 www.pathofscience.org
ISSN 2413-9009

ОСНОВНЫЕ ДИДАКТИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ

Тестов Владимир Афанасьевич

Вологодский государственный университет, профессор кафедры математики и методики преподавания математики, доктор педагогических наук, профессор, Россия

Аннотация. В последнее время в математическом образовании обострилась проблема понимания при изучении основных математических понятий. Это во многом связано с тем, что стиль мышления школьников и студентов в силу интенсивного использования сетевого пространства становится образно-эмоциональным, все меньше тяготеет к абстрактным построениям, для них все более характерно фрагментарно-клиповое сознание.

В статье раскрыты те дидактические принципы, которые следует использовать при изучении математических понятий, и которые будут способствовать достижению понимания.

Ключевые слова: проблема понимания, принцип генерализации знаний, принцип поэтапности формирования знаний, понятие группы.

Введение

В настоящее время в математическом образовании основной проблемой является низкая учебная мотивация обучающихся, которая связана, прежде всего, с тем, что в процессе обучения не достигается понимание основных математических понятий. Проблема понимания обострилась в современных условиях, когда происходит интенсивное расширение сетевого образовательного пространства. Молодые люди развиваются в динамичной информационной среде, быстро осваивают новые информационные и коммуникационные средства и технологии для решения задач своей жизнедеятельности. Однако, они привыкают рассматривать эти средства и технологии чаще только как инструменты общения, развлечения, релаксации. Стиль мышления сегодняшних школьников и студентов за счет их постоянного общения в сети с масс-медиа становится образно-эмоциональным и все меньше тяготеет к абстрактным построениям, что идет вразрез с привычным вербальным стилем изложения учебного материала и со сложившимися принципами и методами усвоения содержания образования.

Трансформация личности в сетевом пространстве становится все более заметной. Философы даже ввели новое понятие «сетевая личность». У такой личности нарушается целостность знания, для людей все больше характерно фрагментарно-клиповое сознание, они перестают чувствовать необходимость воссоздания целостной картины мира. Отдельные фрагменты знаний, почерпнутые из Интернета, создают людям иллюзию пребывания на переднем крае науки и техники, определяют мозаичное мировоззрение личности. Во многих случаях изучаемый конкретный материал не складывается в систему знаний; математический багаж значительной части выпускников средних школ состоит из большего или меньшего числа слабо связанных между собой догматически усвоенных сведений, будучи не в состоянии самостоятельно ее структурировать и осмыслить. Представление о математике как о единой науке со своим предметом и методом у них отсутствует. Поэтому очень важно выделить те дидактические принципы, соблюдение которых в методике обучения математике поможет решить проблему понимания, обеспечить целостность и единство в обучении математике, сформировать научное представление о математике, ее методах.

Результаты исследования

Хотя в дидактике ряд основных принципов построения обучения известен еще со времен Я. А. Коменского, однако в связи с изменениями в обществе некоторые их этих принципов выходят на передний край, а другие, наоборот, теряют свое былое значение.

В частности, в условиях сетевого обучения потерял свое значение принцип систематичности изложения материала. Добиться строгой последовательности, линейности в образовательном процессе уже не удается. Процесс восприятия учеником нового материала в подобных условиях становится, как правило, нелинейным. Садясь за компьютер, он, не задумываясь, перескакивает с одного на другое, погружается в еще незнакомые области знаний либо возвращается к уже забытому или по каким-то причинам пропущенному материалу. Требование поступательного, последовательного процесса познания, когда все новое основывалось бы на предыдущем, «понятном» и «объясненном», устаревает, становится несовременным. Когда человек осознает, что он что-то не понимает, и начинает искать сам нужную информацию или задавать учителю вопросы, происходит важнейший акт самообразования.

В новой системе обучения и воспитания следует, в первую очередь, отказаться от строгой упорядоченности классических подходов к образованию; ее методологической основой должна стать теория беспорядочности, хаоса, когда в учебный процесс вводится фактор творческой непредсказуемости, а главные усилия педагогов направляются на создание мощной креативной среды, где каждый обучающийся наделяется правом выбирать и самостоятельно конструировать свою образовательную траекторию [11].

Преодолеть разобщенность различных математических дисциплин, изолированность отдельных тем и разделов, обеспечить целостность и единство в обучении математике возможно лишь на основе выделения в ней наиболее существенных, основных стержней. Такими стержнями в ма-

 www.pathofscience.org
ISSN 2413-9009

тематике, как отмечали А. Н. Колмогоров [4] и другие крупнейшие ученые, являются математические структуры, которые подразделяются, согласно Н. Бурбаки, на алгебраические, порядковые и топологические [2, с. 245-249]. Поэтому одним из определяющих принципов построения любого математического курса является принцип генерализации знаний, который означает, что начинать построение курса надо с выделения основных структур и понятий и организовывать материал обучения в порядке логического развертывания этих структур и понятий по мере их конкретизаций в систему математической науки. Изучение конкретных математических структур должно осуществляться таким образом, чтобы в первую очередь выявлялись наиболее их общие, фундаментальные свойства; для этого начинать ознакомление с главного, с общего, не с элементов, а со структуры.

Используя этот принцип, можно сформировать не только отдельные знания, отдельные качества какого-либо вида мышления, но и всю его структуру, раскрыть внутренние связи и отношения фундаментальных понятий, показать их проявления на конкретных фактах и явлениях действительности. Фактически это положение содержалось еще в учении Я. А. Коменского [5], согласно которому в обучении, с самого его начала, в ум ребенка должны быть вложены некоторые фундаментальные, базовые «корневые и стволовые» общенаучные основания. Это значит, что расположение изучаемого материала должно быть таково, чтобы все последующее вытекало из предыдущего, было его развитием, а не представляло бы собой совсем нового знания.

Генерализация знаний позволяет обеспечить и лучшее понимание, поскольку порождает структуру, которая значительно сильнее взаимодействует с новыми знаниями, чем отдельные факты. А чем больше разных связей новых знаний с уже имеющимися в долговременной памяти может быть установлено, тем глубже и шире понимание нового материала, тем лучше он усваивается [10].

Генерализация знаний позволяет из основных понятий как на стержнях построить скелет математики. Об этом писал еще Ф. Клейн: «чисто логические концепции должны составить, так сказать, жесткий скелет организма математики, сообщающий ей устойчивость и достоверность» [3, с. 33]. Этот скелет в качестве связующих стержневых понятий, изучаемых на протяжении всего курса математики и тесно взаимосвязанных, и должны составить математические структуры.

Но, как показывает опыт, изучение основных математических структур при традиционном изложении с трудом дается и школьникам, и студентам. Должна присутствовать достаточная пропедевтика ведущих понятий с учетом возрастных особенностей учащихся. Такие обобщающие и объединяющие понятия, как функция, группа, величина, число могут появляться в обучении не как исходные пункты, а как итоги изучения, подводимые по мере накопления фактов и закономерностей, дающих повод к соответствующим обобщениям.

 www.pathofscience.org
ISSN 2413-9009

В процессе обучения количественные изменения в мышлении и в других личностных качествах учащихся происходят постоянно, а качественные – скачкообразно, в определенные периоды, поэтому выделение фаз, ступеней развития является необходимым условием правильного подхода к отбору содержания обучения, построения его по принципу «спирали». Весь опыт обучения математике показывает существенные преимущества спиральной структуры знаний, когда материал располагается в виде развертывающейся спирали, причем каждый виток спирали (цикл) образует внутренне целостную тему [12].

Ступени в таком последовательно-повышаемом содержательном познании, соотнесенные с уровнями восприятия учебной информации, в дидактике обычно называются уровнями обучения или уровнями усвоения. Разными авторами (В. П. Беспалько [1], И. Я. Лернер [6], М. Н. Скаткин [8] и др.) предложено рассматривать различные такие уровни.

Но, по-видимому, более правильно говорить не об уровнях обучения, а о некоторых ступенях интеллектуального уровня учащихся в процессе обучения – уровнях научного познания. Конструктивно эти уровни скорее могут быть представлены спиральными связными ступенями, чем разорванными параллельными ступенями. Подчинение и связь этих уровней характеризуется мерой последовательного продвижения в приобретении знаний и в оперировании более высокими формами и инструментом научного познания.

Таким образом, другим важнейшим принципом построения математических курсов является принцип поэтапности формирования знаний (принцип фундирования). В соответствии с этим принципом процесс обучения следует рассматривать как многоуровневую систему с обязательной опорой на нижележащие, более конкретные уровни научного познания. Без такой опоры обучение может стать формальным, дающим знание без понимания [13].

Взгляды о необходимости выделения последовательных этапов в формировании понятий о математических структурах среди математиков-педагогов широко распространены. Еще Ф. Клейн в своих лекциях для учителей отмечал необходимость предварительных этапов в изучении основных математических понятий: «Мы должны приспособляться к природным склонностям юношей, медленно вести их к высшим вопросам и лишь в заключение ознакомить их с абстрактными идеями; преподавание должно идти по тому же самому пути, по которому все человечество, начиная со своего наивного первобытного состояния, дошло до вершин современного знания. ... Как медленно возникали все математические идеи, как они почти всегда всплывали сперва, скорее, в виде догадки и лишь после долгого развития приобретали неподвижную выкристаллизованную форму систематического изложения» [3].

По мнению А. Н. Колмогорова, обучение математике должно состоять из нескольких ступеней, что он обосновывал тяготением психологических установок учащихся к дискретности и тем, «естественный порядок наращивания знаний и умений всегда имеет характер «развития по спирали». Принцип «линейного» построения многолетнего курса, в частности математики, по его мнению, лишен ясного содержания. Однако логика науки не требует, чтобы «спираль» обязательно разбивалась на отдельные «витки» [4].

В качестве примера использования в обучении принципов генерализации и поэтапности рассмотрим процесс формирования в обучении понятия такой математической структуры, как группа. Первым этапом в этом процессе можно считать еще дошкольный возраст, когда дети знакомятся с алгебраическими операциями (сложения и вычитания), которые проводятся непосредственно над множествами предметов.

Дальше этот процесс продолжается в школе. Можно сказать, что весь курс школьной математики пронизан идеей группы. Знакомство учащихся с понятием группы начинается по сути дела, уже в 1-5 классах. В этот период в школе алгебраические операции производятся уже над числами. Теоретико-числовой материал является в школьной математике наиболее благодатным материалом для формирования понятия об алгебраических структурах. Целое число, сложение целых чисел, введение нуля, нахождение для каждого числа ему противоположного, изучение законов действий – все это, по существу, этапы в формировании понятия об основных алгебраических структурах (группах, кольцах, полях).

В последующих классах школы учащиеся сталкиваются с вопросами, которые способствуют расширению знаний такого характера. В курсе алгебры осуществляется переход от конкретных чисел, выражаемых цифрами, к абстрактным буквенным выражениям, обозначающим конкретные числа лишь при определенном истолковании букв. Алгебраические операции производятся уже не только над числами, но и над объектами другой природы (многочленами, векторами). Учащиеся начинают осознавать универсальность некоторых свойств алгебраических операций.

Особенно важным для осознания идеи группы является изучение геометрических преобразований и понятий композиции преобразований и обратного преобразования. Однако, последние два понятия не отражены в ныне действующей школьной программе (о последовательном выполнении движений и об обратном преобразовании лишь вскользь упоминается в учебнике А. В. Погорелова [7]).

В элективных и факультативных курсах целесообразно рассмотреть группы самосовмещений некоторых геометрических фигур, группы вращений, орнаментов, бордюров, паркетов и различные приложения теории групп в кристаллографии, химии и т.д. Эти темы, где приходится знакомиться с математической постановкой практических задач, вызывают у учащихся наибольший интерес.

 www.pathofscience.org
ISSN 2413-9009

При знакомстве в вузе с понятием группы в общем виде необходимо опираться на ранее полученные знания, которые выступают структурообразующим фактором в системе математической подготовки студентов, что позволяет надлежащим образом решить проблему преемственности между школьной и вузовской математикой. В частности, на школьные знания следует опираться при рассмотрении такого важнейшего примера, как аддитивная группа целых чисел. Значение этого примера вытекает из того факта, что этой группе изоморфна любая бесконечная циклическая группа [9].

В большинстве педвузов программа предусматривает введение понятия группы в начале курса, что позволяет значительно повысить теоретический уровень изложения алгебраических и других математических курсов. Однако зачастую первокурсники не осознают роли аксиом в математическом определении, неточно представляют его схему. Следует признать, что необходим предварительный этап формирования понятия группы, роль которого сводится к четкому описанию математического определения и ряда вспомогательных понятий (отображения, алгебраической операции).

Вводить понятие группы, имея только примеры числовых групп, представляется нецелесообразным. Числовые группы все бесконечные и абелевы, и у студентов может возникнуть неправильное первое представление о группах. Поэтому предварительно полезно изучить хотя бы подстановки, умножение подстановок и свойства этой операции. Группы подстановок дают значительно более полное представление о группе. Эти группы являются конечными и некоммутативными. Кроме того, это так называемый модельный пример, поскольку любая конечная группа изоморфна некоторой группе подстановок.

На первом же курсе следует также хорошо изучить группу корней *n-й* степени из единицы, первообразные корни, их свойства. Эта группа тоже является модельным примером, поскольку любая конечная циклическая группа порядка изоморфна группе корней *n-й* степени из единицы.

Очень полезным примером является группа симметрий ромба (четвертная группа Клейна), поскольку это наиболее простая группа, не являющаяся циклической. Такие наглядные модели групп более конструктивны и наглядны, более доступны, чем само абстрактное понятие группы. Наглядные модели возбуждают интуицию, способны предвосхитить общий результат и даже его доказательство. Они на первых этапах обучения могут выступать заменителями абстракций, по крайней мере, на уровне правдоподобных рассуждений. Наглядные модели должны отражать более или менее полно всю совокупность существенных свойств данной абстракции.

Выводы

В условиях обучения в сетевом пространстве на первое место в методике обучения математике выдвигаются принцип генерализации знаний и принцип поэтапности формирования знаний. Соблюдение этих принципов способствует решению проблемы понимания при обучении математике, а также решению проблемы преемственности между различными ступенями образования, в частности между школой и вузом. В вузовском курсе эти принципы реализуются на основе модульного принципа построения учебных предметов.

Перечень использованных источников

1. Беспалько В. П. Природосообразная педагогика / В. П. Беспалько. – Москва : Народное образование, 2008. – 510 с.

2. Бурбаки Н. Элементы математики / Н. Бурбаки ; пер. с фр. ; под ред. Д. А. Райкова– Москва : Физматгиз, 1958-1967. – Кн. 8: Очерки по истории математики. – 292 с.

3. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей : [в 2 т.] / Ф. Клейн ; пер. с нем. – 4-е изд. – Москва : Наука, 1987. –Т. 1: Арифметика, алгебра, анализ. – 432 с.

4. Колмогоров А. Н. К обсуждению работы по проблеме «Перспективы развития советской школы на ближайшие тридцать лет» /А. Н. Колмогоров // Математика в школе. – 1990. – № 5. -С. 59-61.

5. Коменский Я. А. Педагогическое наследие / Я. А. Коменский // Педагогическая библиотека. – Москва : Педагогика, 1987. – Т. 1. – 656 с.

6. Лернер И. Я. Процесс обучения и его закономерности / И. Я. Лернер. – Москва : Знание, 1980. – 96 с.

7. Погорелов А. В. Геометрия : учеб. для 7-11 кл. сред. шк. / А. В. Погорелов. – Москва : Просвещение, 1990. – 383 с.

8. Скаткин М. Н. Проблемы современной дидактики / М. Н. Скаткин. – 2-е изд. – Москва : Педагогика, 1984. – 95 с.

9. Тестов В. А. О методике формирования понятия группы / В. А. Тестов // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. – 2005. – Выпуск 7. – С. 166-170.

10. Тестов В. А. Особенности формирования у школьников основных математических понятий в современных условиях [Электронный ресурс] / В. А. Тестов // Концепт. – 2014. – № 12. – Режим доступа: https://e-koncept.ru/2014/14333.htm. – Загл. с экрана.

11. Тестов В. А. Переход к новой образовательной парадигме в условиях сетевого пространства / В. А. Тестов // Инновации в образовании. Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. – 2012. – № 4 (1). – С. 50-56.

12. Тестов В. А. Стратегия обучения математике : монография / В. А. Тестов. – Москва : Технологическая школа бизнеса, 1999. – 303 с.
13. Тестов В. А. Формирование основных математических понятий у школьников на основе концепции фундирования / В. А. Тестов // Ярославский педагогический вестник. – 2015. – № 3. – С. 48-52.

Порядок цитирования:

Тестов В. А. Основные дидактические принципы при изучении математических понятий [Электронный ресурс] : научная статья / В. А. Тестов // Траектория науки. – 2016. – № 1 (6). – 0,44 авт. л. – Режим доступа: http://pathofscience.org/index.php/ps/article/view/39. – Загл. с экрана.

BASIC DIDACTIC PRINCIPLES IN THE STUDY OF MATHEMATICAL CONCEPTS

Testov Vladimir

Vologda State University, Professor of Department of Mathematics and Mathematics Teaching Methods, Doctor of Science (Education), Professor, Russia

Abstract. The problem of understanding in the study of basic mathematical concepts in mathematics education has exacerbated during recent years. This is largely due to the fact that the style of thinking of pupils and students thanks to the intensive use of the Web becomes figurative and emotional, less inclined to abstract constructions. Fragments-clip thinking has become more common for most of students.

The article deals with the didactic principles to be used in the study of mathematical concepts, which will contribute to achieving understanding.

Keywords: problem of understanding, principle of generalization of knowledge, principle of stepwise formation of knowledge, concept of group.