

Anna LASKOWSKA

Wydział Matematyki Stosowanej, Politechnika Śląska w Gliwicach

## Krzywe stożkowe

**Streszczenie.** W artykule przedstawiono krzywe stożkowe, które znane były już w starożytności. Omówiono ich ciekawe własności oraz pokazano występowanie tych krzywych w otaczającym nas świecie, m.in. w fizyce, astronomii, budownictwie.

**Słowa kluczowe:** okrąg, elipsa, parabola, hiperbola.

### 1. Co to są krzywe stożkowe?

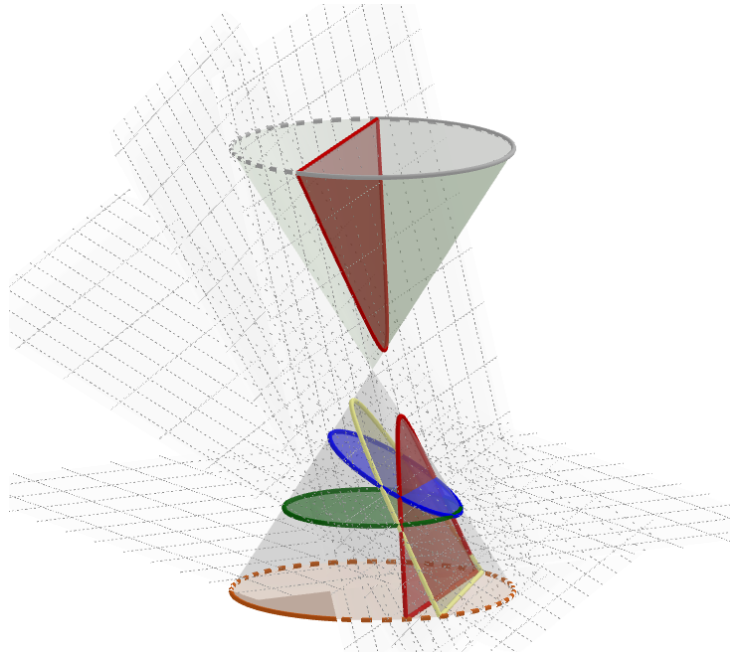
Pierwszą rozwijającą się dziedziną matematyki była geometria. Ciesle i miernicy z Egiptu i Babilonii już 4 000 lat p.n.e. stosowali drobne obliczenia matematyczne. Podziwiając zabytki architektury, możemy sądzić, że znane im były różne praktyczne konstrukcje geometryczne.

Filozofom greckim (600-300 lat p.n.e.) zawdzięcza się wprowadzenie dowodu indukcyjnego, a także rozwinięcie geometrii euklidesowej. Zajmowali się oni figurami podstawowymi, czyli liniami i krzywymi (takimi jak trójkąt, okrąg, elipsa, parabola, hiperbola), sześcianami, kulami, paraboloidami i hiperboloidami.

Krzywe: **okrąg, elipsa, parabola i hiperbola** nazywają się **krzywymi stożkowymi** i są one przekrojami powierzchni stożkowej — przecięcia tej powierzchni pewnymi płaszczyznami (rys. 1). Definicje i własności tych przekrojów były dziełem uczonych starożytnej Grecji (zob. [7], s. 66 i [9], s. 134), zwłaszcza Apoloniusza (260–200 r. p.n.e.), następcy Euklidesa (ok. 300 r. p.n.e.). Przekrojami powierzchni stożkowej płaszczyzną mogą być również punkt, prosta lub dwie proste, ale przypadki te nas nie interesują.

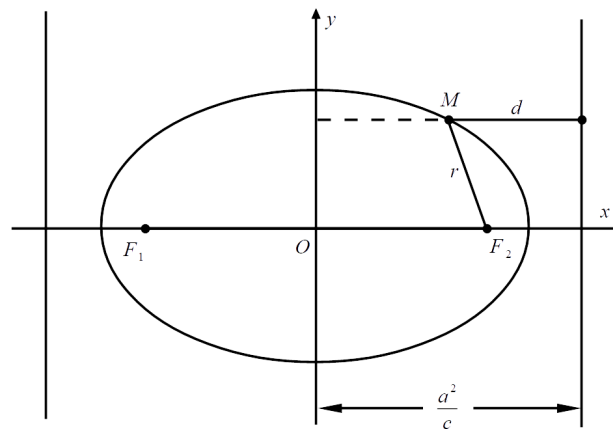
**Okrąg** jest miejscem geometrycznym punktów płaszczyzny równo odległych od ustalonego punktu, zwanego środkiem okręgu.

**Elipsa** jest zbiorem punktów płaszczyzny, dla których suma odległości od dwóch ustalonych punktów  $F_1$  i  $F_2$ , zwanych ogniskami elipsy, jest stała, równa  $2a$  i jest większa od odległości między ogniskami. Na rys. 2 przedstawiono elipsę w prostokątnym układzie kartezjańskim z ogniskami  $F_1(-c, 0)$  i  $F_2(c, 0)$  leżącymi na osi  $Ox$ . Osie układu współrzędnych są jej osiami symetrii. Punkty  $(-a, 0)$ ,  $(a, 0)$ ,  $(0, -b)$ ,  $(0, b)$  to wierzchołki elipsy. Liczby  $2a$  i  $2b$  nazywają się długościami osi elipsy ( $0 < b < a$ ), liczba  $a$  — półosią wielką, liczba  $b$  — półosią małą elipsy.



Rysunek 1. Krzywe stożkowe jako przekroje powierzchni stożkowej

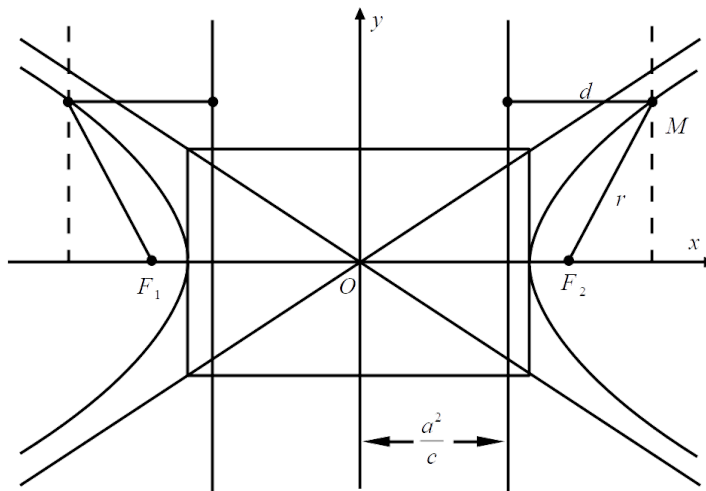
Z definicji elipsy wynika, że odległość punktu  $(0, b)$  od ogniska jest równa  $a$ , zatem z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy zależność  $a^2 = b^2 + c^2$ . Proste o równaniach  $x = \pm \frac{a^2}{c}$  zwane są kierownicami elipsy.



Rysunek 2. Elipsa

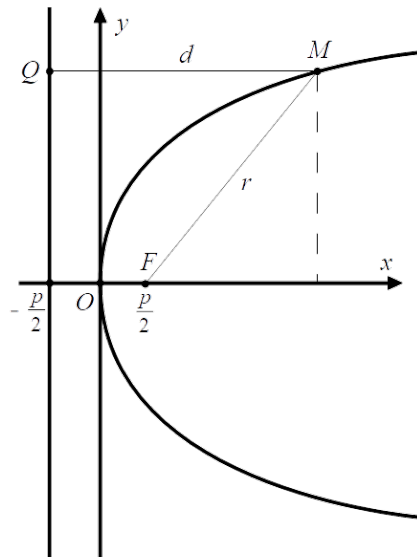
**Hiperbola** to zbiór punktów płaszczyzny, dla których różnica odległości od dwóch ustalonych punktów  $F_1$  i  $F_2$ , zwanych ogniskami hiperboli, ma stałą wartość bezwzględną równą  $2a$ , mniejszą od odległości między ogniskami i różną od zera.

Na rys. 3 przedstawiona jest hiperbola w prostokątnym układzie kartezjańskim z ogniskami  $F_1(-c, 0)$  i  $F_2(c, 0)$  położonymi na osi  $Ox$ . Przecina ona oś  $Ox$  w dwóch punktach  $(-a, 0)$  i  $(a, 0)$ , zwanych wierzchołkami hiperboli (zauważmy, że  $0 < a < c$ ). Obie osie układu współrzędnych są jej osiami symetrii. Punkt  $(0, 0)$  nazywa się środkiem hiperboli. Hiperbola składa się z dwóch gałęzi: lewej i prawej. Proste o równaniach  $x = \pm \frac{a^2}{c}$  noszą nazwę kierownic hiperboli.



Rysunek 3. Hiperbola

**Parabola** to zbiór punktów płaszczyzny równo oddalonych od ustalonej prostej  $k$ , zwanej kierownicą paraboli, i ustalonego punktu  $F$ , zwanego ogniskiem paraboli. Ognisko nie może należeć do kierownicy. Rysunek 4 przedstawia w prostokątnym kartezjańskim układzie współrzędnych parabolę z kierownicą  $k: x = -\frac{p}{2}$  i ogniskiem  $F(\frac{p}{2}, 0)$  leżącym na osi  $Ox$ , która jest osią symetrii paraboli. Liczba  $p > 0$  to odległość ogniska od kierownicy, nazywamy ją parametrem paraboli.



Rysunek 4. Parabola

Wielkość  $\varepsilon = \frac{c}{a}$  nazywamy mimośrodem elipsy i hiperboli. Podobnie jak parabolę, również elipsę i hiperbolę można opisać jako **zbiór punktów płaszczyzny, dla których stosunek odległości od ogniska do odległości od bliżej położonej kierownicy jest stały**<sup>1</sup>. Stosunek ten jest równy mimośrodkowi i oznaczamy go również jako  $\varepsilon$ . Odczytując oznaczenia z rysunków 2–4, mamy  $\varepsilon = \frac{c}{a}$ . I tak dla elipsy  $\varepsilon < 1$ , dla hiperboli  $\varepsilon > 1$ , a dla paraboli  $\varepsilon = 1$ .

<sup>1</sup> Por. definicję stożkowej właściwej w [17], s. 172.

Przytoczmy wypowiedź J. Keplera<sup>2</sup> o krzywych stożkowych zamieszczoną w [5] na s. 249: „Ze względu na swą pośrednią naturę, parabola zajmuje środkowe położenie (między elipsą i hiperbolą). Gdy powstaje, nie rozwiera swych ramion tak jak hiperbola, lecz zaciska je, układa niemal równoległe, zawsze ogarniając coraz więcej, a mimo to zawsze pragnąc mniej — podczas gdy hiperbola im więcej obejmuje, tym więcej próbuje uzyskać”.

A oto inne uwagi o krzywych stożkowych:

- „Elipsa, czyli «spłaszczony» okrąg” (zob. [10], s. 275).
- „O okręgu można myśleć, że to elipsa, której ogniska zlały się w jednym punkcie — środku okręgu” (zob. [5], s. 249).
- „Ramiona paraboli zaczynają stopniowo przybierać kierunki coraz bliższe do równoległych” (zob. [5], s. 249).
- „Zmienianie wyłącznie rozmiarów, a nie kształtów, to jedna z własności, które parabola dzieli z okręgiem, lecz nie z elipsą i hiperbolą” (zob. [5], s. 251).

## 2. Matematyczne wzory krzywych stożkowych

R. Descartes (1596–1650) i P. Fermat (1601–1665) spostrzegli możliwości zastosowania metody algebraicznej do geometrii. Rozwinęli **geometrię analityczną**. Zastąpiła ona krzywe równaniami przez wprowadzenie pojęcia układu współrzędnych. Starożytni Grecy schowali algebrę w geometrii. Jako przykład można podać, że liczbę  $\sqrt{2}$  traktowali jako przekątną kwadratu o boku 1. Później algebra zdominowała geometrię — nastąpiła arytmetyzacja geometrii.

Gdy zastosowano rachunek różniczkowy do badania krzywych i powierzchni, to nowe ujęcie geometrii zostało nazwane **geometrią różniczkową**. Zajmuje się ona wieloma zagadnieniami (m.in. liniami geodezyjnymi czy odległością punktów na powierzchni). O historii powstania geometrii analitycznej i różniczkowej opowiada M. Kline w [7] na s. 70-71 i 73-74.

Jeśli środek okręgu o promieniu  $R$  pokrywa się z początkiem układu współrzędnych  $Oxy$  w układzie prostokątnym kartezjańskim, to równanie tego okręgu ma postać:

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (1)$$

Dla elipsy o pólosci wielkiej  $a$ , pólosci małej  $b$  i o środku w początku układu  $Oxy$  w układzie prostokątnym kartezjańskim mamy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2)$$

Elipsę, zwaną spłaszczonym okręgiem, możemy otrzymać przez przekształcenie każdego z jego punktów  $(x, y)$  na punkt  $(x, ky)$ , gdzie  $0 < k < 1$  (czyli przez powinowactwo prostokątne, którego osią jest oś  $Ox$ , a współczynnikiem powinowactwa liczba  $k$ ). „Mówiąc trochę nieporządnie, elipsa jest czymś, co w jedną stronę jest okręgiem o promieniu  $a$ , w drugą stronę okręgiem o promieniu  $b$ ” (zob. [10], s. 276–277).

Wyprowadzimy wzór (2). Jeśli punkt  $M(x, y)$  leży na elipsie, to suma jego odległości od ognisk  $F_1(-c, 0)$  i  $F_2(c, 0)$  jest równa  $2a$ , tzn.

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

<sup>2</sup> Johannes Kepler (1571–1630), niemiecki matematyk, fizyk i astronom.

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2} && |()^2 \\
x^2+2cx+c^2+y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 && | :4 \\
a\sqrt{(x-c)^2+y^2} &= a^2 - cx && |()^2 \\
a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \\
(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2). && (3)
\end{aligned}$$

Wiemy, że  $a^2 - c^2 = b^2$ , więc dzieląc obie strony równania (3) przez  $a^2b^2$ , otrzymujemy równanie (2).

Musimy jeszcze pokazać, że jeśli współrzędne pewnego punktu spełniają warunek (2), gdzie  $a, b > 0$ , to punkt ten należy do elipsy, ponieważ w powyższym wyprowadzeniu dwa równania podnosiliśmy stronami do kwadratu. Wychodząc z równania (2), dochodzimy do równania (3), które przekształcamy do postaci

$$a^2[(x-c)^2+y^2] = (a^2 - cx)^2.$$

Z ostatniej równości otrzymujemy

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm(a^2 - cx), \quad (4)$$

przy czym wybieramy po prawej stronie znak plus, ponieważ:

- z równania (2) wynika, że  $\frac{x^2}{a^2} \leq 1$ , czyli  $|x| \leq a$ ,
- ze związku  $a^2 - c^2 = b^2$  wynika, że  $c < a$  (możemy przyjąć, że  $c > 0$ ),

skąd wnioskujemy, że  $|cx| < a^2$ . Mnożymy teraz stronami równanie (4) przez 4, dodajemy do obu stron wyrażenie  $x^2 + c^2 + y^2$  i po zastosowaniu wzorów skróconego mnożenia dostajemy

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm \left( 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2} \right).$$

Wybieramy tu znowu plus, bo:

- z równania (2) wynika, że  $\frac{y^2}{b^2} \leq 1$ , czyli  $|y| \leq b$ ,
- z nierówności  $|cx| < a^2$  wynika, że  $-2a^2 < -2cx < 2a^2$ ,
- $b^2 + c^2 = a^2$

i stąd mamy oszacowanie

$$(x-c)^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 < a^2 + 2a^2 + c^2 + b^2 = a^2 + 2a^2 + a^2 = 4a^2,$$

czyli  $\sqrt{(x-c)^2+y^2} < 2a$ .

Analogicznie otrzymujemy równania hiperboli i paraboli. Dla hiperboli mamy wzór:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ gdzie } b^2 = c^2 - a^2. \quad (5)$$

Hiperbolę po obrocie o  $45^\circ$  można zapisać w postaci:

$$xy = a, \text{ gdzie } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Wzór opisujący parabolę ma postać:

$$y^2 = 2px, \quad (6)$$

gdzie  $p$  jest odległością ogniska  $F(\frac{p}{2}, 0)$  od kierownicy paraboli  $x = -\frac{p}{2}$  (wówczas wierzchołek paraboli znajduje się w punkcie  $(0, 0)$  jak na rys. 4). Po zamianie osi parabolę o wierzchołku w punkcie  $(-\frac{b}{2a}, \frac{-b^2+4ac}{4a})$  możemy zapisać jako krzywą o równaniu:

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ gdzie } a \neq 0.$$

Francuski matematyk M.K. Jordan (1838–1922) mówiąc o linii, miał na myśli poruszający się punkt zgodnie z prawem określonym przez układ równań zwanych równaniami parametrycznymi (współrzędne punktu są funkcjami czasu  $t$ ). Krzywe stożkowe mają następujące równania parametryczne:

- $\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t, 0 \leq t < 2\pi \end{cases}$  dla okręgu  $x^2 + y^2 = R^2$ ,
- $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t, 0 \leq t < 2\pi \end{cases}$  dla elipsy  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,
- $\begin{cases} x = a \cosh t \\ y = b \sinh t, t \in \mathbb{R} \end{cases}$  dla prawej gałęzi hiperboli<sup>3</sup>  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,
- $\begin{cases} x = \frac{a}{\cos t} \\ y = b \operatorname{tg} t, t \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, 2\pi) \end{cases}$  dla hiperboli  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,
- $\begin{cases} x = 2pt^2 \\ y = 2pt, t \in \mathbb{R} \end{cases}$  dla paraboli  $y^2 = 2px$ .

Można sprawdzić, że po wyrugowaniu parametru  $t$  z powyższych układów otrzymuje się wskazaną postać kanoniczną krzywej stożkowej.

Zauważmy jeszcze, że **rzut okręgu na dowolną płaszczyznę jest elipsą oraz każdy przekrój walca obrotowego płaszczyzną nierównoległą do jego osi jest elipsą**. Rysunki i dowody podane są w [2] na s. 78–80.

**Równania biegunowe** mają wspólną postać dla elipsy, paraboli i hiperboli (jednej gałęzi):

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad (7)$$

gdzie  $\varepsilon < 1$  dla elipsy,  $\varepsilon > 1$  dla gałęzi hiperboli,  $\varepsilon = 1$  dla paraboli. Mają one zastosowanie szczególnie w mechanice nieba ze względu na ruch planet i komet po stożkowych.

<sup>3</sup> Dla lewej gałęzi hiperboli trzeba zmienić znak współrzędnej  $x$ . W równaniach parametrycznych hiperboli mamy dwie funkcje hiperboliczne: sinus hiperboliczny, zdefiniowany jako  $\sinh t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$ , oraz cosinus hiperboliczny, zdefiniowany jako  $\cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$ . Funkcje hiperboliczne nie są okresowe, ale mają wiele własności bardzo podobnych do własności funkcji trygonometrycznych, np.  $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ ,  $\sinh 2t = 2 \sinh t \cosh t$ ,  $\cosh 2t = \cosh^2 t + \sinh^2 t$  (dla każdego  $t \in \mathbb{R}$ ). Funkcje te wprowadził Vincenzo Riccati (1707–1775) i stosował je przy obliczaniu pola pod hiperbolą.

Wyprowadzimy teraz równanie biegunowe dla prawej gałęzi hiperboli (wyprowadzenie dla lewej gałęzi oraz elipsy i paraboli jest podobne). Punkt  $M(x, y)$  leżący na hiperboli będziemy identyfikować z jego współrzędnymi biegunowymi, tzn. parą  $(r, \varphi)$ , gdzie  $r$  to odległość punktu  $M$  od ogniska  $F_2$ , natomiast  $\varphi$  jest miarą kąta  $F_1F_2M$  (zob. rys. 3). Zauważmy, że odległość punktu  $M$  od ogniska  $F_1$  jest równa  $2a + r$ . Z twierdzenia kosinusów dla trójkąta  $F_1F_2M$  mamy

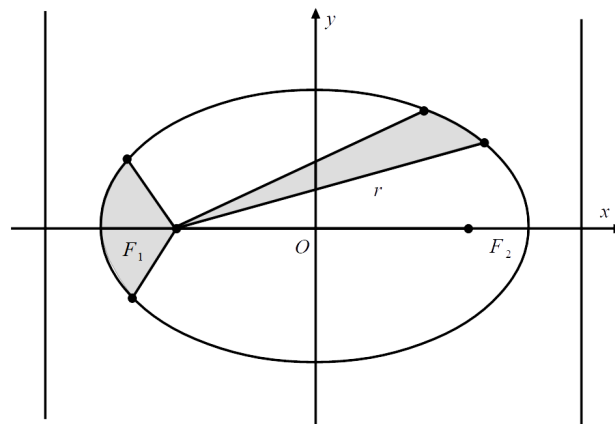
$$\begin{aligned}(2a + r)^2 &= r^2 + (2c)^2 - 4rc \cos \varphi \\ 4a^2 + 4ar + r^2 &= r^2 + 4a^2 + 4b^2 - 4rc \cos \varphi & | : 4 \\ ar &= b^2 - rc \cos \varphi \\ r &= \frac{b^2}{a + c \cos \varphi}.\end{aligned}$$

Po podstawieniu  $p = \frac{b^2}{a}$  oraz  $\varepsilon = \frac{c}{a}$  otrzymujemy (7). Przy okazji warto zauważyć, że dla elipsy (2) i hiperboli (5) ich cięciwy, które są prostopadłe do osi  $Ox$  i przechodzą przez ognisko, mają długość  $\frac{2b^2}{a} = 2p$ . Również dla paraboli (6) jej cięciwa, która jest prostopadła do osi  $Ox$  i przechodzi przez ognisko, ma długość  $2p$ , gdzie  $p$  jest parametrem paraboli.

W nazwach innych krzywych znajdują się słowa: elipsa i hiperbola. Do takich zaliczamy superelipsy (o wygładzie między elipsą a prostokątem), hiperbole kubiczne o równaniu ogólnym  $xy^2 = P(x)$ , gdzie  $P(x)$  jest wielomianem stopnia równego lub mniejszego niż 3, które to badał Newton<sup>4</sup> i nazwał je „trójzębnymi”. Dodajmy, że podstawową zależność w ekonomii między ceną a popytem ilustruje hiperbola (na przykład  $y = \frac{1000}{x}$ , gdzie  $y$  oznacza ceny, a  $x$  żądane ilości; zob. [16], s. 37, 130 i 132).

### 3. Krzywe stożkowe w astronomii i fizyce

„Przede wszystkim stworzenie przez Mikołaja Kopernika<sup>5</sup> i Jana Keplera heliocentrycznej teorii ruchu planet wywołało potrzebę stworzenia efektywnych metod operowania krzywymi stożkowymi; krzywe te są drogami ciał niebieskich w tej teorii” (zob. [7], s. 70). Prawa Keplera głoszą, że:

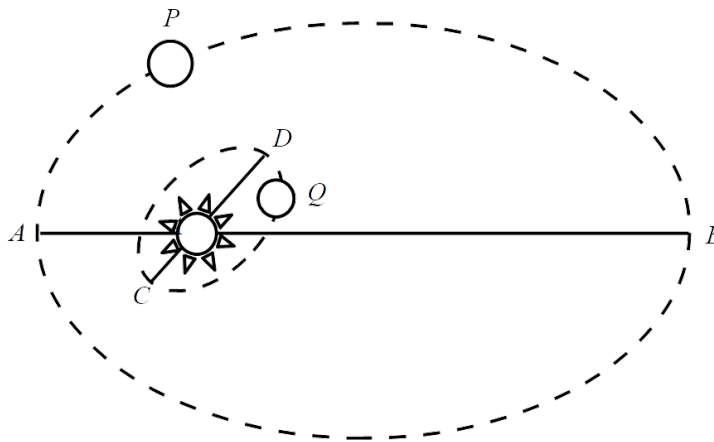


Rysunek 5. Ilustracja drugiego prawa Keplera

<sup>4</sup> Isaac Newton (1643–1727), angielski fizyk, filozof, astronom i matematyk.

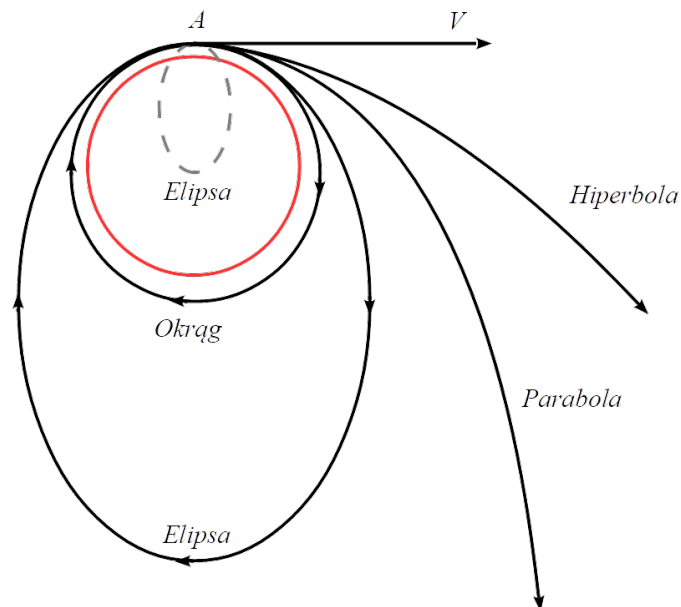
<sup>5</sup> Mikołaj Kopernik (1473–1543), polski astronom, odkrył, że Ziemia nie jest w centrum wszechświata.

- 1) planety poruszają się dookoła Słońca po orbicie eliptycznej (Słońce znajduje się w jednym z ognisk tej elipsy);
- 2) przy ruchu planet, linia łącząca planetę i Słońce zakreśla równe pola (wycinków elipsy) w równych odstępach czasu (planety w pobliżu Słońca poruszają się szybciej, a wolniej w oddaleniu od niego);
- 3) kwadraty okresów obiegu dwóch planet dookoła Słońca mają się do siebie jak sześciiany półosi ich wielkich orbit (półś wielka to połowa najdłuższej cięciwy).



Rysunek 6. Orbity planet  $P$  i  $Q$  (ilustracja trzeciego prawa Keplera)

Na rysunku 6 zaznaczone są orbity planet  $P$  i  $Q$ . Gdy  $AB$  jest cztery razy większe niż  $CD$ , wówczas planeta  $P$  obiega Słońce w czasie  $\sqrt{4^3} = 8$  razy dłuższym niż planeta  $Q$  (zob. [19], s. 244).



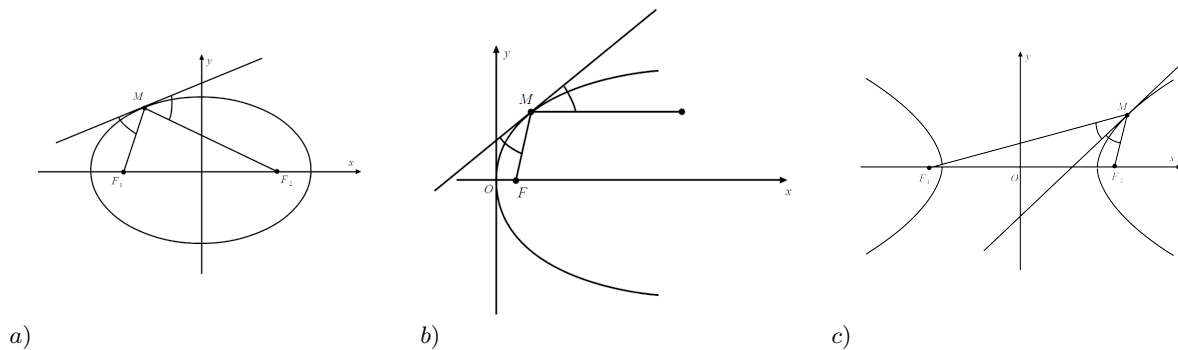
Rysunek 7. Tory ruchu pojazdu kosmicznego w polu grawitacyjnym



Tory ruchu pojazdów kosmicznych w polu grawitacji ziemskiej przybierają kształty krzywych stożkowych w zależności od ich prędkości startu  $v$  (w punkcie  $A$  kierunek  $v$  jest poziomy — rys. 7). Przy prędkości startowej mniejszej niż  $7,93 \text{ km/s}$  tor ruchu pojazdu przybiera kształt łuku elipsy, której dalsze ognisko od punktu startowego  $A$  leży w środku Ziemi (na rysunku linia przerywana), przy prędkości o wiele mniejszej niż  $7,93 \text{ km/s}$  tor jest parabolą. Tor ma kształt okręgu, gdy prędkość pojazdu  $v$  w chwili startu wynosi około  $7,93 \text{ km/s}$ . Tor jest elipsą, jeśli prędkość jest w przedziale między  $7,93 \text{ km/s}$  a  $11,2 \text{ km/s}$  (pierwsza prędkość kosmiczna), a ognisko tej elipsy bliższe punktu  $A$  znajduje się w środku Ziemi. Tor ma kształt paraboli, gdy prędkość wynosi  $11,2 \text{ km/s}$  (druga prędkość kosmiczna). Gdy prędkość jest większa od  $11,2 \text{ km/s}$ , to tor ma kształt hiperboli. Przy dwóch ostatnich prędkościach pojazd ucieknie w przestrzeń kosmiczną. Píše o tym S. Kowal w [9] na s. 165 i 166, zaś M. Gardner w [5] na s. 253 zamieszcza uwagę o torach ruchu komet: „Ponieważ parabola to przypadek graniczny między elipsą i hiperbolą, na podstawie obserwacji komety przechodzącej niedaleko Słońca bardzo trudno jest powiedzieć, czy podąża ona po niezwykle wydłużonej trajektorii eliptycznej (w tym przypadku powróci), czy też po paraboli lub hiperboli (w tym przypadku już nigdy nie powróci)”.

Do ciekawych własności elipsy, paraboli i hiperboli należą tak zwane własności optyczne (przytoczymy je według opisu N.V. Efimova z [2], s. 105–106):

- 1') prosta styczna do elipsy w dowolnym punkcie  $M$  tworzy równe kąty z promieniami ogniskowymi  $F_1M$  i  $F_2M$  oraz przechodzi na zewnątrz  $F_1MF_2$  (rys. 8a),
- 2') prosta styczna do paraboli w dowolnym punkcie  $M$  tworzy równe kąty z promieniem ogniskowym  $FM$  i z prostą wychodzącą z punktu  $M$ , równoległą do osi w stronę rozprzestrzeniania się nieskończonego paraboli (rys. 8b),
- 3') prosta styczna do hiperboli w dowolnym punkcie  $M$  tworzy równe kąty z promieniami ogniskowymi  $F_1M$  i  $F_2M$  oraz położona jest wewnątrz kąta  $F_1MF_2$ , jest ona dwusieczną tego kąta (rys. 8c).



Rysunek 8. Własności optyczne elipsy, paraboli i hiperboli

Jeśli powierzchnie rzeczywiste: elipsoidę, paraboloidę i hiperboloidę, które powstają przez obrót odpowiednio elipsy, paraboli i hiperboli wokół osi z ogniskami, pokryjemy amalgamatem, to otrzymamy kolejno zwierciadła: eliptyczne, paraboliczne i hiperboliczne. Wówczas własności 1'), 2') i 3') można opisać następująco:

- a) jeśli źródło promieni światła znajduje się w jednym z ognisk zwierciadła eliptycznego, to promienie odbiwszy się od zwierciadła skupiają się w drugim ognisku,

- $\beta$ ) jeśli źródło promieni świetlnych znajduje się w ognisku zwierciadła parabolicznego, to promienie świetlne odbiwszy się od zwierciadła będą równoległe do osi (działanie reflektora, projektora); oznacza to też, że wszystkie promienie światła padające równoległe do osi na wklęsłe zwierciadło paraboliczne zostaną po odbiciu skierowane w stronę ogniska,
- $\gamma$ ) jeśli źródło promieni świetlnych znajduje się w jednym z ognisk zwierciadła hiperbolicznego, to jego promienie odbiwszy się od zwierciadła idą dalej tak, jakby wychodziły z drugiego ogniska.

Dodajmy, że zasada  $\beta$ ) to także zasada działania teleskopów, urządzeń do koncentrowania energii słonecznej i wklęsłych naczyń stosowanych w kuchenkach mikrofalowych (zob. [5] s. 254). Teleskop astronomiczny wynalazł Galileusz<sup>6</sup> w 1610 r., co wykorzystano do sprawdzenia teorii Kopernika (zob. [19], s. 243). Za pomocą teleskopu i mikroskopu badano własności soczewek (zob. [7], s. 70–71).

## 4. Krzywe stożkowe w otaczającym nas świecie

Podamy teraz kilka wypowiedzi M. Gardnera z [5] ze s. 252–253 i 255–256 o występowaniu paraboli w otaczającym nas świecie. „Strumień wody wypływający z węża ma kształt niemal idealnej paraboli. Jeśli podlewając trawnik będziemy powoli zmniejszać nachylenie węża, od położenia niemal pionowego do niemal poziomego, to wierzchołki strumieni wody zakreślą fragment elipsy, a obwiednia<sup>7</sup> wszystkich strumieni będzie parabolą”. „Jeśli rzucimy poziomo kamień, to leci on po torze zbliżonym do paraboli”. „[...] paraboliczny tor pocisku jest trochę zniekształcony przez kulistość Ziemi i znacznie bardziej przez opór powietrza”.

Nad krzywą zbliżoną do paraboli, jaką zatacza rzucony kamień, zastanawiali się Leonardo da Vinci w XV wieku oraz Galileusz, który to w XVII wieku opublikował odpowiednie twierdzenie (zob. [5], s. 252). „Jeśli [...] parabolę będziemy toczyć po linii prostej, to jej ognisko zakreśli idealną linię łańcuchową” (rys. 9a), natomiast „gdy dwie identyczne parabole zetkniemy wierzchołkami i jedną z nich będziemy toczyć po drugiej, ognisko toczony paraboli porusza się wówczas po kierownicy paraboli nieruchomej, a wierzchołek zakreśla cissoidę” (rys. 9b).

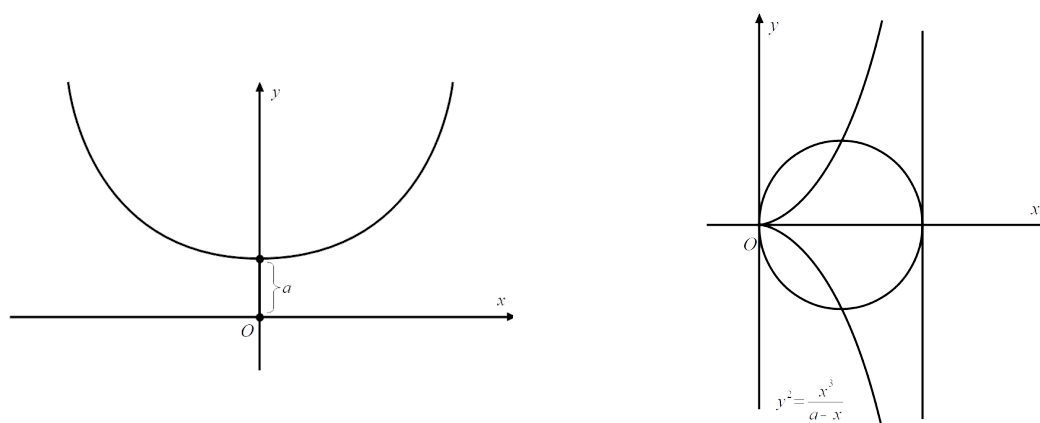
Krzywe stożkowe mają również zastosowanie w **kartografii**. Tworzenie map dla nowych terenów geograficznych „wymusiło” badanie krzywych znanych, a także stosowanie nowych krzywych (zob. [7], s. 71). W paragrafie *Problemy kartografa* w [19] na s. 228 I.R. Vesselo pisze, że przede wszystkim kartograf musi wybrać rzutowanie, aby móc przedstawić powierzchnię Ziemi na płaskim papierze.

P. Kopacz w [8] na s. 5–7 mówi o odpowiednikach krzywych stożkowych na zakrzywionych powierzchniach. „W podróży bardzo istotną rolę odgrywa mapa. Współcześnie na papierowych mapach nawigacyjnych nadal niejednokrotnie wykonuje się różne konstrukcje geometryczne i w części odbywa się to w sposób klasyczny, tzn. za pomocą cyrkla i linijki. PEH to nazwa krzywej, która jest jednocześnie sferyczną elipsą, hiperbolą i parabolą. Krzywe stożkowe można rozważać na różnych zakrzywionych powierzchniach lub w ogólniejszych strukturach geometrycznych, gdzie ich «wygląd» i własności mogą nieraz zaskakiwać”.

Wynalezienie koła było wielce pożyteczne dla człowieka. Mówi się, że jest bardzo ważne zaraz po ogniu. W [4] na s. 11–12 czytamy: „Bez koła nie mogłoby się żyć [...] trudno przedstawić sobie choć trochę rozwinięte ludzkie społeczeństwo, które mogłoby obchodzić się bez niego. Do niedawna twierdziło się, że

<sup>6</sup> Galileusz (1564–1642), włoski astronom, astrolog, matematyk, fizyk i filozof, prekursor nowożytnej fizyki, propagował teorię heliocentryczną.

<sup>7</sup> Obwiednia to krzywa, która w każdym swoim punkcie jest styczna do co najmniej jednej krzywej danej rodziny.



a)

b)

Rysunek 9. Linia łańcuchowa  $y = \cosh \frac{x}{a}$  (z lewej) i cissoida (z prawej)

koło pojawiło się w Mezopotamii [...] archeologowie odkryli na Północnym Kaukazie, że w Południowo-Wschodniej Europie było znane wcześniej. Być może, że występowało ono w niezależnie w dwóch lub kilku miejscach nie mających związku ze sobą”. Wykopaliska wskazują na lata 3000 i 2700 p.n.e.

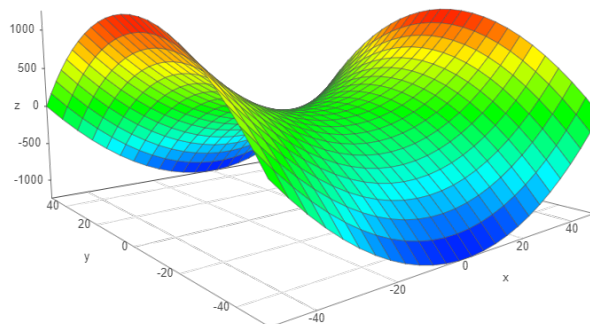
Rower napędzany pedałami z korbą powstał w Paryżu w roku 1865, a w 1876 roku zbudowano rower z przekładnią, podobny do rowerów spotykanych obecnie (pisze o tym A. Richards w [14] na s. 419–420).

Łuki w kształcie krzywych stożkowych spotykamy w **budownictwie i architekturze**. „Liny podtrzymujące most wiszący mają w przybliżeniu kształt paraboli. Krzywa ta ulega zniekształceniu, gdy masa mostu rozkłada się nierówno lub gdy ciężar lin jest zbyt duży w porównaniu z ciężarem mostu. W tym drugim przypadku krzywą wzdłuż której rozpięta jest lina trudno odróżnić od linii łańcuchowej” (zob. [5], s. 255).

W [15] w paragrafie *Geometria łuków ceglanych* na s. 360–363 czytamy o różnych łukach murarskich: płaskim, półkolistym, odcinkowym. Łuki eliptyczne są często stosowane przez konstruktorów murów budowlanych. Piękne konstrukcje architektoniczne w kształcie fragmentów tak zwanych powierzchni stopnia drugiego, między innymi hiperboloidy, paraboloidy hiperbolicznej (powierzchni siodłowej) czy też elipsoidy możemy oglądać już nie tylko w literaturze fachowej, ale również w rzeczywistości w różnych krajach, w tym także i w Polsce (pokrycia dachowe).

S. Przewłocki w [13] na s. 132 i 193 pisze: „Szczególnie interesującą plastycznie formę ma **konoida linii prostej** zwana częściej **paraboloidą hiperboliczną**. [...] Można ją utworzyć przez równoległe przesuwanie «paraboli przecznej» po «paraboli grzbietowej», przy czym wypukłości obu parabol są przeciwne, tzn. gdy jedna jest wypukła ku górze, to druga ku dołowi lub na odwrót”. Na rys. 10 przedstawiono fragment powierzchni siodłowej<sup>8</sup>.

<sup>8</sup> Paraboloida hiperboliczna to niezamknięta bez środka symetrii powierzchnia stopnia drugiego. W układzie współrzędnych ma ona równanie:  $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ ,  $p, q > 0$ . Przekroje paraboloidy hiperbolicznej płaszczyznami równoległymi do płaszczyzn  $xOz$  i  $yOz$  są parabolami, przekroje płaszczyznami równoległymi do płaszczyzny  $xOy$  — hiperbolami, a płaszczyzną  $xOy$  — dwiema prostymi. Oś symetrii paraboloidy hiperbolicznej nazywamy jej osią. Punkt przecięcia paraboloidy hiperbolicznej z osią to wierzchołek paraboloidy hiperbolicznej. Jeśli  $p = q$ , to paraboloida hiperboliczna ma dwie osie symetrii (zob. [12]).



Rysunek 10. Paraboloida hiperboliczna (fragment)

## 5. Kwadratura parabol i inne własności krzywych stożkowych

Archimedes<sup>9</sup> jako pierwszy rozwiązał zadanie tzw. kwadratury parabol, czyli obliczenia pola jej odcinka ograniczonego cięciwą (rys. 11). Udowodnił, że jeśli na odcinku paraboli opiszemy równoległobok o parze boków równoległych do osi paraboli, to pole tego równoległoboku do pola odcinka paraboli będzie się miało jak 3:2. Wykorzystał on metodę wyczerpywania, która stanowiła pierwowzór rachunku całkowego. Archimedes wcześniej się tego domyślił, ważąc te dwa obszary (zob. [5], s. 257). W [3] na s. 21–25 znajdujemy dokładny opis wraz z ilustracjami użycia wagi i dźwigni przez Archimedes do wykazania proporcji pola odcinka paraboli do pola trójkąta. Obecnie to zadanie jest bardzo łatwe do rozwiązania, jeśli zastosujemy pochodną i całkę oznaczoną<sup>10</sup>.

Jak wspomniano wcześniej, obracając elipsę, parabolę lub hiperbolę względem osi z ogniskami, otrzymamy powierzchnie zwane odpowiednio elipsoidą, paraboloidą i hiperboloidą. M. Gardner w [5] zauważa, że jeśli obracamy garnek z wodą, to powierzchnia cieczy przybiera kształt paraboloidy.

Przypuśćmy, że paraboloida stoi na płaskiej podstawie prostopadłej do jej osi. Objętość bryły ograniczonej tą paraboloidą i podstawą jest równa  $3/2$  objętości stożka opartego o tę samą kolistą podstawę<sup>11</sup>. Badał to Archimedes (zob. [5], s. 255).

W [9] na s. 37–38 można przeczytać na temat rozwiązania zadania delijskiego o zbudowaniu sześcianu o objętości dwa razy większej od objętości danego sześcianu o boku  $a$  (podwojenie sześcianu<sup>12</sup>). Do rozwiązania matematyk ateński Menechemus<sup>13</sup> w IV w. p.n.e. użył dwu parabol:  $x^2 = ay$  i  $y^2 = 2ax$ . Rozwiązując układ powyższy otrzymuje się  $x^3 = 2a^3$ . Odcięta punktu przecięcia się tych parabol daje szukany bok sześcianu o podwojonej objętości. W [16] na s. 123 autor pisze, że w celu rozwiązania zadania delijskiego Menechemus przecinał płaszczyznę trzy rodzaje stożków z kątami: ostrym, prostym

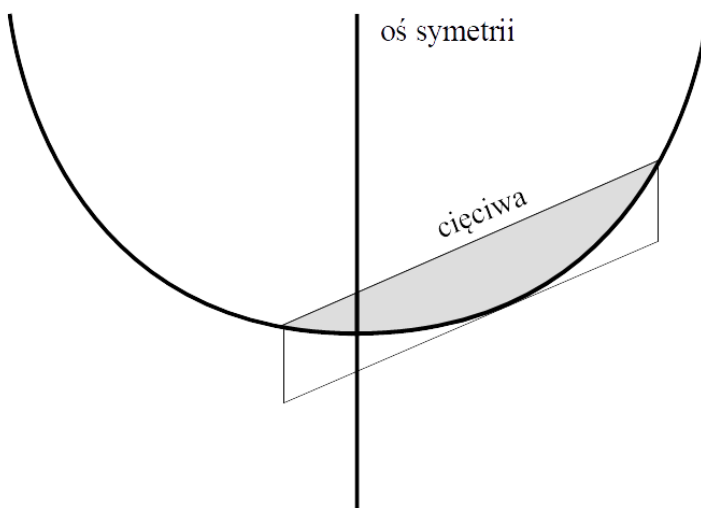
<sup>9</sup> Archimedes z Syrakuz (287 – 212 p.n.e.), wybitny grecki matematyk i fizyk.

<sup>10</sup> W celu obliczenia pola równoległoboku i pola odcinka paraboli oznaczmy przez  $P_1(x_1, y_1)$  i  $P_2(x_2, y_2)$ , gdzie  $x_1 < x_2$ , punkty przecięcia się paraboli  $y = ax^2$  z cięciwą. Wtedy równanie cięciwy będzie miało postać:  $y = a(x_2 + x_1)x - ax_1x_2$ , zaś równanie stycznej do paraboli:  $y = a(x_2 + x_1)x - \frac{a}{4}(x_2 + x_1)^2$ . Pole równoległoboku wynosi  $\frac{a}{4}(x_2 - x_1)^3$ , zaś pole odcinka paraboli  $\frac{a}{6}(x_2 - x_1)^3$ .

<sup>11</sup> Rzeczywiście, obliczając te objętości całką podwójną dla paraboloidy  $z = x^2 + y^2$  i dla stożka  $z^2 = x^2 + y^2$  opartych o koło będące ich przecięciem, otrzymujemy odpowiednio:  $\frac{\pi}{2}$  i  $\frac{\pi}{3}$ .

<sup>12</sup> Jest to jeden z trzech problemów starożytności, pochodzi z wyspy Delos.

<sup>13</sup> Zapis tego imienia również: Menaichmos, Menechmos.

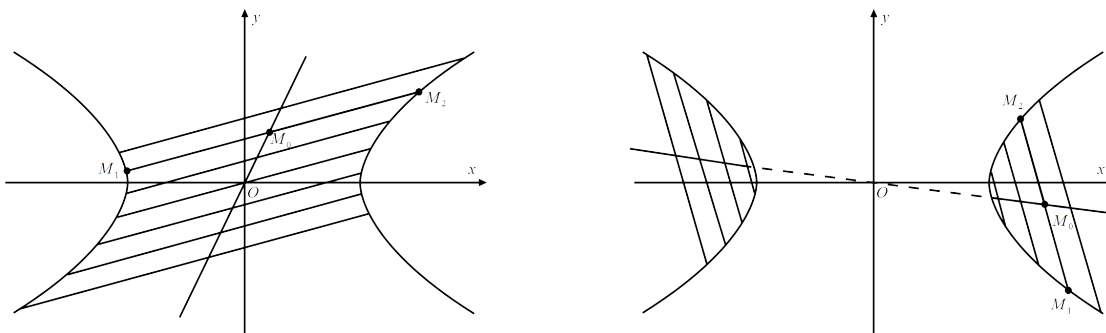


Rysunek 11. Kwadratura paraboli

i rozwartym i narysował dwie parabole i hiperbolę. Podane są też obliczenia dla boku danego sześcianu  $a = 7$  [m] (zob. także rysunek).

M. Bryński w [1] na s. 27-30 podaje metodę znajdowania pierwiastka dowolnego równania stopnia czwartego przy pomocy paraboli  $y = x^2$ . Należy skonstruować odpowiedni okrąg i znaleźć jego wspólne punkty z parabolą. Korzystając z tej metody, zadanie delijskie rozwiązuje się następująco: po przemnożeniu równania  $a^3 = 2$  obustronnie przez  $a$ , przekształca się je do postaci  $a^4 - a^2 + \frac{1}{4} + a^2 - 2a + 1 - \frac{5}{4} = 0$ , co po zwinieniu daje okrąg  $(a - 1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$ , przy czym  $y = a^2$ . Wykreślając ten okrąg i parabolę  $y = a^2$ , otrzymuje się punkty wspólne  $(0, 0)$  i  $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ . Metody tej autor używa też do trysekcji kąta  $60^\circ$ .

Podajmy jeszcze własność elipsy, hiperboli i paraboli dotyczącą środków równoległych cięciw: **środki równoległych cięciw do linii rzędu drugiego (elipsy, hiperboli i paraboli) leżą na jednej prostej**. Dla hiperboli pokazane jest to na rysunku 12. Odnotujmy, że w przypadku hiperboli cięciwy te nie powinny być wyznaczone przez proste równoległe do jej asymptot, czyli prostych o równaniach:  $y = \frac{b}{a}x$  i  $y = -\frac{b}{a}x$ , a w przypadku paraboli nie powinny być równoległe do osi  $Ox$  (twierdzenie i dowód w [2], s. 100–104).

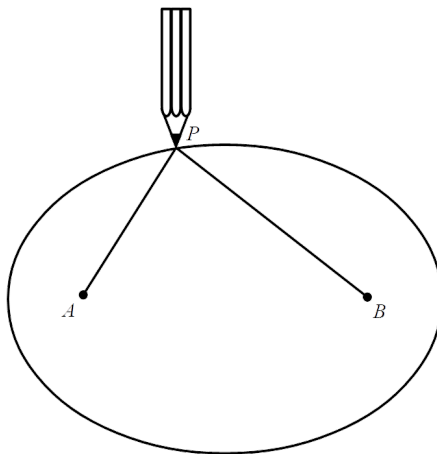


Rysunek 12. Równoległe cięciwy hiperboli i ich środki

## 6. Niektóre sposoby wykreślania krzywych stożkowych

Znana jest stara prosta metoda wykreślania okręgu za pomocą sznurka z jednym końcem zamocowanym w pewnym punkcie, podczas gdy kreda lub patyk umieszczony na drugim końcu rysuje okrąg. Przy konstrukcji łuku odcinkowego, gdy podana jest długość cięciwy  $AB$  łączącej końce łuku i długość „strzałki”  $CD$ , czyli odcinka normalnej od jej przecięcia się z cięciwą w punkcie  $C$  do punktu  $D$  — przecięcia się normalnej z łukiem, wtedy środek koła będzie punktem przecięcia się dwóch normalnych: normalnej do cięciwy  $AB$  i normalnej do cięciwy  $AD$  (lub  $DB$ ). Promień okręgu można obliczyć również z twierdzenia o przecinających się cięciwach. Przy naszych oznaczeniach będziemy mieli  $AC \cdot CB = CD \cdot x$ , gdzie  $CD + x = 2r$ . W przypadku gdy mamy duże rozmiary zarówno cięciwy  $AB$  jak i promienia okręgu (należy rysunek sporządzić w skali), to do wykreślenia łuku w praktyce służy tzw. cyrkiel drążkowy, którego działanie opiera się na twierdzeniu: kąty oparte o tę samą cięciwę okręgu są równe kątowi  $ADB$ .

Kreślenie elipsy za pomocą sznurka: tutaj końce sznurka zamocowane są w punktach zwanych ogniskami elipsy. Długopis wykreśla elipsę (rys. 13). Metodę ze sznurkiem stosuje się przy wyznaczaniu klombów (dlatego elipsę nazywa się krzywą ogrodników).

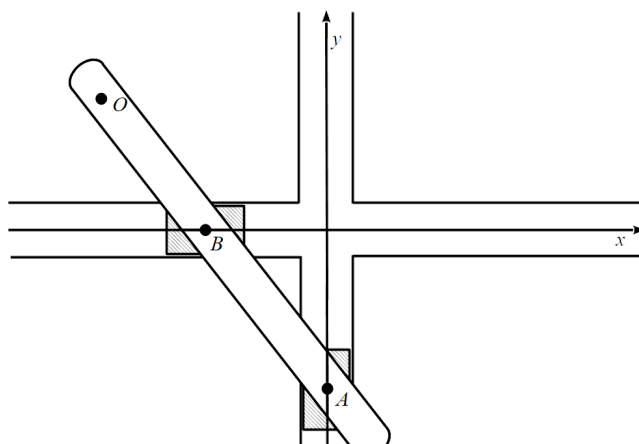


Rysunek 13. Wykreślanie elipsy za pomocą sznurka

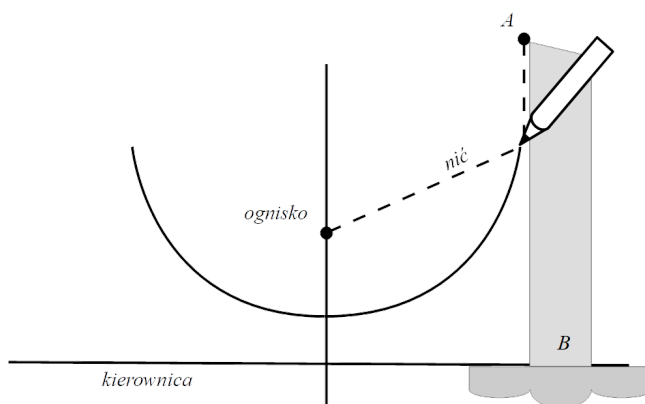
„Cyrkiel” do rysowania elipsy to linijka z otworami  $A$  i  $B$  ślizgającymi się odpowiednio na osiach  $Oy$  i  $Ox$  oraz z otworem  $O$ , gdzie  $AO$  i  $BO$  to półosie elipsy odpowiednio  $a$  i  $b$ . W punkcie  $O$  umieszczona kreda lub długopis rysuje elipsę (rys. 14, opis w [10] na s. 279–278). Łuki eliptyczne wykorzystuje się w budownictwie, a także przy wyrobie różnych przedmiotów. O zastosowaniu cyrkli drążkowych w budownictwie do wyznaczania łuków kołowych i eliptycznych można przeczytać w [15] na s. 361–363.

Podamy sposób na wykreślanie paraboli przy użyciu kątownika (rys. 15). Ołówek naciągający nitkę o długości  $AB$  wykreśla jedno z ramion paraboli przy przesuwaniu kątownika wzdłuż narysowanej prostej — kierownicy paraboli. Na rysunku wyraźnie widać, że odległości od dowolnego punktu powstającej paraboli do ustalonego punktu — ogniska, gdzie zamocowany jest jeden koniec nitki i do kierownicy (punkt  $B$ ) są równe (drugi koniec nitki zamocowany jest w górnej części kątownika, punkt  $A$ ). Analogicznie rysujemy drugie ramie paraboli, ustawiając kątownik po przeciwnej stronie ogniska (szczegółowy opis w [5], s. 257 – 258).

M. Gardner w [5], s. 258–259 i S. Kowal w [9], s. 83 piszą, że parabole możemy uzyskać za pomocą wielokrotnego zaginania papieru, co przedstawione jest tam na rysunku (metoda origami).



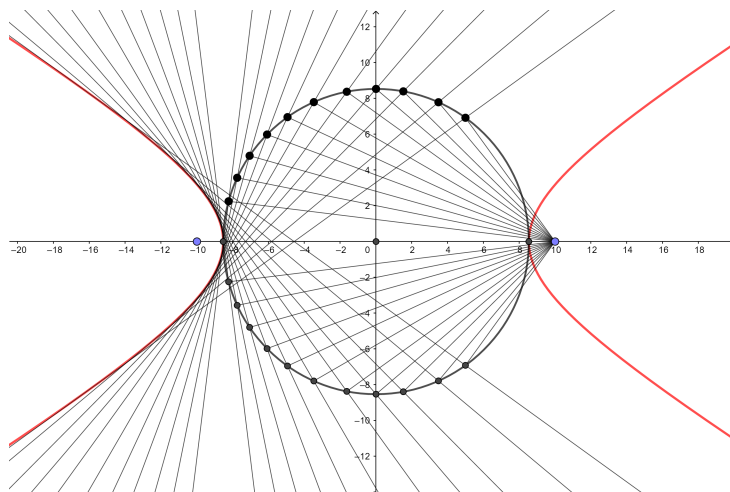
Rysunek 14. „Cyrkiel” do wykreślenia elipsy



Rysunek 15. Wykreślenie paraboli

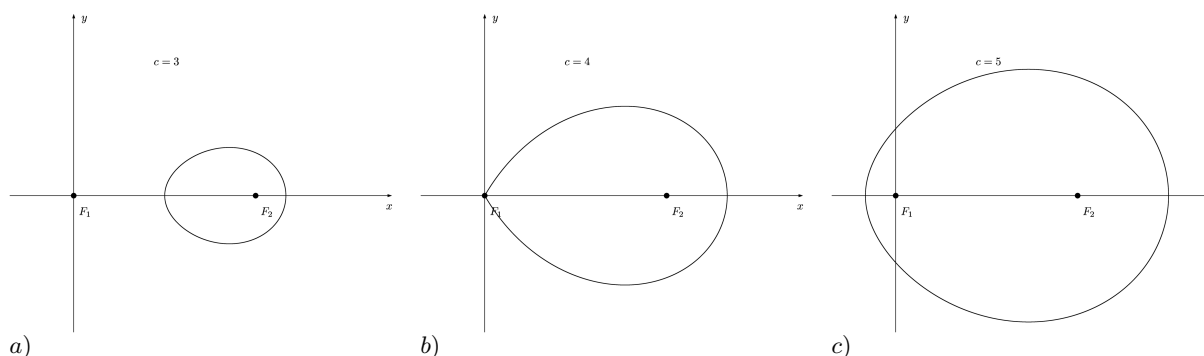
A. Duran w [3] na s. 21 zamieszcza opis powstawania paraboli (nazywa to inną definicją paraboli) jako obwiedni rodziny prostych. Podobnie J. Sales i F. Banyuls w [16] na s. 132 podają sposób wykreślenia gałęzi hiperboli jako obwiedni rodziny prostych: z prawego ogniska  $(c, 0)$  wykreśla się proste i w ich punktach wspólnych z okręgiem o promieniu  $a$  i środku w  $(0, 0)$  wyznacza się proste prostopadłe do nich, obwiednia których stanowi lewą gałąź hiperboli (rys. 16).

Prosty sposób szkicowania hiperboli (5) wiąże się z interpretacją geometryczną stałej  $b$  występującej w równości  $b^2 = c^2 - a^2$ . Hiperbola (5) nie przecina osi  $Oy$ , jeśli jednak wstawimy  $x = 0$  do jej równania, to otrzymamy równanie  $y^2 = -b^2$ , którego rozwiązaniami są liczby zespolone  $\pm bi$ . O punktach  $(0, -b)$  i  $(0, b)$  mówi się jako o nierzeczywistych punktach przecięcia hiperboli z osią  $Oy$ . Chcąc narysować hiperbolę, najpierw rysujemy tzw. prostokąt podstawowy, którego boki o długościach  $2a$  i  $2b$  są równoległe do osi układu współrzędnych, a przekątne pokrywają się z asymptotami hiperboli. Wówczas boki prostopadłe do osi  $Ox$  przechodzą przez wierzchołki hiperboli  $(-a, 0)$  i  $(a, 0)$ , a gałęzie „zblizają” się do asymptot. N. V. Efimow zauważa, że w literaturze matematycznej przyjęto także nazywać osiami hiperboli odcinki o długościach  $2a$  i  $2b$  łączące środki przeciwległych boków prostokąta podstawowego (zob. [2], s. 89).



Rysunek 16. Hiperbola jako obwiednia rodziny prostych

Elipsę i okrąg można traktować jako szczególne przypadki **owalu Kartezjusza**<sup>14</sup>, czyli krzywej, która jest miejscem geometrycznym wszystkich punktów, dla których suma odległości  $d$  od ustalonego punktu  $F_1$  i podwójnej odległości  $l$  od punktu ustalonego  $F_2$  jest stała i wynosi  $c$ .

Rysunek 17. Owale Kartezjusza dla różnych wartości parametru  $c$  przy  $m = 1$ ,  $n = 2$ ,  $F_1(0,0)$ ,  $F_2(2,0)$ 

Bardziej ogólne krzywe to miejsce geometryczne punktów dla których  $md + nl = c$ , gdzie  $m$  i  $n$  są liczbami rzeczywistymi. Na rys. 17 pokazano wykreślanie owalu Kartezjusza dla  $m = 1$  i  $n = 2$ . Rysując elipsę, przyjmujemy  $m = n = 1$ , a dla okręgu  $F_1 = F_2$ .

Opisy innych konstrukcji geometrycznych elipsy, hiperboli i paraboli, gdzie wykorzystuje się między innymi tzw. średnice sprzężone podane są w [17], odpowiednio na stronach 208–209, 215 i 218.

## 7. Krzywe stożkowe w języku literackim i potocznym

„Przez półtora wieku opis kreślenia krzywych stożkowych przez Menechemusa był jednocześnie ich nazwą: przekrój prostopadły do tworzącej stożka ostrego, prostego czy rozwartego to odpowiednio dzi-

<sup>14</sup> „Owale Kartezjusza są tak zwanymi krzywymi aplanatycznymi: jeśli dwa ośrodki są oddzielone owalem Kartezjusza, to wszystkie promienie świetlne, wychodzące z ustalonego punktu w jednym ośrodku skupiają się po załamaniu na granicy ośrodków w ustalonym punkcie drugiego ośrodka. To właśnie poszukiwania krzywych aplanatycznych doprowadziły Kartezjusza do jego owali”. J.C. Maxwell odkrył te owale niezależnie od Kartezjusza (zob. [5], s.47–50).



siejsze krzywe: elipsa, parabola i hiperbola” (zob. [16], s. 124). W III wieku p.n.e. Apoloniusz z Pergii napisał traktat „Koniká”, w którym użył tych właśnie słów. Nazwy te pochodziły „z antycznego języka pitagorejskiego dla rozwiązań równań drugiego stopnia: «elipsa» oznaczało brak, opuszczenie; «hiperbola» nadmiar (hiperbola jest wyolbrzymieniem, przesadą); «parabola» zaś zrównanie” (zob. [16], s. 125). W tym samym sensie terminy elipsa, hiperbola, parabola są stosowane w teorii literatury.

Elipsa jest figurą retoryczną, która polega na „pominięciu w zdaniu lub wyrażeniu jakiegoś składnika, który daje się na ogół zrekonstruować na podstawie kontekstu lub sytuacji towarzyszącej wypowiedzi. Elipsa stwarza konstrukcję niekompletną z punktu widzenia składniowego, ale zamkniętą znaczeniowo, co odróżnia ją od zdania lub wyrażenia urwanego” ([6], s. 126).

Inną figurą retoryczną jest hiperbola, czyli „przedstawienie jakiegoś zjawiska wyolbrzymiające jego wygląd, znaczenie, działanie i oddziaływanie [...] Używanie hiperboli bywa znakiem silnego zaangażowania emocjonalnego mówcy lub poety i ma podobną reakcję wywołać u odbiorcy” ([6], s. 197). Jeśli mówimy, że ktoś pęka ze śmiechu, umiera ze zmęczenia, szaleje z radości, wierci dziurę w brzuchu, to stosujemy właśnie hiperbolę w języku potocznym. Szurek w [18] na s. 43 pisze: „Dla uszu matematyka ciekawie brzmi określenie «topos hiperboliczny» — zwyczaj nakazujący w pewnych sytuacjach wyolbrzymić nasze uczucia [...]. Poznając kogoś nowego, mówimy na ogół «bardzo mi przyjemnie», ale czy naprawdę *bardzo nam przyjemnie*? No cóż, tak każe topos hiperboliczny...[...]. Greckie słowo «topos» oznacza «miejsce, źródło», a w teorii literatury używane jest w znaczeniu «skład wątków myślowych», «odwołanie się do ogólnie znanych prawd»”.

Z kolei parabola to gatunek literatury moralistycznej. Jest to „alegoryczna opowieść o treści moralno-dydaktycznej” (zob. [20]), czyli „utwór narracyjny, w którym przedstawione postacie i zdarzenia nie są ważne ze względu na swe cechy jednostkowe, lecz jako przykłady uniwersalnych prawideł ludzkiej egzystencji, postaw wobec życia i kolei losu [...] Właściwa interpretacja parabol wymaga przejścia od jej znaczenia literalnego do ukrytego znaczenia alegorycznego lub moralnego. Była to jedna z najbardziej uprzywilejowanych form literatury religijnej Dalekiego i Bliskiego Wschodu, zwłaszcza w obrębie buddyzmu i judaizmu” ([6], s. 450). W języku polskim częściej używa się rodzimego terminu przypowieść, jednak słowo parabola przetrwało w niezmienionej postaci w języku włoskim — na przykład w [11] mamy „Parabola del servitore spietato” (Mt 18, 23; przypowieść o niemiłosiernym dłużniku) oraz „Parabola degli operai” (Mt 20, 1; przypowieść o robotnikach winnicy).

Słowa koło i okrąg oraz pochodzące od nich (np. wokół, dookoła, okrągły, kołacz) są używane na co dzień. Na koniec przypomnijmy starą definicję Boga jako koła, którego środek jest wszędzie, a obwód nigdzie — jest to ciekawy przykład zastosowania pojęć matematycznych w zupełnie innej dziedzinie.

## Podziękowania

Autorka składa serdeczne podziękowania Panu mgr. Piotrowi Szczepaniakowi, nauczycielowi Szkoły Podstawowej im. M. Kopernika w Bralinie, za wykonanie rysunków do tego artykułu.

## Literatura

1. M. Bryński, *Konstrukcje klasyczne*, [w:] M. Bryński, L. Włodarski, *Konstrukcje geometryczne*, WSiP, Warszawa 1979.
2. N.V. Efimov, *Kratkij kurs analitičeskoj geometrii*, Gosud. Izd. Fiziko-Matem. Literatury, Moskwa 1963 [w języku rosyjskim].

3. A.J. Duran, *Poezja liczb. Znaczenie piękna w matematyce*, BUKA Books Sławomir Chojnacki (seria *Świat jest matematyczny*, tom 19), Warszawa 2012.
4. M. Gardner, *Krestiki- noliki*, Mir, Moskwa 1988 [w języku rosyjskim].
5. M. Gardner, *Ostatnie rozrywki. Hydry, jajka i inne mistyfikacje matematyczne*, Prószyński i S-ka, Warszawa 1997.
6. M. Głowiński, T. Kostkiewiczowa, A. Okopień-Sławińska, J. Sławiński, *Słownik terminów literackich*, Ossolineum, Wrocław 2000.
7. M. Kline, *Geometria*, [w:] *Matematyka w świecie współczesnym*, zbiór artykułów z *Scientific American*, PWN Biblioteka Problemów, Warszawa 1966.
8. P. Kopacz, *Gdy krzywa niejedno ma imię, to peh, czyli o stożkowych w ujęciu sferycznym*, Delta 2013 (3), s. 5-7.
9. S. Kowal, *Przez rozrywkę do wiedzy. Rozmaitości matematyczne*, PWT, Warszawa 1986.
10. W. Kryszwicki, H. Pisarowska, T. Świątkowski, *Z geometrią za pan brat*, Akapit, Łódź 2000.
11. *La Sacra Bibbia*, Ed. Paoline, Roma 2000 [w języku włoskim].
12. *Matematičeskaja enciklopedija*, Izd. Sov. Enc., Moskwa 1977 [w języku rosyjskim].
13. S. Przewłocki, *Geometria wykreślna w budownictwie*, Arkady, Warszawa 1997.
14. A.G.G. Richards, *Rowery i samochody* [w:] *Matematyka dla wszystkich*, R. Wesley (red.), PWT, Warszawa 1958, s. 419-451.
15. A.G.G. Richards, *Matematyka dla budowniczego i majstra-klepki*, [w:] *Matematyka dla wszystkich*, R. Wesley (red.), PWT, Warszawa 1958, s. 331-378.
16. J. Sales, F. Banyuls, *Niebezpieczne krzywe. Elipsy, hiperbole i inne geometryczne cuda*, BUKA Books Sławomir Chojnacki (seria *Świat jest matematyczny*, tom 34), Warszawa 2012.
17. M. Stark, *Geometria analityczna z wstępem do geometrii wielowymiarowej*, PWN, Warszawa 1974.
18. M. Szurek, *Topos przestrzeni*, Matematyka, Społeczeństwo, Nauczanie nr 25 (2000), s.43-45.
19. I.R. Vesselo, *Matematyka podróży* [w:] *Matematyka dla wszystkich*, R. Wesley (red.), PWT, Warszawa 1958, s. 211-261.
20. *Wielki słownik wyrazów obcych*, PWN, Warszawa 2003.