F O L I A O E C O N O M I C A C R A C O V I E N S I A
Vol. LIV (2013) PL ISSN 0071-674X

O PROCEDURZE KART KONTROLNYCH W PRZYPADKU, GDY ZMIENNA DIAGNOSTYCZNA MA ROZKŁAD ASYMETRYCZNY[1]

JANUSZ L. WYWIAŁ
Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach
e-mail: janusz.wywial@ue.katowice.pl

ABSTRACT

J.L. Wywiał. *On construction of control card in the case when the variable under study has skewed probability distribution.* Folia Oeconomica Cracoviensia 2013, 54: 107–116.

The problem of statistical quality control is taken into account. A new proposition of control card construction is proposed. The problem is considered as testing statistical hypothesis on expected value of the variable under study (diagnostic variable) under the assumption that the variable has skewed probability. The proposed test statistic is constructed on the rather well known following property that the covariance between sample variance and sample mean is proportional to the third central moment of a variable. This property is applied to construction of test statistic based on the regression estimator. The limit distribution of the test statistic is normal.

STRESZCZENIE

W mniejszej pracy rozważano powszechnie używaną w statystycznej kontroli jakości procedurę kart kontrolnych lecz przy założeniu, że zmienna diagnostyczna ma niekoniecznie rozkład sy-

[1] Niniejsza praca ma stanowić przyczynek do metodologii statystycznej stosowanej w kontroli jakości i jest dedykowana jej wybitnemu znawcy, którym był Profesor Andrzej Iwasiewicz. Pozwolę sobie napisać, iż miałem wielokrotnie zaszczyt rozmawiać z Profesorem na tematy statystyki matematycznej i jej zastosowań i to nie tylko w kontroli jakości. Profesor, jako prawdziwy statystyk, miał umiejętność kojarzenia pozornie na pierwszy rzut oka nie związanych ze sobą faktów. W szczególności podkreślał, że metodologia stosowana w kontroli jakości jest podobna do tej, którą posługujemy się w metodzie reprezentacyjnej lub audycie finansowym, ponieważ ich główne problemy sprowadzają się do testowania odpowiednio sformułowanych hipotez statystycznych. Ponadto, Profesor jasno uświadomił mi jaka jest najistotniejsza różnica między formułowaniem problemu testowania odpowiednich hipotez statystycznych w kontroli jakości i audycie statystycznych. Stwierdził, że w statystycznej kontroli jakości główną wagę kładzie się na prawdopodobieństwo popełnienia błędu pierwszego rodzaju, czyli poziom istotności, a w audycie finansowym na prawdopodobieństwo popełnienia błędu drugiego rodzaju. To jest jedna z inspiracji, którą zawdzięczam Profesorowi.

metryczny. Analizowany problem sprowadzono do zagadnienia weryfikacji hipotezy o wartości oczekiwanej tej zmiennej diagnostycznej, przy czym zakłada się, że ta zmienna ma rozkład asymetryczny. Znaną własność występowania korelacji między średnią i wariancją z tej samej próby wykorzystano do konstrukcji sprawdzianu testu. Wykazano, że ten sprawdzian ma granicznie rozkład normalny. Przy spełnieniu pewnych dodatkowych warunków test wykorzystujący proponowany sprawdzian może mieć większą moc od testu, którego sprawdzianem jest zwykła średnia arytmetyczna z próby prostej.

KEY WORDS — SŁOWA KLUCZOWE

control card, test statistic, regression estimator, asymmetric distribution, limit theorem

karty kontrolne, test statystyczny, estymator regresyjny, rozkład asymetryczny, twierdzenie graniczne

1. WPROWADZENIE

Tekst niniejszej pracy dotyczy powszechnie używanej w statystycznej kontroli jakości tzw. procedury kart kontrolnych. Klasyczna wersja tej procedury jest używana przy założeniu, że zmienna diagnostyczna ma rozkład symetryczny, zwykle normalny. Szerokie rozważania na ten temat prowadzą m.in. Iwasiewicz (1999) i Kończak (2007). To założenie jest wygodne z metodologicznego punktu widzenia, jakkolwiek w praktyce nie można wykluczyć pojawiania się asymetrycznych rozkładów zmiennej diagnostycznej. W związku z tym w pracach z zakresu statystycznej kontroli jakości ukazują się prace dotyczące procedur konstrukcji kart kontrolnych przy nieklasycznych założeniach, czym m.in. zajmuje się Kończak (2007).

W niniejszej pracy będziemy zakładać, iż rozkład zmiennej losowej diagnostycznej jest asymetryczny, oraz że jego momenty do czwartego rzędu włącznie istnieją. W celu uproszczenia prowadzonych rozważań, co nie umniejsza ogólności uzyskanych wyników, analizowany problem sprowadzamy do zagadnienia testowania hipotez statystycznych. Zakładamy, że odchylenie od wartości pożądanej nadziei matematycznej zmiennej diagnostycznej świadczy o rozregulowaniu się procesu produkcyjnego. Sprowadza się to, jak wiadomo, do weryfikacji hipotezy o wartości oczekiwanej tej zmiennej. Ponadto, będziemy zakładać, że zmienna diagnostyczna ma rozkład asymetryczny. Proponowany w pracy sprawdzian testu jest wynikiem wykorzystania własności zależności między średnią i wariancją z tej samej próby. Okazuje się, że kowariancja tych parametrów jest równa trzeciemu momentowi centralnemu zmiennej losowej, z której rozkładu pochodzi próba. Tą własność Wywiał (2009) wykorzystał do podniesienia dokładności estymatora wartości średniej w domenie populacji, który tutaj wykorzystamy do testowania hipotezy statystycznej o zmiennej diagnostycznej dalej oznaczanej przez zmienną losową Y.

Zakładamy, że zmienna losowa Y ma momenty do czwartego włącznie, które oznaczamy przez:

$$v_r(Y) = v_r = E(Y - E(Y))^r, \; r = 2,3,4,\ldots$$

Momenty z próby oznaczamy przez:

$$V_{r,s} = \frac{1}{n-1}\sum_{i \in s}(Y_i - \overline{Y}_s)^r, \qquad r = 2,3,\ldots$$

Średnią i wariancję z próby s oznaczamy odpowiednio przez

$$\overline{Y}_s = \frac{1}{n}\sum_{i \in s} Y_i, \qquad V_{2s} = \frac{1}{n-1}\sum_{i \in s}(Y_i - \overline{Y}_s)^2.$$

Ich podstawowe parametry są następujące:

$$E(\overline{Y}_s) = \mu, \qquad D^2(V_{2,s}) = \frac{v_2}{n},$$

$$E(V_{2,s}) = v_2 + O(n^{-1}),$$

$$D^2(V_{2,s}) = \frac{1}{n}(v_4 - v_2^2) + O(n^{-2}),$$

gdzie $O(n^{-2})$ jest pewną stałą zmierzającą do zera tak jak ciąg $\{n^{-2}\}$. Kowariancja między tymi parametrami, por. np. Kendall i Stuart (1967), wynosi:

$$\mathrm{Cov}(\overline{Y}_s, V_{2,s}) = \frac{1}{n}v_3 + O(n^{-2}). \tag{1}$$

To pozwala wyznaczyć liniową regresję drugiego rodzaju średniej względem wariancji

$$\overline{Y}_s \approx \alpha V_{2,s} + \beta. \tag{2}$$

Kryterium metody najmniejszych kwadratów prowadzi do wyznaczenia następujących parametrów α i β:

$$\alpha = \frac{\mathrm{Cov}(\overline{Y}_s, V_{2,s})}{D^2(V_{2,s})}, \qquad \beta = \mu - \alpha E(V_{2,s}).$$

Zapisane wzory można przepisać następująco, por. np. Wywiał (2009):

$$\alpha = \frac{v_3}{v_4 - v_2^2} = \kappa\sqrt{\frac{v_4 - v_2^2}{v_2}}, \qquad \beta = \mu - \alpha v_2,$$

gdzie:

$$\kappa = \frac{\nu_3}{\sqrt{\nu_2\left(\nu_4 - \nu_2^2\right)}}, \qquad -1 \leq \kappa \leq 1 \tag{3}$$

jest unormowanym współczynnikiem asymetrii (skośności) zmiennej losowej. Jeśli rozkład zmiennej jest symetryczny, to $\kappa = 0$. Gdy rozkład zmiennej losowej jest prawostronnie (lewostronnie) asymetryczny, to $\kappa \geq 0$ ($\kappa \leq 0$). Wywiał (1981, 1983) zauważa, że współczynnik κ jest współczynnikiem korelacji pary zmiennych losowych Y i $\left(Y - E(Y)\right)^2$. Przykładowo, można pokazać, że gdy zmienna losowa ma rozkład wykładniczy, to $\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7071$, por. Wywiał (2009).

2. WERYFIKACJA HIPOTEZ

Proces kontroli jakości formułujemy w następujący sposób. W kolejnych okresach czasu są pobierane z partii (populacji) wyprodukowanych wyrobów próby, w których są obserwowane wartości zmiennej diagnostycznej, którą oznaczyliśmy przez Y, a jej wartość oczekiwaną przez $\mu = E(Y)$. Dla ustalenia uwagi załóżmy, że duże dodatnie odchylenie od wartości średniej zmiennej diagnostycznej świadczy o wystąpieniu wybrakowanych produktów, co jest zwykle efektem rozregulowania się procesu wytwórczego. Z formalnego punktu widzenia mamy więc do czynienia z weryfikacją hipotezy sprawdzanej:

$$H_0 \colon \mu = \mu_0 \tag{4}$$

względem alternatywnej

$$H_1 \colon \mu > \mu_0, \tag{5}$$

przy czym przez μ_0 oznaczono wartość oczekiwaną zmiennej diagnostycznej przy założeniu, że proces produkcyjny przebiega prawidłowo.

1.1. Przypadek znanej wariancji zmiennej diagnostycznej

W pewnych sytuacjach wartości zmiennej diagnostycznej zależą tylko od stopnia dokładności przyrządu pomiarowego, którym są obserwowane. W związku z tym fabrycznie określony stopień dokładności pomiarów przyrządu można użyć jako wielkości proporcjonalnej do odchylenia standardowego zmiennej diagnostycznej. Dalej założymy, że to odchylenie standardowe jest właśnie równe parametrowi dokładności pomiarów określającemu fabrycznie. Niech $s = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ będzie próbą prostą z rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej Y.

Wówczas do testowania hipotezy H_0 można użyć następującego tzw. estymatora regresyjnego:

$$\hat{Y}_{1s} = \overline{Y}_s + \alpha_s (v_2 - V_{2,s}), \tag{6}$$

gdzie:

$$\alpha_s = \frac{V_{3,s}}{V_{4,s} - V_{2,s}^2}.$$

Wywiał (2009) wykazał, że jeśli rozmiar próby $n \to \infty$, to zapisana statystyka ma rozkład $\hat{Y}_{1,s} \sim N\left(\mu, D^2\left(\hat{Y}_{1,s}\right)\right)$, gdzie

$$D^2\left(\hat{Y}_{1,s}\right) \approx \frac{v_2}{n} - \frac{v_3^2}{\left(v_4 - v_2^2\right)n} = \frac{v_2}{n}\left(1 - \kappa^2\right).$$

Do estymacji tej wariancji można użyć statystyki

$$D_s^2\left(\hat{Y}_{1,s}\right) = \frac{V_{2,s}}{n} - \frac{V_{3,s}^2}{\left(V_{4,s} - V_{2,s}^2\right)n} = \frac{V_{2,s}}{n}\left(1 - \kappa_s^2\right), \tag{7}$$

gdzie:

$$\kappa_s = \frac{V_{3,s}}{\sqrt{V_{2,s}\left(V_{4,s} - V_{2,s}^2\right)}}.$$

W związku z tym sprawdzian sformułowanej hipotezy H_0 można określić wzorem:

$$Z_s = \frac{\hat{Y}_{1,s} - \mu_0}{D_s\left(\hat{Y}_{1,s}\right)}. \tag{8}$$

Na podstawie znanych twierdzeń o granicznym rozkładzie funkcji momentów z próby, por. np. Cramér (1945) lub Rao (1965), można wykazać, że jeśli rozmiar próby $n \to \infty$ oraz hipoteza H_0 jest prawdziwa, to rozkładem granicznym prawdopodobieństwa zmiennej losowej Z_s jest standardowy rozkład normalny zmiennej losowej $Z \sim N(0,1)$. To już pozwala na wyznaczenie wartości krytycznej testu. Zatem, przy poziomie istotności α, wartość krytyczna z_α testu wynika z wyrażenia $P(Z > z_\alpha | H_0) = \alpha$. Stąd wnioskujemy, że górna linia karty kontrolnej ma postać:

$$y_\alpha = \mu_0 + z_\alpha D_s\left(\hat{Y}_{1,s}\right). \tag{9}$$

Jeśli $z_s \geq z_\alpha$, co jest równoważne nierówności $\hat{y}_{1,s} \geq y_\alpha$, to odrzucamy hipotezę H_0 z prawdopodobieństwem popełnienia błędnej decyzji równym α. Innymi słowy, w tym przypadku z prawdopodobieństwem pomyłki równym α twierdzimy, ze proces produkcyjny rozregulował się.

1.2. Przypadek nieznanej wartości wariancji zmiennej diagnostycznej

Zakładamy, że w kolejnych okresach czasu $t = 1,\ldots,D+1$ są przeprowadzane pomiary zmiennej diagnostycznej na produktach wylosowanych do kolejnych prób. Zmienną diagnostyczną w t-tym okresie czasu oznaczamy przez Y_t, jej wartość oczekiwaną przez $E(Y_t) = \mu_t$. Zakładamy, że wariancje $D^2(Y_t) = v_2$, dla $t = 1,\ldots,D+1$. Pozostałe momenty centralne oznaczamy przez $v_{r,t} = E(Y_t\text{-}\mu_t)^r$, $r = 3,4,\ldots$

Niech $s_t = (Y_{t,1}, Y_{t,2},\ldots,Y_{t,n_t})$ będzie próbą prostą, w której są obserwowane wartości zmiennej diagnostycznej Y_t, czyli w t-tym okresie czasu wylosowaną z rozkładu t-tej zmiennej diagnostycznej. Łączną próbę obserwowaną w D-okresach czasu oznaczamy przez $s = s_1 \cup s_2 \cup \ldots \cup s_D$. Rozmiar próby s_t wynosi n_t, a wiec rozmiar próby s wynosi $n = \sum_{k=1}^{D} n_k$. Wariancja v_2 może być szacowana za pomocą statystyk:

$$V_{2,s_t} = \frac{1}{n_t - 1}\sum_{i \in s_t}(Y_i - \overline{Y}_{s_t})^2, \qquad \overline{Y}_{s_t} = \frac{1}{n_t}\sum_{i \in s_t} Y_i, \qquad t=1,\ldots,D+1,$$

lub

$$\overline{V}_{2,s} = \frac{1}{D-1}\sum_{t=1}^{D} V_{2,s_t}.$$

Nas interesuje weryfikacja hipotezy o wartości oczekiwanej zmiennej diagnostycznej w okresie $D+1$, czyli:

$$H_0\colon \mu_{D+1} = \mu_0. \tag{10}$$

względem alternatywnej hipotezy

$$H_1\colon \mu_{D+1} > \mu_0. \tag{11}$$

Do tego celu wykorzystamy dane o rozkładzie prawdopodobieństwa zmiennej diagnostycznej gromadzone w próbach z wcześniejszych okresów czasu. Statystykę testową konstruujemy na podstawie następującego estymatora przeciętnej w $D+1$ okresie czasu:

$$\hat{Y}_{2,s_{D+1}} = \overline{Y}_{s_{D+1}} + \alpha_{s_{D+1}} (\overline{V}_{2,s} - V_{2,s_{D+1}}), \tag{12}$$

gdzie:

$$\alpha_{s_{D+11}} = \frac{V_{3,s_{D+1}}}{V_{4,s_{D+1}} - V^2_{2,s_{D+1}}}.$$

Wywiał (2009) wykazał, że jeśli $n_t \to \infty$ dla $t = 1,\ldots,D$, to $\hat{Y}_{2,s_{D+1}} \sim N\left(\mu_{D+1}, D^2\left(\hat{Y}_{2,s_{D+1}}\right)\right)$, gdzie

$$D^2\left(\hat{Y}_{2,s_{D+1}}\right) \approx D^2\left(\hat{Y}_{1,s_{D+1}}\right) + \frac{v_2\kappa^2_{D+1}}{D\overline{n}_{H,D}} \geq D^2\left(\hat{Y}_{1,s_{D+1}}\right) + \frac{v_2\kappa^2_{D+1}}{n}, \tag{13}$$

gdzie:

$$D^2\left(\hat{Y}_{1,s_{D+1}}\right) \approx \frac{v_2}{n_{D+1}}\left(1 - \kappa^2_{D+1}\right), \qquad \kappa_{D+1} = \frac{v_{3,D+1}}{\sqrt{v_2\left(v_{4,D+1} - v_2^2\right)}},$$

$$\overline{n}_{H,D-1} = \frac{D}{\sum_{t=1}^{D} \frac{1}{n_t}} \leq \overline{n}_D = \frac{1}{D}\sum_{t=1}^{D} n_k = \frac{n}{D},$$

przy czym $\overline{n}_{H,D-1}$ jest średnią harmoniczną rozmiarów prób.

Wariancję $D^2\left(\hat{Y}_{2,s_{D+1}}\right)$ można estymować za pomocą statystyki:

$$D^2_s\left(\hat{Y}_{2,s_{D+1}}\right) = \frac{\overline{V}_{2,s}}{n_{D+1}}\left(1 - \kappa^2_{s,D+1}\right) + \frac{v_2\kappa^2_{s,D+1}}{D\overline{n}_{H,D}}, \tag{14}$$

gdzie:

$$\kappa_{s,D+1} = \frac{V_{3,s_{D+1}}}{\sqrt{V_{2,s_{D+1}}\left(V_{4,,s_{D+1}} - V^2_{2,s_{D+1}}\right)}},$$

$$V_{r,s_t} = \frac{1}{n_t - 1}\sum_{i \in s_t} (Y_{t,i} - \overline{Y}_{s_t})^r, \text{ r=2,3,4,...}$$

W celu weryfikacji określonej wyrażeniem (7) hipotezy konstruujemy następującą statystykę testową:

$$U_s = \frac{\hat{Y}_{2,s_{D+1}} - \mu_0}{D_s\left(\hat{Y}_{2,s_{D+1}}\right)}. \tag{15}$$

Podobnie jak w uprzednim punkcie, można wykazać, że jeśli rozmiary prób $n_t \to \infty$ dla $t = 1,\ldots,D+1$ oraz hipoteza H_0 jest prawdziwa, to rozkładem granicznym prawdopodobieństwa zmiennej losowej U_s jest standardowy rozkład normalny zmiennej losowej $U \sim N(0,1)$. Zatem, przy poziomie istotności α, wartość krytyczna u_α testu jest wyznaczana z wyrażenia $P(U > u_\alpha | H_0) = \alpha$. Stąd wynika, że górna linia karty kontrolnej ma postać:

$$y_\alpha = \mu_0 + u_\alpha D_s\left(\hat{Y}_{2,s}\right). \tag{16}$$

Jeśli $u_s \geq u_\alpha$, co jest równoważne nierówności $\hat{y}_{1,s} \geq y_\alpha$, to odrzucamy hipotezę H_0 z prawdopodobieństwem popełnienia błędnej decyzji równym α. Oznacza to, iż z prawdopodobieństwem pomyłki równym α twierdzimy, że proces produkcyjny rozregulował się.

3. UWAGI KOŃCOWE

Przedstawiona procedura wyznaczania karty z pojedynczą linią kontrolną da się natychmiastowo uogólnić na przypadek dwóch takich linii. Wiąże się to tylko ze zmianą sposobu specyfikacji alternatywnej hipotezy, określonej wzorami (5) lub (11), które należy zastąpić odpowiednio następującymi $H_1: \mu \neq \mu_0$ lub $H_1: \mu_{D+1} \neq \mu_0$. Wówczas mamy do czynienia z dwustronnym obszarem krytycznym testu. Zatem np. wartości krytyczne $u_{1,\alpha/2}$ i $u_{2,\alpha/2}$ testu rozważanego w punkcie 2.2 wyznaczamy odpowiednio z wyrażeń $P(U \leq u_{1,\alpha/2} | H_0) = \alpha/2$ i $P(U \geq u_{2,\alpha/2} | H_0) = \alpha/2$.

Przedstawiona procedura konstrukcji kart kontrolnych dla asymetrycznej zmiennej diagnostycznej nie wymaga szczegółowych założeń o postaci rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej diagnostycznej. Wymaga się jedynie aby istniały momenty centralne rozkładu tej zmiennej co najmniej czwartego rzędu. Z drugiej jednak strony zaproponowana procedura wymagać będzie losowania prób o znacznych rozmiarach. Zwykle zakłada się, że rozkłady funkcji momentów centralnych z próby są zbieżne do rozkładu normalnego dla prób o rozmiarach rzędu kilkuset elementów, a w każdym razie o wielkości co najmniej stu elementów.

Duże rozmiary prób powiększają koszty kontroli jakości. Po to by je obniżyć można rozważyć użycie innych statystyk testowych, których dystrybuantę rozkładu można już przybliżać przy mniejszym rozmiarze próby. Wiadomo, że ciągi rozkładów symetrycznych są zwykle szybciej zbieżne do rozkładu normalnego. Zatem w szczególności logarytmowanie wartości zmiennej diagnostycznej powinno spowodować szybszą zbieżność rozkładu statystyk testowych określonych wzorami (8) i (15) do rozkładu normalnego. W tej sytuacji trzeba jeszcze pamiętać, że formalnie nie mamy już do czynienia z weryfikacją hipotezy statystycznej o wartości oczekiwanej zmiennej diagnostycznej Y, lecz z testowaniem hipotezy o nadziei matematycznej jej logarytmu, czyli $E(ln(Y))$. Zarysowana właśnie procedura umożliwi wyznaczenie wartości krytycznych rozważanych testów już przy mniejszym rozmiarze próby. Wspomnijmy jeszcze, iż w literaturze statystycznej rozważa się także inne transformacje symetryzujące rozkłady zmiennych losowych, por. np. Carroll i Ruppert (1988) lub Yeo i Johnson (2000).

Z założenia o stabilności wariancji zmiennej diagnostycznej wynika, że wariancja użytego do konstrukcji sprawdzianu testu estymatora regresyjnego średniej zmiennej diagnostycznej będzie malała wraz z biegiem czasu, czyli gdy liczba branych pod uwagę okresów czasu D będzie rosła, co skutkuje wzrostem liczebności łącznej próby, którą oznaczono przez n. Można wykazać, że to automatycznie spowoduje wzrost mocy proponowanego testu statystycznego, czyli zwiększa prawdopodobieństwo niepopełnienia błędu drugiego rodzaju. Innymi słowy to prowadzi do zmniejszenia ryzyka, mierzonego prawdopodobieństwem popełnienia błędu II rodzaju, czyli akceptacji nieprawidłowo przebiegającego procesu produkcyjnego. Jednak bardziej konkretne wyniki w tym zakresie będą możliwe po przeprowadzeniu odpowiednio zaplanowanego i wykonanego badania symulacyjnego mocy proponowanego testu.

BIBLIOGRAFIA

Carroll R., Ruppert D. (1988), *Transformation and Weighting in Regression*, Chapman and Hall, New York.

Cramér H. (1958), *Metody matematyczne w statystyce.*

Iwasiewicz A. (1999), Zarządzanie jakością, PWN, Warszawa–Kraków.

Kendall M.G. Stuart A. (1967), *The Advanced Theory of Statistics. Vol. 2 Inference and Relationship*, Charles Griffin and Company Limited, London.

Kończak G. (2007), *Metody statystyczne w sterowaniu jakością produkcji*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Katowicach.

Rao C.R. (1982), *Modele liniowe statystyki matematycznej*, PWN Warszawa.

Wywiał J.L. (1981), *O pewnych unormowanych współczynnikach asymetrii i spłaszczenia*, Przegląd Statystyczny, vol. 28, 263–269.

Wywiał J.L. (1983), *Unormowane współczynniki odchyleń od normalności rozkładu wielowymiarowej zmiennej losowej*, Przegląd Statystyczny, 30, 77–86.

Wywiał J.L. (2009), *Estimation of mean in domain when distribution of variables is skewed* w: *Multivariate Statistical Analysis* (red. Cz. Domański, J. Białek), Acta Universitatis Lodziensis, Folia Oeconomica nr 228, 93–103.

Yeo I.K., Johnson R. (2000), *A new family of power transformations to improve normality or symmetry*, Biometrika, 87, 954–959.