

STUDIA I ROZPRAWY

EDUKACJA HUMANISTYCZNA nr 2 (45), 2021
Szczecin 2021

Joanna Kandzia
Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego
w Warszawie

KOGNITYWNE ASPEKTY W EDUKACJI MATEMATYCZNEJ

Wprowadzenie

Carl Friedrich Gauss stwierdził, że „[...] Istotą matematyki jest poszukiwanie rygorystycznej ścisłości dowodowej”¹. Utożsamia się ją ze schematyzmem i odtwórczością. Najlepiej można określić matematykę jako najogólniejszą naukę dedukcyjną. Przedmiot badań matematyki stanowią teorie uwzględniające w swych rozważaniach pewien zespół pojęć pierwotnych, jakiś układ prawd o tych przedmiotach, jakiś zestaw reguł wnioskowania.

Dydaktyka matematyki a konstruktywizm

Konstruktywizm jest nurtem socjologicznym, którego podstawowe założenia wciąż wzbudzają wiele kontrowersji. Pomimo tego konstruktywistyczna teoria uczenia się jest akceptowana zarówno w teorii jak i w praktyce pedagogicznej. W teorii konstruktywizmu pedagogicznego łączą się wszystkie najlepsze tradycje nauczania - od Sokratesa, Platona, Arystotelesa czy św. Augustyna (twierdzili, że w poszukiwaniu prawdy należy polegać na doświadczeniach zmysłowych) przez Komeńskiego, po Korczaka, Montessori i Deweya. Ich podstawę teoretyczną tworzą prace Piageta (określanej często jako konstruktywizm rozwojowo-poznawczy, wiedza jest aktywnie tworzona/konstruowana przez uczącego się, a nie biernie odbierana z otoczenia)², Wygotskiego (rozwój umysłowy jest procesem społeczno-kulturowym)³ i Brunera (uczenie się nie jest jedynie funkcją receptywną jednostki,

¹ M. Kline, *Podstawy matematyki*, Problemy 1997/1, s. 45-58.

² J. Piaget, *Studia z psychologii dziecka*, PWN, Warszawa 1966.

³ L.S. Wygotski, *Mind in society, The development of higher psychological processes*, Cambridge, Cambridge University Press 1978.

dzięki której otrzymuje ona informacje o otaczającej rzeczywistości, lecz uczestniczeniem w konstruowaniu społecznego świata oraz wspólnej kultury)⁴.

Pod pojęciem konstrukttywizmu rozumie się zbiór teorii nie tyle nowych, co wciąż na nowo przywoływanych i interpretowanych w różnych dyscyplinach naukowych, w tym w psychologii, filozofii, socjologii czy pedagogice. Konstrukttywistyczne ujęcie procesu uczenia się wymaga uwzględnienia przede wszystkim dwóch perspektyw: epistemologicznej, a więc odpowiedzi na pytanie, w jaki sposób ludzka wiedza tworzona jest w społeczeństwie oraz psychologicznej skupiającej się na sposobach tworzenia tejże wiedzy w umyśle jednostki. Istnieje bardzo wiele psychologicznych teorii uczenia się uwzględniających konstrukttywistyczny punkt widzenia, to znaczy uznających osobę uczącą się za aktywną wybiórczo oraz zorganizowaną jednostkę⁵.

Jak twierdzi Klaus-Stańska „[...] Dwie perspektywy konstrukttywizmu epistemologiczną i psychologiczną łączy przekonanie, że wiedza nie jest „obiektywna” i ponadosobowa; przeciwnie, wiedza jest zawsze „czyjaś””. Tak więc w procesie wytwarzania wiedzy i korzystania z niej kluczowe znaczenia ma kultura, a zwłaszcza język jako jej główny element. Przyjęcie tego stanowiska „[...] ma daleko idące konsekwencje dla metodologii i teorii wszystkich dyscyplin naukowych, w tym dydaktyki, a dla tej ostatniej dodatkowo tworzy nowe konteksty definiowania wiedzy, będącej ośrodkiem praktycznych działań dydaktycznych szkoły, oraz strategii jej intencjonalnego opracowywania”⁶.

W kontekście głównych tez konstrukttywizmu, zważywszy na to, że niniejsze opracowanie ma jedynie zasygnalizować różnorodność podejść naukowych, posłużę się cytatem: „[...] Konstrukttywizm to filozofia nauczania, która bazuje na założeniu, że refleksja nad naszym doświadczeniem jest doskonałym punktem wyjścia do własnego rozumienia świata. Każdy z nas tworzy własne „reguły” i „umysłowe modele”, które staramy się stosować, aby lepiej zrozumieć nasze doświadczenia w poznawaniu otaczającego nas świata. Uczenie to proces, który pozwala na dostosowanie się naszych umysłowych modeli do nowych doświadczeń”⁷.

Jest to, zatem zbiór koncepcji i twierdzeń o ograniczeniach ludzkiego poznania, o subiektywizmie poznania, trudnościach w osiągnięciu ostatecznej prawdy oraz jej zmienności. Koncepcja konstrukttywizmu matematycznego, będąca w zgodzie z filozofią mówi, że obiekty matematyczne (np.: trójkąt, liczba Pi, nieskończoność, zbiór liczb naturalnych) tworzy się za pomocą konstrukcji, które są realne w skończonej liczbie kroków. Jeżeli zostanie podany skończony algorytm budowy danego bytu wtedy dopiero uznaje się jego istnienie i matematyk może się nim zajmować. Prostym przykładem jest konstrukcja zbioru liczb rzeczywistych ze zbioru liczb naturalnych.

⁴ J.S. Bruner, H. Haste, *Making sense. The child's construction of the world*, New York, Methuen 1987, [w:] Tekst (w) sieci, http://encyklopediadziecinstwa.pl/index.php/Konstrukttywizm_jako_teoria_uczenia_si%C4%99, [2021.02.10].

⁵ B. Gofron, *Konstrukttywistyczne ujęcie procesu uczenia się*, [w:] *Periodyk Naukowy Akademii Polonijnej*, 2013/1 (7), s. 159.

⁶ D. Klus-Stańska, *Dydaktyka wobec chaosu pojęć i zdarzeń*, Warszawa 2010, s. 266.

⁷ W. Muzal, *Teorie i filozofie nauczania, Wirtualna edukacja*, Czasopismo Elektroniczne, [w:] Tekst (w) sieci, <http://grupper.ieee.org/groups/ltf/we/naucz.html>, [2005.09.21].

Kanon konstruktywizmu pozostaje w zgodzie z współczesnymi tendencjami w nauczaniu matematyki. Nowe metody nauczania w matematyce znakomicie wpisują się w paradygmat, oparty na konstruktywistycznym modelu kształcenia. Uczenie się jest procesem aktywnego konstruowania wiedzy, która zawsze musi być oparta na wiedzy już posiadanej, a ta jest determinantem procesu uczenia. Uczeń musi być aktywny podczas konstruowania wiedzy. Nie może być pasywnym „odbiorcą” informacji. Uczenie jako indywidualna konstrukcja umysłu ludzkiego, powinno być funkcją działania, ma wypływać z działania, a nie poprzedzać go⁸. Przekazywać można tylko informacje. Wiedza jest nieprzekazywalna. Rolą nauczyciela jest modelowanie procesów poznawczych ucznia, na podstawie procesów poznawczych stosowanych przez ekspertów podczas rozwiązywania problemów. W trakcie uczenia tworzy się umysłowa, pojęciowa struktura, którą trzeba stopniowo ulepszać i konkretyzować.

We współczesnej teorii konstruktywizmu istotne jest ustalenie w jaki sposób uczeń interpretuje zjawiska, jak je rozumie i w jakiej formie konstruuje znaczenia. Jest to niezmiernie istotne w porozumiewaniu się nauczyciela z uczniami językiem matematyki. Rozwiązywanie problemów matematycznych aktywnie angażuje jednostkę w konstruowanie nowej wiedzy, gdzie rzeczywistość zewnętrzna często stanowi odkrycie dokonane nieświadomie przez odkrywcę. O charakterze i zasięgu tych procesów decydują: doświadczenia, kontekst społeczno-kulturowy, rasa, gospodarka, poziom oświaty, zawód, miejsce zamieszkania, płeć czy religia. Umysł ludzki nadaje sens bodźcom percepcyjnym. Jest aktywny i poszukujący. Wiedza nie jest pakietem informacji, jest dynamicznym procesem interakcji, uczących się ludzi ze światem.

Niebagatelnym sprzymierzeńcem pomagającym wcielić idee konstruktywizmu w nauczaniu matematyki są nowe technologie informacyjne. Nauczanie wspomagane narzędziami komputerowymi staje się bardziej zindywidualizowane. Praca z wykorzystaniem narzędzi technologii informacyjnych sprawia, że jednostka wykorzystuje oprócz tekstu obraz, poszerzając tym samym dopływ informacji do mózgu. Sprawniej je przetwarza, formułuje myśli a co za tym idzie, sprawniej działa. W prosty sposób przenosi się to na edukację matematyczną. Matematyka wspomagana mediami cyfrowymi jest atrakcyjna poznawczo. Nie ma czasu na nudę i znużenie. Zależności i przekształcenia powstają w czasie. Na szczególną uwagę zasługują interaktywne programy matematyczne takie, jak: GeoGebra, Cabri czy Wolfram Alpha⁹; matematyczne programy online - można pokazać uczniom, że nauka matematyki może być tak ciekawa, jak ich ulubione gry komputerowe; programy użytkowe, np. arkusz kalkulacyjny; zasoby internetowe stron WWW dotyczące przedmiotu.

Dynamiczne oprogramowanie matematyczne jakim jest GeoGebra łączy opcje algebraiczne, geometryczne i statystyczne. W prosty sposób pozwala tworzyć dynamiczne konstrukcje składające się z punktów, wektorów, odcinków, prostych, krzywych stożkowych, wykresów funkcji. Znajdować miejsca geometryczne punktów, wykonywać prze-

⁸ D.H. Jonassen, L. Rohrer-Murphy, *Activity Theory as a Framework for Design Constructivist Learning Environments*, ETR&D Springer, USA 1999.

⁹ Tekst (w) sieci, <https://www.wolframalpha.com>, [2021.10.11].

kształcenia geometryczne, zadania statystyczne, używać jej jak arkusza kalkulacyjnego; pozwala animować obiekty, tworzyć własne narzędzia oparte na istniejącej konstrukcji. Godnymi polecenia są programy edukacyjne online, np.: *maths is fun*¹⁰ - znakomita moc algebrze, geometrii oraz grach; *Geometry Expressions*¹¹ - pomocne w zrozumieniu twierdzenia Pitagorasa; strona *jakubas.pl*¹² - programy i gry komputerowe przydatne w nauczaniu matematyki w szkole średniej, programy na kalkulatory graficzne; aplikacja *kahoot* z quizami matematycznymi (i do ich tworzenia), kształcąca rozrywką matematyczna dostarczająca wielu emocji¹³. Coraz większą popularność zyskuje oprogramowanie do wirtualnej i rozszerzonej rzeczywistości¹⁴. Oferta programów edukacyjnych jest bardzo obszerna¹⁵ i ciągle ewaluuje.

Media cyfrowe w edukacji matematycznej stwarzają nowe, dodatkowe możliwości porozumiewania się, wspierają twórczy rozwój uczącej się osoby. Ich funkcja to przede wszystkim pomoc dydaktyczna (komputer, tablica interaktywna) oraz element składowy matematyki, urządzenie w połączeniu z metodami informatycznymi wzbogacające i rozszerzające jej zakres i metody.

Kognitywistyka w edukacji matematycznej

Nauką zajmującą się zjawiskami dotyczącymi umysłu i wszystkim co jest z nim związane, czyli sposobami postrzegania bodźców, oddziaływania umysłu z innymi umysłami i ze światem jest kognitywistyka.

Zrozumieniem umysłu zajmują się również niektóre działy psychologii, sztucznej inteligencji, psycholingwistyki, nauk o mózgu i filozofii kognitywnej. Można też mówić o antropologii, psychofizyce, lingwistyce komputerowej, sztucznym życiu, sieciach neuronalnych, algorytmach ewolucyjnych czy komputerowym widzeniu¹⁶.

¹⁰ Tekst (w) sieci, <http://www.mathsisfun.com>, [2021.10.11].

¹¹ K. Majewska, *Jak Geometry Expressions pomaga w zrozumieniu twierdzenia Pitagorasa*, „45 Minut, Toruński Przegląd Oświatowy”, 2009/2, s. 25-26.

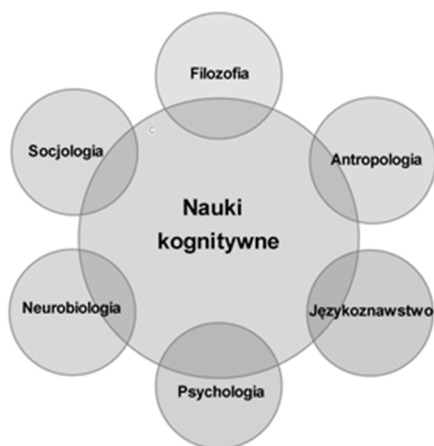
¹² Tekst (w) sieć, <https://jakubas.pl>, [2021,17.11].

¹³ Tekst (w) sieci, J. Kandzia, <https://navoica.pl/courses/course-v1:UKSW+MPNM-2+2021-2/course>, 2021.

¹⁴ Ch. Sternig, M. Spitzer, M. Ebner, *Learning in a Virtual Environment: Implementation and Evaluation of a VR Math-Game*, [w:] G. Kurubacak, H. Altinpulluk (Eds.), *Mobile Technologies and Augmented Reality in Open Education*, 2017, s. 175-199.

¹⁵ J. Kandzia, *Nowe metody nauczania w matematyce*, WEMA, Warszawa 2012, s. 198-200.

¹⁶ W. Duch, *Czym jest Kognitywistyka? Kognitywistyka i Media w Edukacji* 1998/1, s. 8-27.



Rysunek 1. Nauki zajmujące się zrozumieniem umysłu¹⁷

Kognitywizm wykorzystując zdobycze różnych dziedzin nauki pozwala myśleć o jednostce, społeczeństwie, kulturze czy polityce w kategoriach przetwarzania informacji, generowania wiedzy, komputeryzacji i komunikacji językowej¹⁸.

Kognitywistyczna teoria uczenia się oparta jest na wielomagazynowym modelu pamięci skonstruowanym na założeniach teorii przetwarzania informacji, istniejących w odrębnych strukturach, w których gromadzi się odpowiednio zakodowane informacje. R.C. Atkinson i R.M. Shiffrin zaproponowali trzy bloki pamięci, które różnią się od siebie ze względu na pojemność, czas przechowywania oraz dominujący kod: ultrakrótkotrwała (sensoryczna), krótkotrwała, długotrwała. Model ten został poddany krytyce. Tak określone struktury magazynowe są tylko konstruktami teoretycznymi, w których nie ma mowy o miejscach dokonywania przekształceń informacji możliwych do rejestrowania przez badaczy¹⁹.

Sporą popularność, jako sposób opisu ogólnej konstrukcji umysłu zyskała koncepcja poziomów przetwarzania informacji zaproponowana w 1972 roku przez F.I.M. Craika i R.S. Lockharta. Miała ona stworzyć ogólne ramy teoretyczne badań nad pamięcią. Teoria ta zakłada, że każda informacja jest przetwarzana przez te same struktury ale na różnym poziomie „głębokości” czyli zakresie i intensywności przetwarzania informacji. Przechodząc na głębsze poziomy przetwarzania informacji wzrasta nie tylko liczba ale także złożoność operacji, jakim poddawane są informacje docierające do systemu podczas procesu przetwarzania. Zakłada się co najmniej trzy poziomy przetwarzania: sensoryczna analiza danych, semantyczna interpretacja odbieranego sygnału, aktywizacji wiedzy już posiadanej. W procesie uczenia się przetwarzanie informacji na głębszych poziomach wpływa na

¹⁷ Źródło: opracowanie własne.

¹⁸ J. Koziół, *Koncepcje psychologiczne człowieka*, Żak, Warszawa 2000, s. 172-173.

¹⁹ Tekst (w) sieci, <http://www.eduteka.pl/doc/modele-wielomagazynowe-pamieci>, [2015.07.26].

ich zapamiętywanie. Nie ilość powtórzeń, ale myślenie w o wiele większym stopniu zwiększa efekty uczenia się²⁰.

Rozwój technik komputerowych umożliwia interaktywność i wirtualność. Otwiera tym samym obszary badań nad światem rzeczywistym i tym istniejącym potencjalnie. Pojawiają się nowe pytania dotyczące możliwości i ograniczeń teorii kognitywnych, różnych podejść do zagadnień współczesnej nauki. Przy braku spójności rozważań teorii poznawczej poglądy na procesy poznawcze sformułowane przez B. Siemienieckiego są bardzo ciekawe:

- ✓ twardy kognitywizm – zmierzający do algorytmicznego modelu umysłu,
- ✓ miękki kognitywizm – zmierzający do ucieleśnionego modelu umysłu.

W każdej tendencji jako podstawowe elementy powinny występować: aktywność poznawcza jednostki ujmowana w kategoriach poznawczych lub umysłowych; zrozumienie aktywności umysłowej człowieka – komputer jako narzędzie do eksperymentowania oraz model funkcjonowania umysłu; świadome i racjonalne procesy opisane w kategoriach przetwarzania informacji; nauka (interdyscyplinarna) o procesach poznawczych; korzenie w tradycji zachodnioeuropejskiej filozofii poznania²¹. Każda z tych sfer ma duże znaczenie w procesie dydaktycznym wspomaganym technologiami informacyjnymi.

Umysłowe mechanizmy myślenia matematycznego

Matematycy i psycholodzy od dawna badają umysłowe mechanizmy tkwiące u podstaw myślenia matematycznego. Ci pierwsi; J. Hadamard, M. Kline, G. Polya zajmują się systematyczną refleksją nad istotą myślenia w matematyce^{22, 23, 24}. Drudzy natomiast, próbują mierzyć różne wskaźniki rozwiązywania zadań i wnioskowania o strukturze zdolności matematycznych. Badania te zainicjował E. Thorndike. Poglądy jego są dość bliskie współczesnym, mówią o dyspozycjach matematycznych ogólnych jako koniecznych, lecz niewystarczających do ujawnienia i rozwinięcia zdolności matematycznych. Istotna jest tutaj zdolność tworzenia systemów relacyjnych, reprezentowanych przez struktury symboli. W sferze sprawności najważniejsza jest wizualizacja, czyli zdolność przekodowywania wyrażeń symbolicznych w obrazy geometryczne²⁵.

Twórcą nowoczesnej heurystyki był G. Pólya ze swoją metodą „odkrywania w matematyce”. Kwestię rozwiązywania zadań interpretował tak, że „[...] Rozwiązywać zadanie, to poszukiwać drogi pokonania trudności, drogi pozwalającej na ominięcie przeszkód, na osiągnięciu celu, którego nie sposób osiągnąć od razu i wprost. Rozwiązywanie zadań sta-

²⁰ T. Zaręba, *Teoria poziomów przetwarzania informacji*, [w:] Tekst (w) sieci, http://www.ppp.tnb.pl/viewpage.php?page_id=104, [2015.07.26].

²¹ B. Siemieniecki, *Kognitywistyka a edukacja medialna*, T. Lewowicki, B. Siemieniecki (red.), [w:] *Współczesna technologia informacyjna i edukacja medialna*, Adam Marszałek, Toruń 2005.

²² J. Hadamard, *Psychologia odkryć matematycznych*, PWN, Warszawa 1964, s. 90-91.

²³ M. Kline, *Podstawy matematyki*, Problemy 1977/1, s. 45-58.

²⁴ G. Pólya, *Odkrycia matematyczne*, WNT, Warszawa, 1975/13, s. 279-289.

²⁵ E. Thorndike, *Eksperyment w ocenianiu problemów algebry*, *The Mathematics Teacher*, 1914/6 (3), [w:] Tekst (w) sieci, https://pl.qaz.wiki/wiki/Edward_Thorndike, [2021.02.16].

nowi jedną ze specyficznych właściwości intelektu, a intelekt to specyficzny rys gatunku ludzkiego. Rozwiązywanie zadań można, więc uznać za najbardziej charakterystyczną domenę aktywności człowieka²⁶. Odgadywać i sprawdzać, to podstawowa dyrektywa tej metody. Jest ona efektywna przy rozwiązywaniu zadań matematycznych typu – udowodnić (prawdziwość lub nie, danego twierdzenia) i znaleźć (skonstruować, wytworzyć, identyfikować). G. Pólya mówił również o regułach postępowania rozwiązującego: racjonalnie; oszczędnie – bez założonych z góry ograniczeń; wytrwale – ale różnorodnie.

Zwracał również uwagę na reguły preferencji: łatwiejsze ma pierwszeństwo przed trudniejszym; to, co lepiej znane ma pierwszeństwo przed tym, co jest znane gorzej; obiekt mający więcej punktów wspólnych z zadaniem ma pierwszeństwo przed obiektem mającym mniej takich punktów; całość ma pierwszeństwo przed częściami, główne części przed częściami pozostałymi, bliższe części zadania przed bardziej oddalonymi; zadania rozwiązane wcześniej i zawierające ten sam rodzaj niewiadomej mają pierwszeństwo przed innymi rozwiązanymi wcześniej zadaniami; dotyczy zadań typu udowodnić; zadania ekwiwalentne do zadania rozpatrywanego mają pierwszeństwo przed zadaniami, które mogą być sprowadzone do niego lub obejmują je, a te ostatnie mają pierwszeństwo przed wszystkimi pozostałymi zadaniami²⁷.

Fundamentalnym celem wszelkiego nauczania jest nauczyć myśleć. Kto, jak nie nauczyciel musi zaktywizować wychowanka do efektywnego myślenia, modelować jego umysł. Nauczanie myślenia opiera się na trzech kluczowych zasadach:

- ✓ aktywności – odkrywanie przez uczącego się takiej części przyswajanego materiału, na jaką pozwalają okoliczności,
- ✓ właściwej motywacji – zainteresowanie uczącego się materiałem i zadowolenie ze swej aktywności,
- ✓ następcie faz – rozpoczęcie uczenia się od działania i przyswajania, pojmowanie pojęć i wreszcie opanowanie pożądanego sposobu rozumowania²⁸.

Według W.A. Krutieckiego istotę zdolności matematycznych, określa selektywność mózgu pewnych ludzi, na materiał symboliczny (relacje, metarelacje) i optymalna praca mózgu w toku odbioru, przetwarzania i pamiętania materiału matematycznego. Uwzględniając specyfikę materiału i fazę przetwarzania, przedstawia on następującą, elementarną strukturę zdolności matematycznych; odbieranie informacji matematycznej, sformalizowane spostrzeganie tematu, rozumienie formalnej struktury zadania, przetwarzanie tej informacji, logiczne rozumowanie na różnorodnym materiale symbolicznym, szybkie uogólnianie zakresu materiału symbolicznego, kondensowanie procesu rozumowania, myślenia strukturami zredukowanymi, giętkość procesu myślenia, dążenie do jasności, prostoty, ekonomiki i racjonalności rozwiązań, szybkie i swobodne zmienianie kierunku myślenia w toku sekwencyjnego i sprzężonego zwrotnie cyklu faz rozumowania, zwrotność przebiegu myślenia, przechowywanie informacji, łatwość pamiętania materiału sym-

²⁶ G. Pólya, *Odkrycia matematyczne*, WNT, Warszawa, 1975/13, s. 293-298.

²⁷ Tamże.

²⁸ Tamże.

bolicznego i zasad jego przekształcania w postaci uogólnionej, skondensowanej i giętkiej, ogólny składnik syntetyczny, matematyczne ukierunkowanie intelektu²⁹.

Myślenie matematyczne jest procesem ujawniania intuicji zawartych w mózgu. Słowa niekoniecznie muszą towarzyszyć myśleniu. Nie jest również prawdą, że myśli można pojmować tylko za ich pomocą, że myśli istnieją tylko w nich. Myślenie wewnętrzne, zwłaszcza, gdy jest twórcze, chętnie posługuje się innymi systemami znaków, które są bardziej giętkie, mniej standardowe od języka, pozostawiają więcej swobody, pozwalają na większą dynamikę twórczej myśli³⁰. Rola intuicji w twórczości matematycznej jest, zatem niezaprzeczalna. W logicznym typie umysłowości matematycznej dominuje forma organizacji myślenia, której hołdują formalści. Według nich obiektami myślenia matematycznego są czyste symbole, pozbawione znaczenia i odniesienia do wyidealizowanych obiektów rzeczywistości.

Jeżeli myślenie matematyczne zawężymy do rozumowania, jak to wynika z aspektu psychologicznego logistów i formalistów, to rozróżnimy dwa style reprezentacji materiału: konfiguracyjno–geometryczny (rzuty, obroty, przekroje) – są to reprezentacje analogiczne, dane w języku obrazów, strategie rozwiązywania zadań przestrzennych zależne od łatwości wizualizacji (Albert Einstein twierdził, że tendencja do geometryzacji i wizualizacji była stałym rysem jego umysłu); sekwencyjno–algebraiczny (struktury hierarchiczne, rekurencje, postacie kanoniczne) – to reprezentacje numeryczne, wyrażane liczbami, symbolami i wyższego rzędu strukturami znakowymi, myślenie symultaniczne³¹.

W myśleniu matematycznym zachodzi proces uczenia się nowego kodu, przez co możemy w płynny sposób rozumieć wyrażenia matematyczne. Twórczość matematyczna, wymaga dużego udziału procesów metainformacyjnych, z którymi można wiązać zachodzenie korelacji między specyficznymi zdolnościami matematycznymi a inteligencją werbalną. W sprawnym myśleniu matematycznym, istotna rola przypada procesom metapoznania – doborom strategii (heurystyk) i indywidualnym sposobom kategoryzowania problemów. Zdolności matematyczne to składnik ogólny struktury intelektu, a nie wyłącznie jego uzdolnienia specjalne. Każdy jest matematykiem, lecz z inną organizacją przetwarzania, metapoznania i głębią poznawczej penetracji.

Różnica między sztuką, a nauką, jak twierdzi psycholog É. Souriau, polega na tym, że sztuka daje poczucie większej wolności. Artysta może ulegać jedynie własnej fantazji, zatem można powiedzieć, że dzieła sztuki są wynalazkami. Twórczość uczonego polega na odkrywaniu. W matematyce jest tak, że chociaż prawda jest nieznaną, to ona istnieje i narzuca drogę postępowania. Znany autorytet w dziedzinie matematyki, Bertrand Russel wyraził tę myśl bardziej dosadnie; „[...] matematyka jest dziedziną, w której nigdy nie wiemy, o czym mówimy, ani czy to, co mówimy, jest prawdą”³².

²⁹ W.A. Krutiecckij, *Psychologia matematycznych sposobności szkolników*, Moskwa: Proswieszczenije 1968.

³⁰ J. Hadamard, *Psychologia odkryć matematycznych*, PWM, Warszawa 1964, s. 90-91.

³¹ G. Pólya, *Odkrycia matematyczne*, WNT, Warszawa, 1975/13, s. 293-298.

³² Cz. Nosal, *Psychologiczne modele umysłu*, PWN, Warszawa 1990, s. 71.

Podsumowanie

Umiejętności matematyczne pozwalają rozwiązywać wiele problemów współczesnego świata. Jest ona coraz częściej traktowana jako narzędzie do przewidywania i wyjaśniania rzeczywistości oraz jako język komunikowania. Nauczanie matematyki to nie tylko wiedza merytoryczna i pedagogiczna. To: tworzenie się pojęć, motywacje, emocje (psychologia); komunikacja, język w uczeniu się i nauczaniu matematyki, tworzenie symboli i ich rozumienie (lingwistyka); równość i różnorodność (teorie socjo - kulturowe); rozwój pojęć matematycznych, historyczne przeszkody w rozumieniu pojęć matematycznych (historia i epistemologia); zastosowanie technologii w matematyce, wykorzystanie komputerów w nauczaniu matematyki.

Procesy kognitywne są niezbędne, żeby opanować coraz bardziej skomplikowaną strukturę narzędzi, których używamy w nauce i życiu. Koncepcja struktur kognitywnych powoduje, że działania jednostki znajdują się w centrum procesu poznania, nie stanowiąc jednocześnie obiektu wiedzy.

Należy wykorzystać technologię, która pozwala konstruować i budować wiedzę. Stosowanie technologii informacyjno-komunikacyjnych może być postrzegane jako wzmocnienie intencjonalnych potrzeb w celu wyrażenia i ustalenia znaczeń poprzez dyskusję z innymi osobami. Część wiedzy jednostki obejmuje jej symboliczne zachowania w ciągłym, konstytutywnym procesie.

W cyberprzestrzeni, w społeczeństwie wiedzy najważniejsza jest edukacja w pełnym tego słowa znaczeniu. Edukacja matematyczna, komunikacja matematyczna uznawane są przez środowiska naukowe, zarówno polskie jak i międzynarodowe jako podstawowe społeczne zadanie. Nauczanie matematyki rozpoczyna się we wczesnym wieku dziecka, ponieważ podstawowe pojęcia matematyczne stanowią jądro rozwoju tak indywidualnego, jak i społecznego. Zagadnienia związane z kształtowaniem pojęć matematycznych, myśleniem matematycznym i wszystkim tym, co dotyczy edukacji matematycznej, powinny być w centrum uwagi głównych decydentów narodowych, przedstawicieli resortów edukacyjnych, społeczności, a przede wszystkim - rodziców i nauczycieli. Zdolność rozumienia tych informacji jest kluczem do sukcesu. Jest naszym „*być albo nie być*”. Kogniwytyka ma za zadanie pomóc usprawnić proces nauczania i wychowania, od najwcześniejszych etapów naszego życia, do późnej starości.

Bibliografia

- Bruner J.S., H. Haste H., *Making sense. The child's construction of the world*, New York, Methuen 1987, [w:] Tekst (w) sieci, http://encyklopediadziecinstwa.pl/index.php/Konstruktywizm_jako_teoria_uczenia_si%C4%99, [2021.02.10].
- Duch W., *Czym jest Kognitywistyka? Kognitywistyka i Media w Edukacji* 1998/1, s. 8–27.
- Gofron B., *Konstruktywistyczne ujęcie procesu uczenia się*, [w:] *Periodyk Naukowy Akademii Polonijnej*, 2013/1 (7), s. 159.
- Hadamard J., *Psychologia odkryć matematycznych*, PWN, Warszawa 1964, s. 90-91.
- Jonassen D.H., Rohrer-Murphy L., *Activity Theory as a Framework for Design Constructivist Learning Environments*, ETR&D Springer, USA 1999.
- Kandzia J., *Nowe metody nauczania matematyki*, WEMA Warszawa 2016, s. 198-200.
- Kandzia J., Tekst (w) sieci, <https://navoica.pl/courses/course-v1:UKSW+MPNM-2+2021-2/course>, 2021.
- Klus-Stańska D., *Dydaktyka wobec chaosu pojęć i zdarzeń*, Warszawa 2010, s. 266.
- Kline M., *Podstawy matematyki*, *Problemy* 1977/1, s. 45-58.
- Krutickij W.A., *Psychologia matematycznych sposobności szkolników*, Proswieszczenie, Moskwa 1968.
- Kozielecki J., *Koncepcje psychologiczne człowieka*, Żak, Warszawa 2000, s. 172-173.
- Majewska K., *Jak Geometry Expressions pomaga w zrozumieniu twierdzenia Pitagorasa*, „45 Minut, Toruński Przegląd Oświatowy”, 2009/2, s. 25-26.
- Muzal W., *Teorie i filozofie nauczania*, *Wirtualna edukacja*, Czasopismo Elektroniczne, [w:] Tekst (w) sieci, <http://grouper.ieee.org/groups/lttf/we/naucz.html>, [2005.09.21].
- Nosal Cz., *Psychologiczne modele umysłu*, PWN, Warszawa 1990, s. 71.
- Piaget J., *Studia z psychologii dziecka*, PWN, Warszawa 1966.
- Pólya G., *Odkrycia matematyczne*, WNT, Warszawa, 1975/13, s. 279-289, 293-298. Tekst (w) sieci, <http://www.eduteka.pl/doc/modele-wielomagazynowe-pamieci>, [2015.07.26].
- Tekst (w) sieci, <https://www.wolframalpha.com>, [2021.10.11].
- Tekst (w) sieci, <http://www.mathsisfun.com>, [2021.10.11].
- Tekst (w) sieć, <https://jakubas.pl>, [2021,17.11].
- Wygotski L.S., *Mind in society, The development of higher psychological processes*, Cambridge, Cambridge University Press 1978.
- Zaręba T., *Teoria poziomów przetwarzania informacji*, [w:] Tekst (w) sieci, http://www.ppp.tnb.pl/viewpage.php?page_id=104, [2015.07.26].
- Siemieniecki B., *Kognitywistyka a edukacja medialna*, T. Lewowicki, B. Siemieniecki (red.), [w:] *Współczesna technologia informacyjna i edukacja medialna*, Adam Marszałek, Toruń 2005.
- Sternig CH., Spitzer M., Ebner M., *Learning in a Virtual Environment: Implementation and Evaluation of a VR Math-Game*, [w:] G. Kurubacak, H. Altinpulluk (red.), *Mobile Technologies and Augmented Reality in Open Education*, 2017, s. 175-199.

Thorndike E., Thorndike, E., *Eksperyment w ocenianiu problemów algebry*, The Mathematics Teacher, 1914/6 (3), [w:] Tekst (w) https://pl.qaz.wiki/wiki/Edward_Thorndike, [2021.02.16].

Joanna Kandzia

Kognitywne aspekty w edukacji matematycznej

W opracowaniu przedstawiono konstruktywistyczne ujęcie procesu uczenia się matematyki, komunikowania się w matematyce, o matematyce i z użyciem matematyki, w aspekcie dynamicznie rozwijającej się nauki, jaką jest kognitywistyka. Matematyka odgrywa ogromną rolę w poznaniu naukowym, stwarza szerszą perspektywę opisu rzeczywistości. Istotna, zatem jest: umiejętność zadawania pytań i udzielania odpowiedzi na zadany temat, w ramach i z wykorzystaniem środków matematycznych; rozumienie i stosowanie matematycznego języka i narzędzi matematycznych.

Słowa kluczowe: dydaktyka matematyki, konstruktywizm, kognitywistyka, matematyka, myślenie matematyczne.

Cognitive aspects in mathematical education

The study presents a constructivist approach to the process of learning mathematics, communicating in mathematics, about mathematics and with the use of mathematics, in the aspect of the dynamically developing science of cognitive science. Mathematics plays a huge role in scientific cognition; it creates a broader perspective for describing reality. Essential, therefore, is the ability to ask questions and answer a given topic, within and with the use of mathematical means; understanding and use of mathematical language and mathematical tools.

Keywords: constructivism, cognitive science, mathematics, mathematics didactics, mathematical thinking.

Translated by Joanna Kandzia