mode-

---

<sup>1</sup> Mowa tu o modelach TAR (ang. *Threshold Autoregressive Models*).

<sup>2</sup> Wg kryterium pierwiastka błędu średniokwadratowego (RMSE).

lu, które mają na celu, po pierwsze, w większym stopniu uwzględnić typowe własności szeregu inflacji, po drugie — mogą poprawić jego możliwości aplikacyjne. Dotyczy to zwłaszcza wykorzystania modelu GARCH z warunkowym rozkładem normalnym i *t*-Studenta w równaniu obserwacji i nieobserwowalnej zmiennej — trendu. Dodatkowo omówiono inne konkurencyjne specyfikacje przydatne i stosowane wcześniej do modelowania inflacji, to jest modele autoregresyjne z stałymi oraz losowymi parametrami. W tym drugim przypadku przyjmuje się założenie, że parametry opisane są jako proces błędzenia przypadkowego. W części 3 zbadano własności wymienionych modeli na podstawie 192-miesięcznych obserwacji polskiego wskaźnika cen konsumenta CPI, obejmujących okres od stycznia 1992 do grudnia 2007 roku. W tym celu na wstępie zbadano rząd integracji wskaźnika CPI, a w dalszej kolejności dokonano bayesowskiej estymacji modeli, a także porównano ich moc objaśniającą. Zbadano również zmienność indeksu cen oraz długookresowego trendu poziomu cen, a także obliczono jak kształtował się w badanym okresie współczynnik korelacji między przyrostami CPI a ich pierwszymi opóźnieniami. Część 4 zawiera wnioski.

## 2. MODEL STOCKA I WATSONA ORAZ JEGO MODYFIKACJE

Modelowanie inflacji jest jednym z podstawowych zagadnień współczesnej makroekonometrii. Problemem modelowania inflacji w Polsce jest szeroko omawiany, m.in. w książkach z zakresu ekonometrii: Welfe (1993), Osińska (2000), Kołowski (2006) oraz Majsterek (2008). W bieżącej części proponuje się inne niż w przytoczonej literaturze narzędzie służące do opisu inflacji — model Stocka i Watsona, będący szczególną specyfikacją dobrze znanego w literaturze modelu lokalnego poziomu<sup>3</sup>.

Do modelowania inflacji Stock i Watson (2007) użyli zmodyfikowany model lokalnego poziomu — LL-SV (ang. *Local Level Model*):

$$y_t = \delta_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2), \quad (2.1)$$

$$\delta_t = \delta_{t-1} + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \omega_t^2), \quad (2.2)$$

gdzie przez  $y_t$  dla  $t = 1, \dots, T$  oznaczono obserwacje zmiennej zależnej, natomiast  $\delta_t$  jest bieżącym, nieobserwowalnym bezpośrednio poziomem procesu w czasie  $t$ , z kolei  $\varepsilon_t$  jest białym szumem w równaniu obserwacji. Przyjmuje się, że zmiana w czasie poziomu obserwowanego procesu odbywa się według prostego procesu błędzenia przypadkowego z błędem  $\eta_t$ . Warunkowe wariacje są opisane poprzez procesy stochastycznej zmienności:

<sup>3</sup> W pracy model lokalnego poziomu z warunkowymi wariacjami opisywanymi przez model zmienności stochastycznej oznaczono jako LL-SV, natomiast w artykułach Stocka i Watsona (2007, 2008) występuje on jako UC-SV (ang. *Unobserved Component*).

$$h_{szum,t} = h_{szum,t-1} + \xi_{szum,t} \quad (2.3)$$

$$h_{sygnat,t} = h_{sygnat,t-1} + \xi_{sygnat,t} \quad (2.4)$$

gdzie:

$$\sigma_t^2 = \exp(h_{szum,t}) \text{ i } \omega_t^2 \exp(h_{sygnat,t}) \text{ oraz } \xi_{szum(sygnat)} \sim N(0, y^2).$$

Model ten zakłada, że pierwsze przyrosty  $\Delta y_t$  mają zmienną w czasie i ujemną, warunkową autokorelację rzędu pierwszego i brak autokorelacji wyższych rzędów. Różnicując (2.1) mamy:

$$\Delta y_t = \eta_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}. \quad (2.5)$$

Przy danym parametrze  $\gamma^2$ , wariancja pierwszych przyrostów jest warunkowa względem zmiennych ukrytych  $h_{szum,t}$  i  $h_{sygnat,t}$  oraz całej przeszłości  $\Psi_{t-1}$  i jest równa:

$$\text{Var}(\Delta y_t | \Psi_{t-1}, h_{szum,t}, h_{sygnat,t}, \gamma^2) = \omega_t^2 + 2\sigma_t^2. \quad (2.6)$$

Natomiast warunkowa kowariancja między  $\Delta y_t$  i  $\Delta y_{t-1}$  wynosi:

$$\text{cov}(\Delta y_t, \Delta y_{t-1} | \Psi_{t-1}, h_{szum,t}, h_{sygnat,t}, \gamma^2) = -\sigma_t^2. \quad (2.7)$$

Ponieważ wariancja jest zawsze dodatnia, warunkowy współczynnik autokorelacji przyjmuje zawsze wartość ujemną i jest zmienny w czasie:

$$\text{corr}(\Delta y_t, \Delta y_{t-1} | \Psi_{t-1}, h_{szum,t}, h_{sygnat,t}, \gamma^2) = \frac{-\sigma_t^2}{\omega_t^2 + 2\sigma_t^2}. \quad (2.8)$$

Kiedy wariancje  $\sigma_t^2$  i  $\omega_t^2$  są stałe, model (2.1)–(2.4), redukuje się do tradycyjnego modelu lokalnego poziomu, który dla pierwszych przyrostów ma taką samą strukturę jak model IMA(1,1).

Zaproponowany przez Stocka i Watsona model nie uwzględnia jednak kilku istotnych własności analizowanych szeregów czasowych. Po pierwsze, w równaniach (2.3) i (2.4) współczynnik autoregresji jest równy jeden, co oznacza, że warunkowa wariancja podlega błędzeniu przypadkowemu. Implikuje to także niestacjonarność w sensie kowariancji pierwszych różnic, tj. logarytmicznych przyrostów wskaźnika cen konsumenta:

$$\text{Var}(\Delta y_t | \Psi_{t-1}, h_{szum,t}, h_{sygnat,t}, \gamma^2) = \omega_t^2 + 2\sigma_t^2 \rightarrow \infty \text{ dla } t \rightarrow \infty,$$

co z kolei oznacza, że jest to proces I(2), a nie I(1). Po drugie, występuje jedna, wspólna wariancja resztowa  $\gamma^2$  w równaniach warunkowych wariancji (2.3) i (2.4).

Istnieje zatem potrzeba stworzenia bardziej ogólnej specyfikacji modelu Stocka i Watsona, która uwzględniałaby w szerszym stopniu własności szeregu inflacji. Ciekawe byłyby również badania polegające na zastąpieniu w opi-

się warunkowej wariancji modelu stochastycznej zmienności, modelem GARCH. Modele GARCH to, jak dotąd, modele najczęściej stosowane w opisie zmienności szeregów (Doman i Doman, 2004), dlatego też warto sprawdzić ich przydatność w modelowaniu zmienności wskaźnika inflacji. Z tego też względu rozpatrzono kilka konkurencyjnych i wzajemnie wykluczających się modyfikacji modelu Stocka i Watsona.

Pierwszy analizowany model to model lokalnego poziomu z błędami typu SV, którego postać jest mocno zbliżona do modelu w wersji zaproponowanej przez Stocka i Watsona. Następne dwa modele to modele lokalnego poziomu, w których wariancja warunkowa w równaniu obserwacji i trendu jest opisana jako GARCH(1,1). Dla modeli GARCH rozpatrzono dwa warianty, pierwszy i zarazem prostszy, to model, w którym reszty (w równaniu obserwacji i trendu) przyjmują warunkowe rozkłady normalne, oraz drugi — w którym założono grubsze ogony poprzez przyjęcie warunkowych rozkładów *t*-Studenta. Własności modelu lokalnego poziomu, w którym warunkowe wariancje w równaniu obserwacji i nieobserwowalnego trendu są procesem GARCH(1,1), opisują Pellegrini, Ruiz i Espasa (2007, 2008). Kolejny, czwarty — to model autoregresyjny z parametrami generowanymi przez procesy błędzenia przypadkowego z warunkową wariacją w równaniu obserwacji typu SV. Model ten oznaczono jako RCA-SV (RW). Podobny model tylko, że z homoskedastyczną wariancją użyli Koop i Potter (2001) dla szeregu inflacji w Stanach Zjednoczonych. Ostatni, piąty model jest najprostszymi, ponieważ jest to standardowy model autoregresyjny (rzędu drugiego) również z błędami SV. Jest on zapisany jako AR(2)-SV.

Jeżeli założymy warunkową normalność procesów resztowych to wariancje w równaniu obserwacji i trendu mogą przyjąć następującą postać:

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2) \text{ i } \eta_t \sim N(0, \omega_t^2), \quad (2.9)$$

gdzie:

$$\sigma_t^2 = h_{szum,t} \text{ i } \omega_t^2 = h_{sygnal,t} \quad (2.10)$$

$$h_{szum,t} = b_{1szum} h_{szum,t-1} + a_{0,szum} + a_{1,szum} (E\varepsilon_{t-1})^2, \quad (2.11)$$

$$h_{sygnal,t} = b_{1sygnal} h_{sygnal,t-1} + a_{0,sygnal} + a_{1,sygnal} (E\eta_{t-1})^2, \quad (2.12)$$

wraz z standardowymi założeniami zapewniającymi dodatniość i skończoność warunkowych wariancji:

$$a_{0,szum(sygnal)} \equiv 1 - b_{1,szum(sygnal)} - a_{1,szum(sygnal)} b_{1,szum(sygnal)} \geq 0,$$

$$a_{1,szum(sygnal)} \geq 0, a_{1,szum(sygnal)} + b_{1,szum(sygnal)} < 1.$$

Z postaci warunkowych wariancji wynika, że mamy:  $\text{var}(\varepsilon_t) = 1$  i  $\text{var}(\eta_t) = 1$  oraz  $E(h_{szum(sygnal),t}) = 1$ .

Równania (2.10)–(2.12) opisują modele GARCH(1,1) z warunkowym rozkładem normalnym. Model lokalnego poziomu z tego typu błędami będzie w dalszej części artykułu zapisywany w skrócie jako LL-GARCH. Jako alternatywę można również użyć zamiast warunkowego rozkładu normalnego rozkład  $t$ -Studenta. Odpowiednie reszty z rozkładem  $t$ -Studenta oznaczono w następujący sposób:

$$\varepsilon_t \sim t\left(0, \frac{v_{szum}}{(v_{szum} - 2)\sigma_t^2} v_{szum}\right) \text{ i } \eta_t \sim t\left(0, \frac{v_{sygnat}}{(v_{sygnat} - 2)\omega_t^2} v_{sygnat}\right), \quad (2.13)$$

gdzie  $t(a, P, v)$  oznacza jednowymiarowy rozkład Studenta o niecentralności  $a$ , precyzji  $P$  i stopniach swobody  $v$ . Model ten oznaczono w skrócie jako LL-GARCH-Student.

Kolejnym możliwym wariantem postaci wariancji procesów resztowych jest model zmienności stochastycznej. Jest on oznaczony jako LL-SV. W tym przypadku wariancje zmieniają się w czasie zgodnie z:

$$h_{szum,t} = \rho_{szum} h_{szum,t-1} + \zeta_{szum,t}, \quad (2.14)$$

$$h_{sygnat,t} = \rho_{sygnat} h_{sygnat,t-1} + \zeta_{sygnat,t}, \quad (2.15)$$

gdzie:  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2)$  i  $\eta_t \sim N(0, \omega_t^2)$ ,  $\sigma_t^2 = \exp(h_{szum,t})$  i  $\omega_t^2 = \exp(h_{sygnat,t})$  oraz  $\rho_{szum(sygnat)} \in (-1, 1)$ , a także  $\xi_{szum(sygnat)} \sim N(0, \gamma_{szum(sygnat)}^2)$ .

Proces ten w odróżnieniu od procesu Stocka i Watsona (2007), poprzez nałożenie warunków ograniczających na współczynniki autoregresji, ma stacjonarne warunkowe wariancje, a co zatem idzie jest I(1), a nie I(2). Dodatkowo, dzięki dwóm wariancjom resztowym w równaniach dla  $h_t$  można rozpatrywać różną zmienność warunkowych wariancji w równaniu obserwacji i trendu.

Model autoregresyjny rzędu drugiego, w którym zarówno stała, jak i współczynniki autoregresji generowane są przez proces błędzenia przypadkowego ma następującą postać:

$$y_t = \delta_{0t} + \delta_{1t} y_{t-1} + \delta_{2t} y_{t-2} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2), \quad (2.16)$$

$$\delta_{it} = \delta_{i,t-1} + \eta_{it}, \quad \eta_{it} \sim N(0, \omega_t^2) \text{ dla } i = 0, 1, 2, \quad (2.17)$$

gdzie:  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2)$ ,  $\sigma_t^2 = \exp(h_{szum,t})$  oraz  $h_{szum,t} = \rho_{szum} h_{szum,t-1} + \zeta_{szum,t}$ ,  $\rho_{szum} \in (-1, 1)$ , a także  $\xi_{szum} \sim N(0, \gamma_{szum}^2)$ .

Nakładając warunki ograniczające na wariancje  $\omega_t^2 = 0$  dla  $i = 0, 1, 2$ , w modelu (2.16)–(2.17), uzyskuje się standardowy model AR(2)-SV:

$$y_t = \delta_{const} + \delta_{1,const} y_{t-1} + \delta_{2,const} y_{t-2} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2). \quad (2.18)$$

Wszystkie przedstawione powyżej modele zostały wykorzystane w następnej części artykułu do analizy wskaźnika inflacji w Polsce.

### 3. ANALIZA INDEKSU CEN KONSUMENTA W POLSCE W LATACH 1992–2007

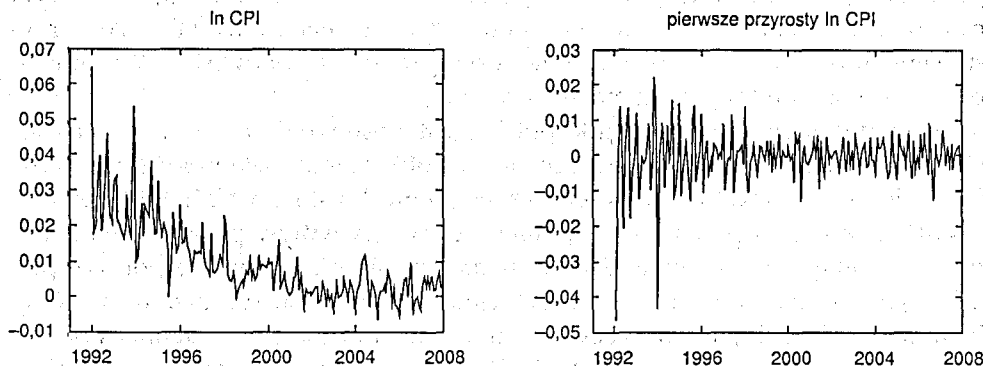
W tym punkcie przeprowadzono analizę szeregu inflacji w Polsce przy użyciu, omówionych przed chwilą modeli z rodziny LL. Celem analizy było zestawienie podobieństw i różnic w modelowaniu wskaźnika cen konsumenta, z użyciem konkurujących i wzajemnie wykluczających się modeli, a także porównanie ich mocy objaśniającej. Na początku wszystkie modele poddano estymacji, a następnie obliczono ich moc objaśniającą. Porównanie stopnia dopasowania poszczególnych modeli, dokonano standardowo, za pomocą brzegowej gęstości wektora obserwacji, która była obliczona za pomocą metody Newtona-Raferty'ego. Inflacja użyta w niniejszym artykule mierzona jest jako logarytm wskaźnika cen dóbr i usług konsumpcyjnych, w którym za podstawą wzięto okres wcześniejszy. Dane wykorzystywane do estymacji modeli i testowania ich mocy objaśniającej dotyczą okresu od stycznia 1992 do grudnia 2007 roku. W ten sposób otrzymano 192 obserwacje miesięczne. Wybór początkowego roku, od którego rozpoczęto badania, był uzależniony z jednej strony chęcią uzyskania możliwie jak najdłuższego szeregu czasowego, z drugiej strony zaś podlegał ograniczeniom, ponieważ pominięto okres hiperinflacji, która była następstwem głębokich przemian gospodarczych w latach 1989/90. Przed przystąpieniem do analizy badany szereg oczyszczono z sezonowości. W tym celu posłużono się średnią ruchomą scentrowaną<sup>4</sup>.

Badany okres, jak na warunki polskie jest stosunkowo długi. Jest to okres, który obejmuje zarówno głębokie zmiany w polityce makroekonomicznej, transformację gospodarki, jak również przystąpienie Polski do Unii Europejskiej. Na długookresowy poziom inflacji ma z pewnością wpływ prowadzona przez bank centralny polityka pieniężna. W badanym okresie zmiany w polityce pieniężnej miały charakter zarówno instytucjonalny, np. ukonstytuowanie się Rady Polityki Pieniężnej, jak i dotyczyły ewolucji w zakresie prowadzonej polityki pieniężnej w tym jej celów i strategii. W przeprowadzonej analizie pominięto nietypowy, początkowy okres głębokiej transformacji systemowej, kiedy miały miejsce zjawiska hiperinflacyjne a inflacja sięgała nawet tysiąc procent w skali roku. Mimo to pierwszy rok badanego szeregu (1992) przypada jeszcze na koniec głębokiej transformacji systemowej, co daje możliwość uzyskania ciekawych wniosków. Z kolei następne lata (1993–1997) to głównie trwałe i stopniowe przeprowadzanie procesu dezinflacji, będącej skutkiem wprowadzania planu

<sup>4</sup> Do eliminacji sezonowości w szeregu inflacji wykorzystano metodę średniej ruchomej w programie Eviews 6 z następującymi współczynnikami: 0,007589; -0,000333; -0,000518; 0,002364; -0,000284; -0,002781; -0,008910; -0,005796; 0,005922; 0,001802; 0,000217; 0,000728. Inne metody oczyszczania szeregu z sezonowości takie jak Census X12 i X11 dały bardzo zbliżone wyniki i nie wpływały znacząco na charakter oczyszczonego szeregu.

stabilizacyjnego. Kolejne lata (1998–2004) to większa niezależność banku centralnego oraz okres przygotowania Polski do integracji ze strukturami Unii Europejskiej i, co za tym idzie, istotne zmiany w polityce pieniężnej i antyinflacyjnej: m.in. przyjęcie nowej strategii monetarnej polegającej na wyznaczeniu średniookresowej strategii polityki pieniężnej oraz na ustalaniu bezpośredniego celu inflacyjnego. Na osiągnięcie inflacji na poziomie 4–5% potrzebowano około dwunastu lat, co zdaniem niektórych ekonomistów (np. Grabia, 2003) świadczy jednak o zbyt powolnym tempie wygaszania tego niekorzystnego zjawiska. Po roku 2004 głównym celem polityki pieniężnej stało się stabilizowanie inflacji na niskim poziomie oraz dążenie do spełnienia kryteriów zapisanych w Traktacie z Maastricht<sup>5</sup>.

Indeks cen konsumenta (CPI) oraz jego pierwsze przyrosty, po wcześniejszym logarytmowaniu i oczyszczeniu z sezonowości, przedstawia rycina 1. Patrząc na przebieg inflacji, można dojść do kilku ciekawych wniosków. Po pierwsze, wyraźnie widać, że badany okres można podzielić na dwa zasadnicze podokresy: lata od 1992 do 2003, kiedy nastąpił wyraźny spadek poziomu inflacji oraz okres po roku 2003, w którym inflacja oscylowała wokół względnego stałego poziomu.



Źródło: obliczenia własne na podstawie danych publikowanych przez GUS, <http://www.stat.gov.pl>

Ryc. 1. Logarytm wskaźnika CPI (po wyeliminowaniu sezonowości) oraz jego pierwsze różnice w okresie od stycznia 1992 do grudnia 2007 roku

Po drugie, biorąc pod uwagę pierwsze przyrosty wskaźnika CPI, można zauważyć, że lata wcześniejsze, szczególnie między 1992 a 1997 charakteryzują się znacznie większą zmiennością niż lata późniejsze.

Model Stocka i Watsona daje możliwość opisu tych wymienionych własności, tj. zmiany poziomu procesu i efektu skupiania zmienności (ang. *volatility*

<sup>5</sup> Przegląd i ocenę polityki pieniężnej od roku 1989 dokonuje np. Przybylska-Kapuścińska, 2006.



*clustering*). Efekt skupiania zmienności jest typową własnością szeregów finansowych (patrz Doman i Doman, 2004) i polega na tym, że zarówno małe, jak i duże zmiany cen aktywów następują seriami. Najnowsze badania empiryczne (np. Cecchetti i in., 2007) potwierdzają występowanie efektu skupiania zmienności, a co za tym idzie — zmiennej w czasie warunkowej wariancji w szeregu inflacji. Model LL posiada dodatkowo jeszcze jedną ciekawą własność, której nie można w prosty sposób zauważyć na rycinie 1, mianowicie poprzez warunkową wariancję w równaniu stanu zakłada, że mogą występować znaczne wahania długookresowego poziomu cen.

Na wstępie analizy przystąpiono do zbadania stopnia integracji danych dotyczących wskaźnika cen konsumenta CPI. W tym celu zastosowano bayesowski test pierwiastka jednostkowego, który zaproponowali Koop i van Dijk (2000). Analizą stopnia integracji, w porównywalnym okresie, dla tego samego szeregu, z użyciem testu Dickeya-Fullera i KPSS<sup>6</sup>, zajmowali się m.in. Welfe i Majsterek (2002).

Rozważmy model, który obrazuje związki między popularnymi w literaturze klasycznej (niebayesowskiej) testami pierwiastka jednostkowego, czyli Dickeya-Fullera i KPSS:

$$\ln CPI_t = \tau_t + \rho \ln CPI_t + \sum_{i=1}^{p-1} c_i \Delta \ln CPI_{t-i} + v_t, \quad v_t \sim N(0, \sigma_v^2), \quad (3.1)$$

$$\tau_t = \alpha + \tau_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim N(0, \sigma_u^2). \quad (3.2)$$

Wykorzystując prostą transformację  $\lambda = \sigma_u^2 / (\sigma_u^2 + \sigma_v^2)$ , jednostajny rozkład *a priori*  $p(\lambda) = 1$  w przedziale  $[0, 1)$  oraz rząd autoregresji  $p = 2$ , możemy rozważyć następujące cztery rozłączne hipotezy<sup>7</sup>:

$H_1$ :  $\lambda = 0$  i  $|\rho| < 1$ . Szereg jest stacjonarny wokół deterministycznego trendu.

$H_2$ :  $0 < \lambda < 1$  i  $|\rho| = 1$ . Szereg jest ARIMA z dryfem.

$H_3$ :  $\lambda = 0$  i  $|\rho| < 1$ . Szereg jest I(1) wraz z deterministycznym trendem.

$H_4$ :  $0 < \lambda < 1$  i  $|\rho| = 1$ . Szereg jest zintegrowany rzędu drugiego, I(2).

Wyniki testowania rzędu integracji dla logarytmu indeksu inflacji są zawarte w tabeli 1<sup>8</sup>. Jak widać wszystkie hipotezy miały jednakowe prawdopodobieństwo *a priori*. Trzeci wiersz w tabeli 1 pokazuje wartości brzegowej gęstości obserwacji obliczone w modelach, które były powiązane z jedną z czterech hipotez. Modele te uzyskano poprzez nałożenie warunków ograniczających zgodnie z wymienionymi wyżej hipotezami. Jak widać, znaczną przewagę uzyskała hipoteza, która głosi, że pierwsze przyrosty badanego szeregu są sta-

<sup>6</sup> Dickey i Fuller, 1979, Kwiatkowski i in., 1992.

<sup>7</sup> Koop i van Dijk, 2000, wyrażenie (A.3).

<sup>8</sup> Ze względu na ograniczony zakres jakie mogą przyjmować wartości rzeczywiste w języku programowania Matlab, w każdej iteracji od logarytmu funkcji wagowej w metodzie Monte Carlo z funkcją ważności odejmowano 700.

Prawdopodobieństwa a posteriori hipotez dotyczących stopnia integracji, obliczone dla logarytmu indeksu inflacji

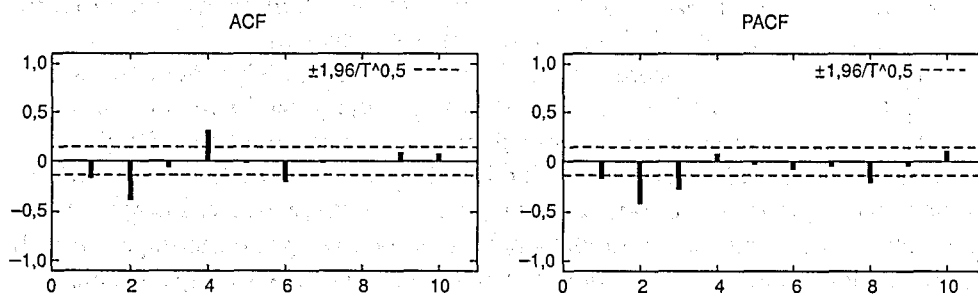
	$P(H_1   \text{Dane})$	$P(H_2   \text{Dane})$	$P(H_3   \text{Dane})$	$P(H_4   \text{Dane})$
Prawdopodobieństwo a priori	0,25	0,25	0,25	0,25
Brzegowa gęstość obserwacji	1,78E + 100	1,51E + 118	1,78E + 80	2,93E + 77

Źródło: obliczenia własne.

cjonarne. Wartość brzegowej gęstości obserwacji dla  $H_2$  jest o osiemnaście rzędów większa niż dla  $H_1$  i około półtora razy większa niż dla pozostałych dwóch hipotez. Z tego też względu, w tabeli 1 świadomie zrezygnowano z podania prawdopodobieństw a posteriori, ponieważ z prawdopodobieństwem bliskim wartości jeden można przyjąć hipotezę o stacjonarności pierwszych przyrostów.

Wyniki zawarte w tabeli 1 są zgodne z wynikami, jakie uzyskali Welfe i Majsterek (2002) w analizie stopnia integracji cen dla miesięcznych obserwacji wskaźnika CPI i są kolejnym argumentem w prowadzonej dyskusji (por. Majsterek, 2008) za traktowaniem inflacji w Polsce jako  $I(1)$ , a co za tym idzie — za przyjęciem zintegrowania rzędu drugiego w procesie generującym ceny.

Jak wiadomo, modele lokalnego poziomu implikują ujemną autokorelację pierwszych przyrostów. Warto więc sprawdzić, czy własność ta występuje w szeregu inflacji. W tym celu obliczono wartości funkcji autokorelacji (ACF) i autokorelacji cząstkowej (PACF). Wyniki obliczeń wraz z przerywaną linią, która oznacza typowy 95% przedział ufności, przedstawia rycina 2.



Źródło: obliczenia własne.

Ryc. 2. Funkcja autokorelacji (ACF) i autokorelacji cząstkowej (PACF) wraz z przedziałami ufności obliczona dla przyrostów logarytmów CPI

Jak widać, cztery z dziesięciu wartości ACF są istotne statystycznie przy 5-procentowym poziomie istotności, z czego pierwsza, druga i szósta przyjmują wartości ujemne. Wyniki te potwierdzają hipotezę o istnieniu ujemnej auto-

korelacji dla pierwszych przyrostów inflacji. O ile ujemna autokorelacja nie budzi wątpliwości, to sugerowany, na podstawie oszacowanych wartości PACE, rząd autokorelacji jest niejednoznaczny. Najbardziej istotne okazało się drugie opóźnienie, potem w kolejności malejącej: trzecie, ósme i pierwsze. Sugeruje to istotną autokorelację rzędu drugiego lub trzeciego. Postać funkcji autokorelacji, przedstawiona na rycinie 2, jest zasadniczo zgodna z postacią funkcji autokorelacji obliczoną dla szeregów inflacji krajów grupy G-7, gdzie jak podają Cecchetti i in. (2007), również uzyskano istotną ujemną autokorelację rzędu pierwszego<sup>9</sup>. Pewne wątpliwości budzi jednak istotność autokorelacji nie tylko rzędu pierwszego, ale również wyższych rzędów, a także wartości funkcji autokorelacji cząstkowej, co wskazuje na bardziej złożoną strukturę niż w modelu IMA(1,1). Może to wpływać w tym przypadku na moc objaśniającą modeli lokalnego poziomu, ponieważ zakładamy w nich *explicite* występowanie ujemnej, istotnej autokorelacji rzędu pierwszego i brak autokorelacji wyższych rzędów oraz ujemne wartości autokorelacji cząstkowej, dążące do zera w tempie wykładniczym.

Wnioskowanie bayesowskie wymaga przyjęcia rozkładów *a priori* estymowanych parametrów. W tym przypadku wymiar wektora parametrów oraz jego współrzędne różnią się znacznie, w zależności od rozpatrywanej hipotezy modelowej. Szczegółowe informacje na temat rozkładów *a priori* szacowanych parametrów, w badanych modelach, przedstawia tabela 2. Jak widać, są to rozkłady właściwe, w większości bardzo rozproszone, odzwierciedlające nieprecyzyjną wiedzę badacza na temat ich prawdziwych wartości. Dodatkowo, zmienna odpowiadająca za trend —  $\delta_t$  oraz za warunkową wariancję w modelach SV —  $h_t$ , a także zmienne będące współczynnikami autoregresji w modelach RCA-SV (RW) —  $\delta_{it}$  traktowane są jak zmienne ukryte (ang. *latent variable*), czyli zmienne nie dające się bezpośrednio obserwować. W podejściu bayesowskim estymacji zmiennych ukrytych dokonuje się w taki sam sposób, jak estymacji pozostałych parametrów modelu, a ich rozkład *a priori* wynika bezpośrednio z hierarchicznej struktury rozpatrywanych modeli (Koop, 2003). Szczegóły bayesowskiej estymacji modelu lokalnego poziomu o rozkładach dopuszczających warunkowy rozkład *t*-Studenta i zmienną wariancję omówiono w pracy Kwiatkowskiego (2009). W literaturze polskiej o bayesowskiej estymacji zmiennych ukrytych, głównie w kontekście modeli stochastycznej zmienności, pisze Pajor (2003). Inny ciekawy przykład zastosowania zmiennych ukrytych, tym razem dla funkcji produkcji Cobba i Douglasa, przedstawia Osiewalski (2001).

Dla początkowego stanu  $\delta_0$ , w modelach lokalnego poziomu, przyjęto wartość równą 6, natomiast w modelu RCA-SV (RW) dla początkowych wartości

<sup>9</sup> Prezentowane wyniki najbardziej zbliżone są do wyników otrzymanych dla szeregu inflacji w Kanadzie w latach 1984–2006, por. Cecchetti i in., 2007, tablica 3.1, s. 14.

Rozkłady *a priori* parametrów

Parametr	Przyjęty rozkład <i>a priori</i>	Hiperparametry	Użyty w modelu
$a_{1, szum(sygnal)}$	Jednostajny w obszarze stacjonarności i dodatniości warunkowej wariancji		LL-GARCH, LL-GARCH-Student
$b_{1, szum(sygnal)}$	Jednostajny w obszarze stacjonarności i dodatniości warunkowej wariancji		LL-GARCH, LL-GARCH-Student
$\nu_{szum(sygnal)}$	Ucięty Cauchy'ego, $\nu_{szum(sygnal)} > 2$		LL-GARCH-Student
$\rho_{szum(sygnal)}$	Ucięty normalny $N(\mu_\rho, \sigma_\rho^2), \rho_{szum(sygnal)} \in (-1, 1)$	$\mu_\rho = 0,95,$ $\sigma_\rho^2 = 0,5$	LL-SV, RCA(2)-SV (RW), AR(2)-SV
$\gamma_{szum(sygnal)}^2$	Odwrócony gamma $IG(c, d), \gamma_{szum(sygnal)}^2, \sigma_i^2, \omega_i^2 > 0$	$c = 0,01,$ $d = 0,01$	LL-SV, RCA(2)-SV (RW), AR(2)-SV
$\sigma^2$			RCA(2)-SV (RW), AR(2)-SV
$\omega_i^2$ , dla $i = 0, 1, 2.$			RCA(2)-SV (RW)
$\delta_{const}$	Normalny $N(\mu_\delta, \sigma_\delta^2)$	$\mu_\delta = 0,$ $\sigma_\delta^2 = 1$	AR(2)-SV
$\delta_{i, const}$ dla $i = 1, 2.$	Ucięty normalny w obszarze stacjonarności $N(\mu_\delta, \sigma_\delta^2)$		AR(2)-SV

współczynników autoregresji oraz stałej:  $\delta_{10}$ ,  $\delta_{20}$  i  $\delta_{00}$ , założono rozkład normalny, o średniej i wariancji równej odpowiednio 0 i 0,1. Wartość początkowa warunkowej wariancji jest traktowana jako ustalona i równa  $h_0 = 1$  w modelu GARCH, i  $h_0 = 0$  w modelu SV.

Dla wszystkich wariancji, zarówno w standardowych modelach AR, jak i w modelach autoregresyjnych z losowymi parametrami oraz zmienności stochastycznej, przyjęto odwrócony rozkład gamma. Dla parametrów w modelu GARCH, stojących przy opóźnionych kwadratach reszt i opóźnionej wariancji, przyjęto rozkłady jednostajne na sympleksach otrzymanych poprzez restrykcje gwarantujące dodatniość i skończoność procesu (por. Osiewalski i Pipień, 1999). Dla współczynników autoregresji, w standardowym modelu AR(2), założono ucięty wielowymiarowy rozkład normalny o zerowym wektorze średnich i diagonalnej macierzy kowariancji, z elementami na głównej przekątnej równymi wartości jeden. Również dla stałej  $\delta_{const}$  w modelu AR(2), przyjęto rozkład normalny o średniej równej zero i wariancji jeden. Z kolei dla współczynnika au-

toregresji, w modelu SV, wykorzystano wstępną wiedzę na jego temat i przyjęto stosunkowo informacyjny rozkład normalny ze średnią i wariancją równą odpowiednio 0,95 i 0,5<sup>10</sup>. Dla liczby stopni swobody przyjęto rozkład Cauchy'ego, ucięty lewostronnie w  $v = 2$ . Jest to zatem rozkład *a priori* w którym z jednej strony założono istnienie warunkowej wariancji procesów (w równaniu obserwacji i trendu), z drugiej strony przyjęto taką masę prawdopodobieństwa, aby grube ogony rozkładu warunkowego miały najwyższą gęstość prawdopodobieństwa. Dodatkowo, z własności rozkładu Cauchy'ego wiadomo, że rozkład ten nie posiada skończonych momentów. Oznacza to, że zarówno wariancja jak i kurtoza nie istnieją. Własność ta, wraz z konstrukcją przedziału, który jest prawostronnie nieograniczony, dopuszcza realną możliwość występowania cieńszych ogonów, poprzez istnienie warunkowej normalności procesów.

W tabelach 3 i 4 zamieszczono rezultaty bayesowskiej estymacji parametrów w modelach opisujących logarytmny CPI lub ich przyrosty. Przed przystą-

Tabela 3

Informacje *a posteriori* parametrów, w modelach LL-GARCH i LL-GARCH-Student, obliczone dla miesięcznych obserwacji wskaźnika CPI w latach 1992–2007

Parametr		LL-GARCH		LL-GARCH-Student
$a_{1, \text{sygnal}}$	0,2597	(0,1345)	0,2775	(0,1331)
	0,2238	[0,0701 0,5501]	0,2578	[0,0557 0,5388]
$b_{1, \text{sygnal}}$	0,7286	(0,1477)	0,7007	(0,1503)
	0,7700	[0,4170 0,9406]	0,7256	[0,4064 0,9424]
$v_{\text{sygnal}}$	—	—	2,4891	(0,4135)
			2,3890	[2,0827 3,0946]
$a_{1, \text{szum}}$	0,2456	(0,1458)	0,2713	(0,1637)
	0,2083	[0,0695 0,5243]	0,2373	[0,0369 0,6007]
$b_{1, \text{szum}}$	0,7431	(0,1594)	0,6090	(0,2563)
	0,7857	[0,4400 0,9304]	0,6802	[0,0935 0,9454]
$v_{\text{szum}}$	—	—	2,4796	(0,4106)
			2,3831	[2,1173 3,0580]
$a_{1, \text{sygnal}} + b_{1, \text{sygnal}}$	0,9919	(0,0099)	0,9783	0,0241
	0,9952	[0,9725 1,0000]	0,9852	[0,9310 0,9998]
$a_{1, \text{szum}} + b_{1, \text{szum}}$	0,9931	(0,0087)	0,8668	(0,1475)
	0,9959	[0,9768 1,0000]	0,9266	[0,5536 0,9988]

Źródło: obliczenia własne.

<sup>10</sup> Na przykład, dla kwartalnych danych wskaźnika konsumenta, w artykule Grassiego i Proiettiego (2008) wartość oczekiwana rozkładu *a posteriori* współczynników autoregresji, w modelach SV, wyniosła odpowiednio 0,9883 w równaniu obserwacji i 0,9856 w równaniu trendu.

Informacje a posteriori parametrów, w modelach LL-SV i RCA(2)-SV (RW), obliczone dla miesięcznych obserwacji wskaźnika CPI w latach 1992–2007

Parametr		LL-SV	Parametr		RCA(2)-SV (RW)
$\rho_{\text{sygnal}}$	0,9930 0,9950	(6,1735e-3) [0,9837 0,9990]	$\rho_{\text{szum}}$	0,9780 0,9899	(0,0332) [0,9129 0,9990]
$\gamma^2_{\text{sygnal}}$	0,1816 0,1255	(0,1815) [0,0098 0,5224]	$\gamma^2_{\text{szum}}$	0,46351e-1 0,30729e-1	(0,58458e-1) [4,1758e-3 1,3339e-1]
			$\sigma^2$	0,7817 0,6572	(0,5558) [0,1444 1,8100]
$\rho_{\text{szum}}$	0,9906 0,9932	(8,7786e-3) [0,9775 0,9990]	$\omega_0^2$	2,8213e-3 2,5071e-3	(1,3714e-3) [9,7113e-4 5,5280e-3]
$\gamma^2_{\text{szum}}$	0,6404 0,3546	(1,0457) [0,0260 1,9919]	$\omega_1^2$	5,1339e-3 4,3482e-3	(3,1228e-3) [1,0952e-3 1,1065e-2]
			$\omega_2^2$	6,4763e-3 5,4202e-3	(4,1621e-3) [1,5477e-3 1,4430e-2]

Źródło: obliczenia własne.

pieniem do obliczeń, pierwotne dane pomnożono razy 100. Na podstawie szeregu  $y_t = 100 \ln \text{CPI}_t$ , dokonano estymacji parametrów w modelach: LL-GARCH ( $M_1$ ), LL-GARCH-Student ( $M_2$ ) i LL-SV ( $M_3$ ), natomiast dla pierwszych różnic  $\Delta y_t$  użyto modele: RCA(2)-SV (RW) ( $M_4$ ) i AR(2)-SV ( $M_5$ ). W pierwszej linii w tabelach 3 i 4 znajdują się wartości oczekiwane, natomiast w drugiej linii umieszczono mediany rozkładów *a posteriori*. W nawiasach półokrągłych podano wartości odchyłeń standardowych, natomiast w nawiasach kwadratowych znajdują się 95% przedziały o najwyższej gęstości *a posteriori* (HPDI).

Otrzymane wyniki estymacji pozwalają stwierdzić, że rozważany szereg, zdecydowanie przemawia za występowaniem warunkowej heteroskedastyczności i to zarówno w równaniu obserwacji, jak i trendu. W modelach GARCH rozkłady *a posteriori* parametrów  $a_1$  i  $b_1$  są istotne statystycznie, ponieważ mają względnie małe rozproszenie, a ich przedziały HPD nie zawierają zera. Dodatkowo, suma punktowych ocen *a posteriori* parametrów  $a_1$  i  $b_1$ , w modelu LL-GARCH, jest bliska wartości jeden, co świadczy o silnej persystencji warunkowej wariancji. Z tego też powodu, w tabeli 3 zamieszczono również ich sumę wraz z poszczególnymi charakterystykami *a posteriori*. Jak łatwo zauważyć uzyskane punktowe oceny są bliskie jedynki, a górna granica przedziału HPD jest równa wartości jeden. Oznacza to, że jako dodatkowy model, w równaniu obserwacji i trendu można by było rozpatrzyć tzw. zintegrowany model GARCH, czyli IGARCH. W procesie IGARCH(1, 1) zachodzi  $a_1 + b_1 = 1$ , co oznacza, że jest to proces zintegrowany co do wariancji (Engle i Bollerslev,

1986). Bayesowską estymację i testowanie modeli IGARCH, dla polskich szeregów finansowych, przedstawiają Osiewalski i Pipień (1999).

W modelu LL-GARCH-Student można zauważyć, że rozkłady *a posteriori* parametru  $b_1$ , w porównaniu z parametrami w modelu LL-GARCH, są zlokalizowane bardziej na lewo, co świadczy o mniejszej reakcji na opóźnione wartości warunkowej wariancji. Dotyczy to zwłaszcza parametru w równaniu obserwacji, gdzie wartość oczekiwana i mediana, w modelu LL-GARCH-Student, wynoszą odpowiednio 0,6090 i 0,6802, natomiast w modelu LL-GARCH są one równe 0,7431 i 0,7857. Oznacza to, że przyjęcie rozkładu o grubszych ogonach prowadzi do zmniejszenia persystencji zmienności. Dodatkowo, uwzględnienie w modelu GARCH warunkowych rozkładów *t*-Studenta, prowadzi do mniejszej precyzji. Pomimo pewnych różnic, w lokalizacji parametrów i rozproszeniu, oba modele GARCH dają podobny opis zmienności badanego szeregu. Także w modelach zmienności stochastycznej, średnia i mediana *a posteriori* parametru  $\rho$  przyjmują wartości zbliżone do jedynki, co wskazuje na występowanie bardzo silnej persystencji warunkowej wariancji, a lokalizacja rozkładu *a posteriori* jest podobna do tej przyjętej *a priori*. Trwałość zakłóceń losowych (szoków), w zmienności obserwowanego procesu mierzona za pomocą współczynnika  $HL = \ln 0,5 / \ln \rho$  (por. Pajor, 2003), jest bardzo duża, rozproszona i cechuje się prawostronną asymetrią. Dolny kraniec przedziału obejmującego 80% całej masy *a posteriori* wynosi 5,73 miesiące, natomiast górny aż 138,59 miesięcy, z kolei mediana *a posteriori* jest równa 53,91 miesięcy. W przypadku szoków w zmienności trendu, rozpiętość przedziału jest jeszcze większa, ponieważ dolny i górny kraniec przedziału wynosi odpowiednio 10,98 i 227,08, natomiast mediana jest równa 95,39 miesięcy.

Mimo, że oceny punktowe współczynnika  $\rho$  są bliskie wartości jeden to masa rozkładu *a posteriori*, współczynnika autoregresji, w równaniu warunkowej wariancji, jest zlokalizowana w obszarze stacjonarności. Dzieje się tak, ponieważ charakteryzują się one małym rozproszeniem i niewielką rozpiętością przedziału HPD. Punktowe oceny parametru  $\rho$  w modelach SV są zgodne z wynikami, zamieszczonymi w artykule Grassiego i Proiettiego (2008), dla kwartalnych danych wskaźnika cen konsumenta CPI w Stanach Zjednoczonych.

Wartość oczekiwana *a posteriori* liczby stopni swobody, w modelu LL-GARCH-Student, w równaniu obserwacji kształtuje się na poziomie 2,4796, natomiast w równaniu trendu jest równa 2,4891. Dodatkowo, rozkłady te, są bardzo ciasno zlokalizowane na prawo od wartości  $v = 2$ , o czym świadczą zamieszczone w tabeli 3 przedziały HPD. Fakt, że niemal cała masa prawdopodobieństwa *a posteriori* jest skupiona poniżej wartości cztery oznacza, że dane silnie odrzucają hipotezę o istnieniu kurtozy rozkładów. Taka sytuacja wskazuje na rozkład warunkowy, wyraźnie różny od rozkładu normalnego oraz potwierdza występowanie bardzo ciężkich ogonów, co wiąże się z częstym występowaniem obserwacji nietypowych, w procesie obserwacji i trendu.

Badany szereg ma zagwarantowaną skończoną wariancję ponieważ, przyjęto rozkład *a priori*, którego gęstość przyjmuje niezerowe wartości na prawo od  $v = 2$ .

W tabeli 4 zamieszczono wyniki estymacji parametrów, w modelu autoregresyjnym, w którym współczynniki autoregresji podlegają procesowi błędzenia przypadkowego, natomiast wariancja opisana jest przez model stochastycznej zmienności. Zmienne w czasie współczynniki wykazują się małą zmiennością, ponieważ ich pierwsze przyrosty mają stosunkowo małą wariancję. Widać to poprzez fakt, że większość masy prawdopodobieństwa *a posteriori* wariancji dla  $\omega_i^2$ , dla  $i = 0, 1, 2$ , przypada na rejony położone w pobliżu zera, z jednocześnie względnie dużym rozproszeniem.

W tabeli 5 umieszczono brzegowe gęstości wektora obserwacji, obliczone przy użyciu metody Newtona-Rafferty'ego oraz otrzymany na tej podstawie ranking modeli. Uzyskane rezultaty informują, że w przypadku szeregu inflacji proponowany w artykule model lokalnego poziomu, w którym błędy w równaniu obserwacji i trendu opisane są za pomocą modelu GARCH (1,1) z warunkowym rozkładem *t*-Studenta, ma największą moc objaśniającą. Znacznie niższa, w porównaniu z innymi konkurencyjnymi modelami, wartość logarytmu brzegowej gęstości wektora obserwacji (-91,88) informuje, że dane wyraźnie wskazują na ten model, czyniąc pozostałe specyfikacje wysoce nieprawdopodobne. Drugim w kolejności, po modelu LL-GARCH-Student, jest model zaproponowany przez Stocka i Watsona, czyli model lokalnego poziomu z błędami typu SV. Model ze stałymi parametrami z wartością -141,72 ma dopiero czwarte miejsce w rankingu, po modelu LL-GARCH. Ostatnie miejsce w rankingu ma model autoregresyjny ze współczynnikami generowanymi przez proces błędzenia przypadkowego. Model ten zajmuje dopiero piąte miejsce, jedną pozycję niżej niż standardowy model AR.

Tabela 5

Logarytm brzegowej gęstości wektora obserwacji oraz ranking konkurujących modeli

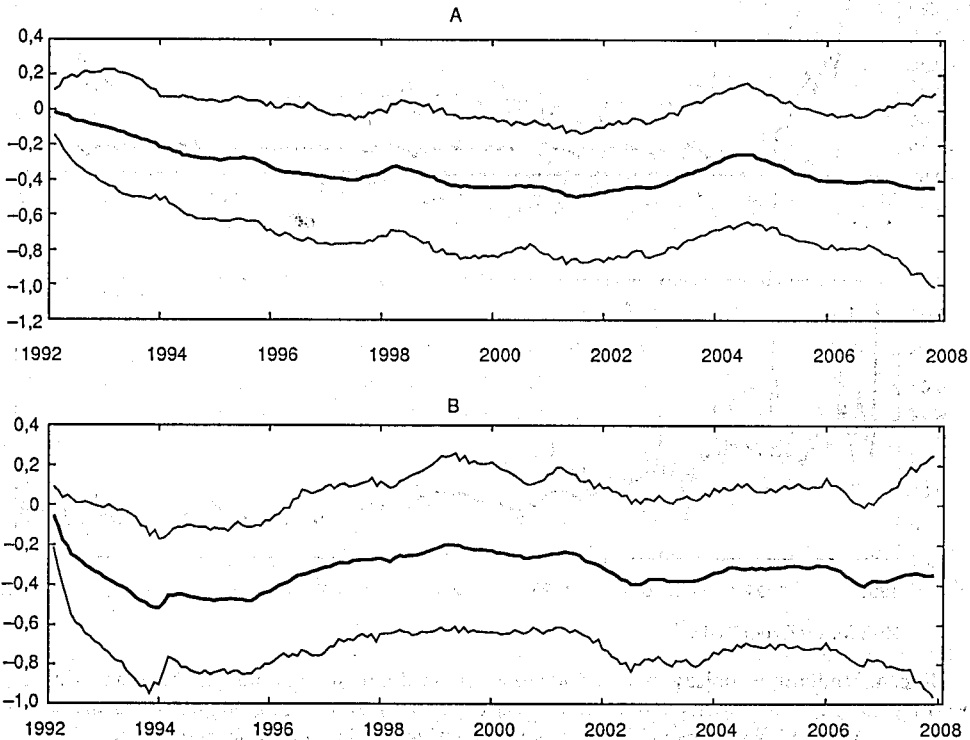
	LL-GARCH	LL-GARCH-Student	LL-SV	RCA(2)-SV (RW)	AR(2)-SV
Logarytm brzegowej gęstości obserwacji	-134,14	-91,88	-126,13	-153,18	-141,72
Ranking modeli	3	1	2	5	4

Źródło: obliczenia własne.

Zbliżoną postać, do modelu RCA(2)-SV, miał model użyty przez Koopa i Pottera (2001). W ich badaniu uzyskał on znaczną przewagę nad konkurencyjnymi specyfikacjami. Okazuje się jednak, że w przypadku danych polskich, ma on najniższą pozycję w rankingu.



Stosunkowo małą zmienność współczynników autoregresji wydaje się potwierdzać rycina 3, na której zamieszczono wybrane charakterystyki rozkładów *a posteriori* pierwszego  $\delta_{1t}$  (górny rysunek) i drugiego współczynnika autoregresji  $\delta_{2t}$  dla  $t = 1, \dots, 192$ . Pogrubioną linią połączono mediany *a posteriori*, natomiast cieńszą linią zaznaczono dolną i górną granicę przedziału o najwyższej gęstości *a posteriori*. Poza początkowym okresem, ich rozpiętość jest stosunkowo stała. Mała rozpiętość przedziału HPD w pierwszym roku, jest najprawdopodobniej następstwem przyjęcia mało rozproszonych rozkładów *a priori* stanów początkowych. Punktowe oceny na poziomie wartości oczekiwanej współczynników autoregresji, w modelu ze stałymi parametrami, wyniosły odpowiednio  $-0,3404$  i  $-0,34931$ , z błędami równymi  $6,9283e-2$  i  $6,3179e-2$ . Są one zatem znacznie oddalone od zera i tym samym istotne statystycznie, co potwierdza występowanie zautokorelowanej struktury pierwszych przyrostów. Porównując je z ciągiem median, przedstawionym na rycinie 3, można zauważyć, że mediany te są zbliżone do punktowych ocen współczynników w standardowym modelu AR.

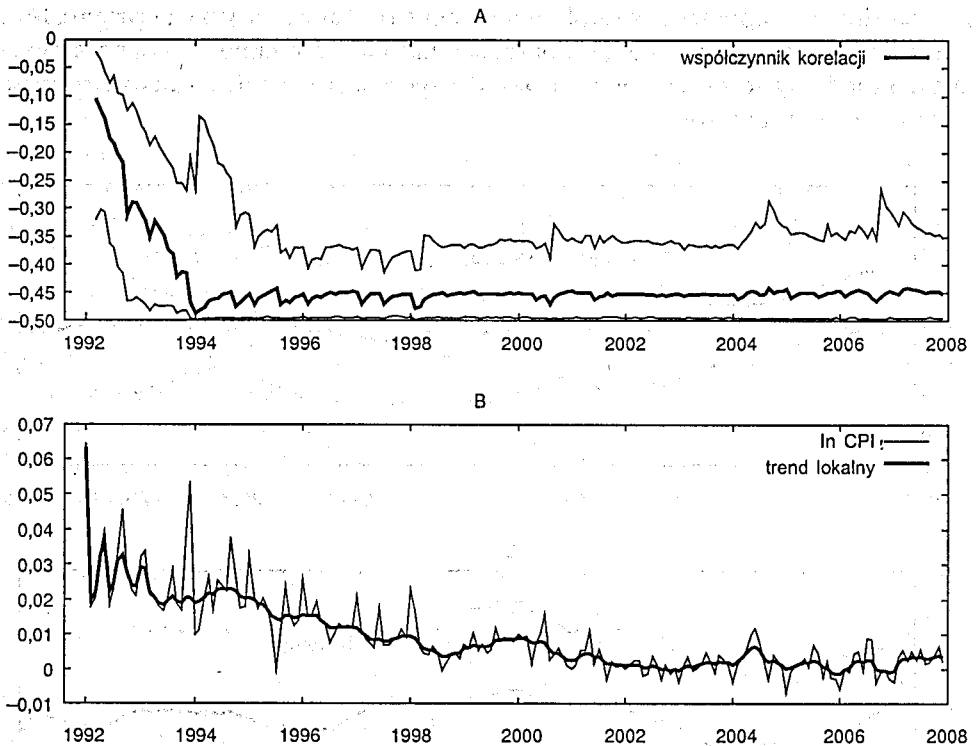


Źródło: obliczenia własne.

Ryc. 3. Pogrubioną linią oznaczono mediany współczynników autoregresji w modelu RCA-SV (RW):  $\delta_{1t}$  — panel A i  $\delta_{2t}$  — panel B oraz dolne i górne krańce 95% przedziałów o najwyższej gęstości *a posteriori*

Jak wspomniano w poprzedniej części artykułu, zmienność warunkowych wariacji ma ważne następstwa dla interpretacji współczynnika korelacji, który określa zależność między przyrostami inflacji a ich pierwszymi opóźnieniami. Jego wykres, obliczony za pomocą najbardziej prawdopodobnego modelu, czyli LL-GARCH-Student, przedstawia panel A na rycinie 4. Otrzymany ciąg współczynników jest zgodny z wynikami zaprezentowanymi w raporcie Cecchetti i in., 2007<sup>11</sup>, ponieważ okresy wysokiej inflacji i niestabilności gospodarczej cechują się również znacznym wzrostem współczynnika korelacji.

Dla danych polskich, najbardziej interesujące wydają się lata 1992–1994, gdzie widać wyraźny spadek wartości współczynnika korelacji z  $-0,1$  do  $-0,5$ , wraz z gwałtownym wzrostem rozpiętości przedziałów HPD w latach 1994–1995. Może to być spowodowane tym, że początek lat dziewięćdziesiątych



Źródło: obliczenia własne.

Ryc. 4. Mediany współczynnika autokorelacji (pogrubiona linia na panelu A) wraz z dolną i górną granicą 95% przedziałów o najwyższej gęstości *a posteriori* oraz logarytm wskaźnika CPI i trend lokalny (panel B). Wszystkie charakterystyki obliczono przy użyciu modelu LL-GARCH-Student

<sup>11</sup> Rycina 3.2 na s. 18.

był okresem dużych zmian w gospodarce, tj. radykalnej stabilizacji i liberalizacji makroekonomicznej, którym towarzyszyło zjawisko galopującej inflacji. W kolejnych latach, po roku 1994, współczynnik korelacji przyjmował wartości na znacznie niższym poziomie, równym około  $-0,45$ . Wskazuje to tym samym, poza początkowymi latami związanymi z okresem radykalnej transformacji, na stałą, niezmienną w czasie autoregresyjną strukturę inflacji.

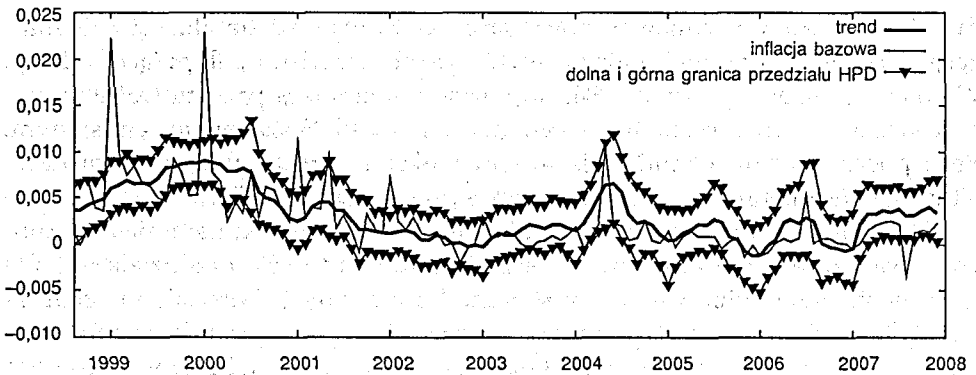
Punktowe oceny trendu prezentuje panel B na rycinie 4, natomiast warunkowe wariancje w równaniu obserwacji i trendu wraz z 95% przedziałami HPD są przedstawione odpowiednio na panelu A i B ryciny 6. Wszystkie te charakterystyki, podobnie jak wspomniany wcześniej współczynnik korelacji, estymowano za pomocą modelu LL-GARCH-Student. Jak widać, w badanym okresie, zarówno trend, jak i jego zmienność uległy znaczącej zmianie. Wartość trendu inflacji, obliczona na poziomie mediany *a posteriori*, zmalała z poziomu około 3% w roku 1992 do 0,3% w roku 2007, podczas gdy jego warunkowa wariancja z poziomu 4,96 w 1992 zmalała w tempie wykładniczym do blisko zera w roku 1994 i latach następnych.

Wydaje się interesujące porównanie ocen *a posteriori* nieobserwowalnego trendu, z inflacją bazową, której wartości podaje Narodowy Bank Polski. Jak wiadomo inflacji bazowa służy do oceny średnio- i długookresowego trendu ogólnego poziomu cen, ponieważ jej wartości ilustrują tendencje zmian oczyszczone z wahań okresowych oraz ze skutków szoków podaży, które najczęściej mają charakter przejściowy. Wiedza na temat inflacji bazowej umożliwia oszacowanie kierunku i skali wpływu prowadzonej przez bank centralny polityki pieniężnej<sup>12</sup>.

Ponieważ bank centralny podaje wartości inflacji bazowej dopiero od stycznia 1998 roku, na rycinie 5 podano odpowiedni fragment ocen trendu oraz wartości logarytmów inflacji bazowej. Użyta inflacja bazowa to indeks cen po wyłączeniu cen żywności i energii, gdzie za podstawą wzięto poprzedni miesiąc. Punktowe wartości trendu zaznaczono pogrubioną linią łącząc mediany *a posteriori* zmiennej  $\delta_t$ , natomiast cieńszą linią zaznaczono wartości inflacji bazowej. Dodatkowo na rycinie umieszczono również dolną i górną granicę 95% przedziałów o najwyższej gęstości *a posteriori* parametru  $\delta_t$ .

Jak widać na powyższym rysunku uzyskany trend, wyznaczony za pomocą modelu LL-GARCH-Student, wskazuje na podobny kierunek zmian co wartości inflacji bazowej, ma on jednak w porównaniu z nią bardziej gładki przebieg, a jego przedziały ufności w zdecydowanej większości obejmują jej realizację. Potwierdza to zatem wiarygodność uzyskanych wyników badań, a zarazem daje możliwość ciekawej interpretacji modelu lokalnego poziomu,

<sup>12</sup> Narodowy Bank Polski — Internetowy Serwis Informacyjny, <http://www.nbp.pl/statystyka/bazowa/metodologia.pdf> (9.02.2009).

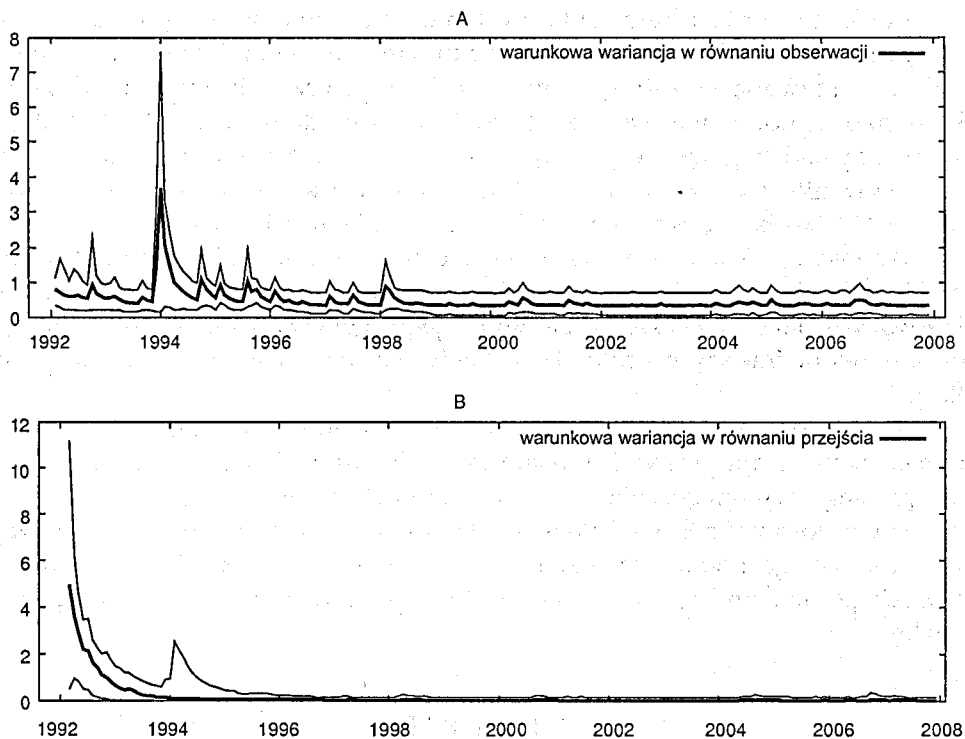


Źródło: obliczenia własne.

Ryc. 5. Punktowe oceny trendu wraz z dolną i górną granicą 95% przedziału HPD oraz wartości inflacji bazowej, gdzie za podstawę wzięto poziom cen z poprzedniego miesiąca

ponieważ zmienny parametr można interpretować jako długookresową tendencję inflacji.

Na panelu B ryciny 6 można zauważyć, że w latach 1992–1994 występował systematyczny spadek zmienności długookresowego trendu inflacji. Związane to było z rozpoczętym w 1990 roku i kontynuowanym w kolejnych latach programem stabilizacyjnym. Patrząc na panel A ryciny 6, można również dostrzec, że okres między rokiem 1992 a 1997 charakteryzuje się znacznie większą zmiennością niż lata późniejsze. W latach 1992–1993, polityka prowadzona przez bank centralny, kontrolowała względnie sprawne zasoby pieniężne i coraz sprawniej ograniczała inflację (Polański, 2005). Teza ta znajduje potwierdzenie na rycinie 6, ponieważ jak pokazuje wykres zmienności na panelu A, okres ten charakteryzował się względnie małą, w porównaniu z okresem późniejszym, zmiennością cen oraz wykładniczo malejącą zmiennością trendu (panel B). Największą zmienność obserwujemy pod koniec 1993 i na początku 1994 roku. Nagła zmiana poziomu cen mogła być skutkiem kilku niezależnie występujących, w tym okresie lub krótko przed nim, przyczyn. Po pierwsze, wystąpiło kilka jednorazowych egzogenicznych impulsów, takich jak „skokowa” dewaluacja złotego o 8% procent, wprowadzona w sierpniu 1993 (Polański, 1999) oraz „zamrożenie”, a następnie podniesienie stóp podatkowych w 1994 roku. Zdaniem ekonomistów (Bauc, 1995; Lutkowski, 1995; Grabia, 2003) skokowe dewaluacje złotego miały duże znaczenie dla kreacji pieniądza i doprowadziły do „wykolejenia” programu antyinflacyjnego. Po drugie, w drugiej połowie 1993 roku nastąpiła liberalizacja przepływów kapitałowych, która miała znaczny wpływ na utratę kontroli kształtowania podaży pieniądza przez bank centralny (Polański, 2005). Na problemy polityki stabilizacyjnej w tym okresie mógł się również wpłynąć fakt, że od 1994 polska gospodarka zaczęła być również



Źródło: obliczenia własne.

Ryc. 6. Mediany rozkładów a posteriori warunkowej wariancji w równaniu obserwacji (pogrubiona linia na panelu A) oraz w równaniu trendu (pogrubiona linia na panelu B), a także dolne i górne krańce 95% przedziałów o najwyższej gęstości a posteriori (zwykła linia). Wszystkie charakterystyki zostały obliczone przy użyciu modelu LL-GARCH-Student

w dużym stopniu zasilana ze źródeł zewnętrznych, pochodzących z nadwyżki w handlu przygranicznym (Polszakiewicz, 2005). Liberalizacja przepływów kapitałowych spowodowała, że polska gospodarka stanęła wobec tzw. dylematu niespójnego czworokąta. Polega on na tym, że władze monetarne nie mogą jednocześnie prowadzić autonomicznej polityki pieniężnej, stabilizować kursu walutowego, zapewnić pełnej mobilności przepływów kapitałowych oraz umożliwić pełną wymianę handlową (Polański, 2005; Polszakiewicz, 2005).

#### 4. PODSUMOWANIE

Głównym celem tego artykułu było zastosowanie modeli, z parametrami generowanymi przez procesy stochastyczne, do opisu dynamiki inflacji w Polsce. Badania dotyczyły miesięcznych obserwacji wskaźnika cen konsumenta CPI w okresie od stycznia 1992 do grudnia 2007 roku.

Punktem wyjścia było wykorzystanie i porównanie mocy objaśniającej najnowszego modelu Stocka i Watsona z innymi modelami. Część z tych modeli była już używana wcześniej w badaniach empirycznych, inne zaś to nowe konstrukcje modelowe. Dotyczy to zwłaszcza modelu LL-GARCH-Student, który uzyskał największe prawdopodobieństwo *a posteriori*. Modelowanie procesów ukrytych o bardzo grubych ogonach jest zagadnieniem zupełnie nowym i okazało się ważne w wyjaśnianiu zmienności inflacji.

Współczynnik korelacji między przyrostami inflacji (CPI) a ich pierwszymi opóźnieniami dał możliwość wyodrębnienia dwóch zasadniczych podokresów. Pierwszy to lata 1992–1994, gdzie widać jego wyraźny spadek z  $-0,1$  do  $-0,5$  oraz okres późniejszy po roku 1994, kiedy nastąpiła stabilizacja struktury inflacji.

Na koniec należy również dodać, że poza dobrze udokumentowanymi przesłankami empirycznymi w najnowszej literaturze światowej, jak dotąd nie ma prostego wytłumaczenia losowości parametrów w modelach inflacji. Jako przyczyny losowości Stock i Watson (2007) podają szeroko rozumiane zmiany w strukturze gospodarki, założeń polityki monetarnej, rozwój rynków finansowych czy też zmianę natury potencjalnych szoków wpływających na gospodarkę.

## BIBLIOGRAFIA

- Bauc J. 1995. *Inflacja polska w latach 1990–94 w świetle współczesnej teorii ekonomii*, Ekonomista 3, 441–461.
- Carlin B.P., Louis T.A. 2000. *Bayes and Empirical Bayes Methods for Data Analysis*, Chapman & Hall/CRC, New York.
- Cecchetti S.G., Hooper P., Kasman B.C., Schoenholtz K.L., Watson M.W. 2007. *Understanding the evolving inflation process*, Report U.S. Monetary Policy Forum.
- Dickey D.A., Fuller W.A. 1979. *Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root*, Journal of the American Statistical Association 74, 427–431.
- Doman M., Doman R. 2004. *Ekonometryczne modelowanie dynamiki polskiego rynku finansowego*, Wyd. AE w Poznaniu, Poznań 2004.
- Engle R.F., Bollerslev T. 1986. *Modelling the persistence of conditional variances*, Econometric Reviews 5, 1–50.
- Grabia T. 2003. *Polityka kursowa w Polsce w okresie transformacji jako instrument walki z inflacją*, Gospodarka w praktyce i teorii, Wyd. UE w Łodzi, Łódź, 1, 12, 48–58.
- Grassi S., Proietti T. 2008. *Has the Volatility of U.S. Inflation Changed and How?*, wersja niepublikowana.
- Koop G. 2003. *Bayesian Econometrics*, John Wiley & Sons.
- Koop G., Potter S. 2001. *Are apparent findings of nonlinearity due to structural instability in economic time series?*, The Econometrics Journal 4, 1, 37–55.
- Koop G., van Dijk H.K. 2000. *Testing for integration using evolving trend and seasonals models: A Bayesian approach*, Journal of Econometrics 97, 2, 261–291.
- Kotłowski J. 2006. *Pieniądz i ceny w gospodarce rynkowej. Analiza kointegracji sezonowej*, Wyd. SGH, Warszawa.

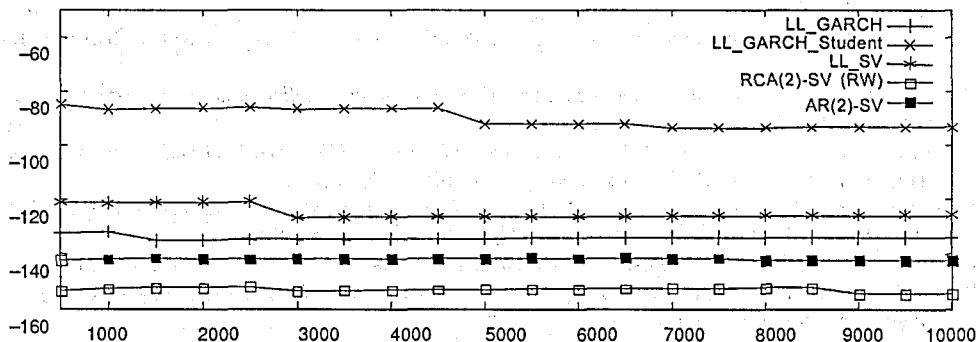
- Kwiatkowski J. 2009. *Bayesowska estymacja modelu lokalnego poziomu o rozkładach dopuszczających warunkowy rozkład t-Studenta i zmienną wariancję*, wersja niepublikowana.
- Kwiatkowski D., Phillips P.C.B., Schmidt P., Shin Y. 1992. *Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root*, *Journal of Econometrics* 54, 159–178.
- Lutkowski K. 1995. *Uwarunkowania polskiej inflacji i proces jej wygasania*, *Ekonomista* 3, 463–476.
- Majsterek M. 2008. *Wielowymiarowa analiza kointegracyjna w ekonomii*, Wyd. UŁ w Łodzi, Łódź.
- Osiewalski J. 2001. *Ekonometria bayesowska w zastosowaniach*, Wyd. AE w Krakowie, Kraków.
- Osiewalski J., Pipień M. 1999. *Bayesowskie testowanie modeli GARCH i IGARCH*, *Przegląd Statystyczny* 46, 1, 5–23.
- Osińska M. 2000. *Ekonometryczne modelowanie oczekiwań gospodarczych*, Wyd. UMK w Toruniu, Toruń.
- Pajor A. 2003. *Procesy zmienności stochastycznej SV w bayesowskiej analizie finansowych szeregów czasowych*, Wyd. AE w Krakowie, Kraków.
- Pellegrini S., Ruiz E., Espasa A. 2007. *The relationship between ARIMA-GARCH and unobserved component models with GARCH disturbances*, wersja niepublikowana.
- Pellegrini S., Ruiz E., Espasa A. 2008. *ARIMA-GARCH and unobserved component models with GARCH disturbances: Are their prediction intervals different?*, wersja niepublikowana
- Pipień M. 2006. *Wnioskowanie bayesowskie w ekonometrii finansowej*, Wyd. AE w Krakowie, Kraków.
- Polański Z. 1999. *Polityka kursu walutowego w Polsce w latach 90. Stabilizacja, konkurencyjność i przepływy kapitałowe*, *Ekonomista* 1–2, 135–154.
- Polański Z. 2005. *Przemiana i ciągłość: refleksje o polskiej polityce pieniężnej w okresie piętnastolecia transformacji ustrojowej*, *Gospodarka polska na przełomie wieków od A do Z*, red. Czarny E., NBP, Warszawa, 93–128.
- Polszakiewicz B. 2005. *Niespójny czworokąt rozważań systemowych w polskiej polityce stabilizacyjnej, Ład instytucjonalny w gospodarce*, red. Polszakiewicz, B., Boehlke, J., Wyd. UMK w Toruniu, Toruń, 3, 295–304.
- Przybylska-Kapuścińska W. 2006. *Ocena realizacji polityki pieniężnej Narodowego Banku Polskiego, Ład instytucjonalny w gospodarce*, red. Polszakiewicz, B., Boehlke, J., Wyd. UMK w Toruniu, Toruń, 2, 229–252.
- Stock J. H., Watson M.W. 2007. *Why has U.S. inflation become harder to forecast?* *Journal of Money, Credit, and Banking* 39, 3–33.
- Stock J. H., Watson M.W. 2008. *Phillips curve inflation forecasts*, wersja niepublikowana.
- Tsay R.S. 1987. *Conditional heteroscedastic time series models*, *Journal of the American Statistical Association* 82, 398.
- Welfe A. 1993. *Inflacja i rynek*, PWE, Warszawa.
- Welfe A. 2000. *Modelling inflation in Poland*, *Economic Modelling* 17, 375–385.
- Welfe A., Majsterek M. 2002. *Wage and prices inflation in Poland in the period of transition: The cointegration analysis*, *Economics of Planning* 35, 205–219.

## DODATEK A

### Analiza stabilności estymatora Newtona-Raftery'ego

W części 3, do obliczenie mocy objaśniającej konkurujących modeli oraz nadania im odpowiedniej rangi, posłużono się metodą Newtona-Raftery'ego. Jak wiadomo, główną wadą tego estymatora jest jego niestabilność, ponieważ nie spełnia on centralnego twierdzenia granicznego (Carlin i Louis, 2000). Z praktycznego punktu widzenia dzieje się tak, ponieważ bardzo małe wartości funkcji

wiarygodności w znaczny sposób wpływają na wielkość średniej harmonicznej, dlatego też ważne jest sprawdzenie jak kształtowały się, wraz ze wzrostem cykli, jego realizacje dla poszczególnych modeli. Rycina A.1 przedstawia przebieg brzegowej gęstości wektora obserwacji w zależności od liczby cykli. Jak widać zachowanie się estymatorów Newtona-Raftery'ego dla każdego modelu było stabilne.



Źródło: obliczenia własne.

Ryc. A.1. Wartości logarytmu estymatora Newtona-Raftery'ego wraz ze wzrostem liczby cykli

BIBLIOTEKA KA  
im. Andrzeja Frycza Modrzowskiego

Dar/Wymiana ..... WYDAWCA KA

Prenumerata .....

Data wpływu ..... 12.05.2010