

doi:10.15199/48.2023.12.13

Modelowanie matematyczne procesów nieustalonych w układzie przeniesienia napędu z wałem Cardana w elektrycznym samochodzie ciężarowym

Streszczenie. W pracy opracowano model matematyczny układu przeniesienia napędu samochodu ciężarowego z napędem na tylną oś z uwzględnieniem ruchu wału napędowego, który zawiera przegub Cardana. Główny akcent w modelu postawiony jest na uwzględnienie rotacyjnych ruchów w wale podczas ruchu samochodu w złożonych warunkach pracy. Na podstawie modelu analizowane są dynamiczne stany pracy wału samochodu jadącego po różnych drogach zarówno w stanach statycznych, jak i dynamicznych. Równania stanu transmisji ruchu całkowali się przez metodę Runge-Kutta czwartego rzędu. Przedstawiono wyniki symulacji komputerowej w postaci rysunków, które są analizowane.

Abstract. There is developed mathematical model of transmission for rear-wheel electric cargo truck taking into account motion of driving shaft including Cardan joints. Model focuses on consideration of the rotary motion in the shaft in difficult working conditions. There are analyzed dynamic conditions of shaft operating on the flat and rough roads in the both states: dynamic and static as well. Mathematical model is realized by the fourth-order Runge-Kutta method. Computer simulation results are demonstrated and analyzed in the figures. (**Mathematical modeling of transient processes in the Cardan shaft drive train in an electric truck**).

Słowa kluczowe: modelowanie matematyczne, przegub Cardana, procesy dynamiczne, elektryczny samochód ciężarowy, metoda Runge-Kutta.

Keywords: mathematical modeling, Cardan joint, dynamical processes, transmission, electric cargo truck, Runge-Kutta method.

Wstęp

Nowe rozwiązania w produkowanych samochodach wymagają bardzo szerokiej analizy wszystkich podzespołów zarówno na etapie projektowania, jak i podczas eksploatacji. Jednym z głównych czynników wpływającym na poprawną pracę samochodu jest jego układ przeniesienia napędu – transmisja ruchu. W przypadku samochodów ciężarowych zazwyczaj napędzane są tylne osie lub oś. W większości przypadków przekazywanie momentu obrotowego silnika napędowego, od wale skrzyni biegów do reduktora tylnego mostu dokonywane jest za pomocą specjalnego wału, który zawiera przeguby Cardana. Taka konstrukcja transmisji jest znana jest od ponad stu lat i charakteryzuje się wysoką niezawodnością i efektywnością. Przeguby Cardana stosowane są w przypadku występowania istotnych odległości między mechanizmami przeniesienia napędu, najczęściej w układach, w których występują długie wały [1–5]. Zaproponowana metoda analizy procesów nieustalonych w wale Cardana samochodu ciężarowego może być wykorzystywana dla napędów innego typu, włącznie z silnikami spalinowymi.

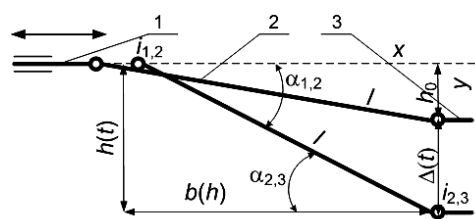
Główną częścią wału napędowego w samochodzie jest przegub Cardana, który wykonuje bardzo ważną rolę w zabezpieczeniu normalnej pracy maszyny [6]. W przypadku ogólnym w tylnym moście samochodu w poprzecznym przekroju występują oscylacyjne ruchy, co z kolei wpływa na kinematykę scalonej transmisji ruchu przedstawionego na rysunku 1.

Model matematyczny transmisji ruchu należy analizować z uwzględnieniem różnego rodzaju oscylacyjnych ruchów zarówno zewnętrznych (powiązane z energią zewnątrz), jak i wewnętrznych (przetwarzanie energii). Przyczyną występowania oscylacyjnych ruchów są różne chwilowe prędkości obrotowe wałów współpracujących i połączonych wzajemnie ze sobą, co w konsekwencji wywołuje różne kąty obrotu tych wałów. W pracy opracowano model matematyczny elementu transmisji ruchu dla samochodu ciężarowego z uwzględnieniem napędowego wału Cardana.

Celem pracy jest opracowanie modelu matematycznego napędowego wału Cardana samochodu ciężarowego z silnikiem napędowym PMSM, a także analiza oscylacyjnych procesów nieustalonych występujących w elementach transmisji ruchu maszyny.

Model matematyczny

Model matematyczny analizowanego obiektu dynamicznego tworzymy z uwzględnieniem budowy geometrycznej wału Cardana przedstawionego na rysunku 1. Pracę układu dynamicznego możemy opisać w sposób następujący. Scalony wał napędowy składa się z trzech wałów. Pierwszy wał (1) – wtórny (końcowy) jest wyjściowym wałem skrzyni biegów (reduktora). Drugi wał (2) – długi (centralny) nazywany jest wałem środkowym. Trzeci wał (3) – pierwotny (wejściowy) jest wałem reduktora tylnego mostu. Wszystkie wały są połączone przez dwa przeguby Cardana o przekładniach $i_{1,2}$ oraz $i_{2,3}$. Wał (1) porusza się przestrzennie wzdłuż osi (x), natomiast w osi poprzecznej (y) nie występuje żaden ruch. Wał (3) porusza się przestrzennie wzdłuż osi (y), natomiast we osi podłużnej (x) nie występuje żaden ruch. Wał (2) porusza się w obu osiach współrzędnych (x) oraz (y).



Rys. 1. Schemat kinematyczny wału Cardana w samochodzie ciężarowym

Na rysunku 1 także występują następujące oznaczenia: $\Delta(t)$ – amplituda wahania wału wejściowego tylnego mostu, $h(t)$ – zmienna w czasie odległość między wałami (1) oraz (3) względem osi y , $b(h)$ – nieliniowa zmienna odległość między wałami (1) i (3) względem osi x . l – stała długość długiego wału (2), $\alpha_{1,2}$ i $\alpha_{2,3}$ – kąty występujące między

odpowiednimi wałami, h_0 – stała odległość między wałami (1) i (3).

W przypadku ogólnym kąty między wałami są jednakowe. Obliczamy je na podstawie rysunku 1.

$$(1) b(h) = \sqrt{l^2 - (h(t))^2}, \quad h(t) = h_0 + \Delta(t)$$

$$(2) \alpha_{1,2} = \alpha_{2,3} = \arctg\left(\frac{h(t)}{b(h)}\right) = \arctg\left(\frac{h(t)}{\sqrt{l^2 - (h(t))^2}}\right)$$

Zależność kąta obrotu między wałami w przegubie Cardana, dla pierwszego przegubu określa równanie [7]:

$$(3) \varphi_2 = \arctg\left(\frac{1}{\cos \alpha_{1,2}} \operatorname{tg} \varphi_1\right), \quad i_{2,1} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

gdzie: φ , ω – kąt obrotu oraz prędkość kątowna wałów, i – przekładnia przegubu Cardana [8].

Całkując wyrażenie (3) względem czasu t oraz kąta φ_1 otrzymujemy:

$$(4) \omega_2 = \frac{\omega_1 + 0,5 \operatorname{tg} \alpha_{1,2} \sin 2(\varphi_1 + \theta) \alpha'_{1,2}}{\cos \alpha_{1,2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_{1,2} \sin^2(\varphi_1 + \theta))}$$

$$(5) \omega_3 = \frac{\omega_2 + 0,5 \operatorname{tg} \alpha_{2,3} \sin 2(\varphi_2 + \theta) \alpha'_{2,3}}{\cos \alpha_{2,3} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_{2,3} \sin^2(\varphi_2 + \theta))}$$

$$(6) \frac{d\alpha_{1,2}}{dt} \equiv \alpha'_{1,2}, \quad \alpha_{1,2} = \alpha_{2,3}, \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

gdzie: θ – dodatkowy kąt, który uwzględnia przesunięcie wzajemne pomiędzy osiami końcówek widłowych przegubu [7].

Uwzględniając wyrażenie (2) otrzymamy:

$$(7) \frac{d\alpha_{1,2}}{dt} = \frac{d\alpha_{2,3}}{dt} = \frac{dh(t)}{dt} \frac{1}{\sqrt{l^2 - h^2(t)}}$$

$$(8) \operatorname{tg} \alpha_{1,2} = \frac{h(t)}{\sqrt{l^2 - h^2(t)}}, \quad \cos \alpha_{1,2} = \frac{\sqrt{l^2 - h^2(t)}}{l}$$

Kąty obrotów wszystkich wałów wyznaczamy z równań ruchu obrotowego:

$$(9) \frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1 = 2\pi n_1, \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2 = 2\pi n_2, \quad \frac{d\varphi_3}{dt} = \omega_3 = 2\pi n_3$$

gdzie: n – prędkość obrotowa wałów.

Do modelowania ruchu samochodu po nierównej drodze wykorzystujemy nieliniową funkcję sinus:

$$(10) \Delta(t) = \Delta_0 \sin^2(\Omega t + \psi)$$

gdzie: Δ_0 – amplituda ruchu tylnego mostu, Ω – częstotliwość występowania wzniesień (garbów) na drodze, ψ – faza oscylacji.

W analizowanym samochodzie ciężarowym, zastosowano silnik synchroniczny typu PMSM, który jest analizowany w pracy [9].

$$(11) \frac{d\Psi_S^\Pi}{dt} = \mathbf{u}_S^\Pi - \Omega_S \Psi_S^\Pi - \mathbf{r}_S \mathbf{i}_S^\Pi$$

$$(12) \mathbf{i}_S^\Pi = \alpha_S (\Psi_S^\Pi - \psi)$$

$$(13) \Omega_S = \Pi \frac{d\Pi^{-1}}{dt} = \omega \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(14) \Pi \equiv \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -\sin(\gamma - 120^\circ) & \sin \gamma \\ -\cos(\gamma - 120^\circ) & \cos \gamma \end{bmatrix}$$

$$(15) \Pi^{-1} \equiv \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \cos(\gamma - 120^\circ) & -\sin(\gamma - 120^\circ) \end{bmatrix}$$

$$(16) \Psi_d = \frac{1}{\alpha_d + \alpha_S + \alpha_d} (\alpha_S \Psi_{SA}^\Pi + F_0)$$

$$(17) \Psi_q = \frac{\alpha_S}{\alpha_q + \alpha_S} \Psi_{SB}^\Pi, \quad \alpha \equiv \begin{bmatrix} \alpha_d & \\ & \alpha_q \end{bmatrix}$$

$$(18) \frac{d\gamma}{dt} = \omega = 2\pi n = \frac{\omega_1}{k_T} = 2\pi \frac{n_1}{k_T}$$

gdzie: Ψ_S^Π – wektor kolumnowy przekształconych we współrzędnych Parka (d , q) głównych strumieni skojarzonych stojana silnika, \mathbf{u}_S^Π – wektor kolumnowy przekształconych fazowych napięć zasilania stojana, \mathbf{r}_S – macierz rezystancji stojana, \mathbf{i}_S^Π – wektor kolumnowy przekształconych fazowych prądów stojana, α_S – macierz odwrotnych indukcyjności rozproszenia stojana, Ψ – wektor kolumnowy roboczych strumieni skojarzonych silnika, Π – macierz Parka, Ω_S – macierz prędkości obrotowych stojana, α – macierz odwrotnych podstawowych indukcyjności silnika, γ – kąt obrotu wirnika, α_d^* – obliczeniowa odwrotna statyczna indukcyjność magnesów silnika, F_0 – stała siła magnetomotoryczna (SMM) magnesów trwałych, k_T – przekładnia skrzyni biegów (reduktora) samochodu.

Elektromagnetyczny moment obrotowy silnika synchronicznego z magnesami trwałymi wyznaczamy z zależności [9]:

$$(19) M_{EM} = \frac{3}{2} p_0 (\Psi_d i_q - \Psi_q i_d)$$

gdzie: p_0 – liczba par biegunów stojana.

W pracy nie analizujemy dynamiki samochodu elektrycznego a ograniczamy się wyłącznie do analizy wału Cardana w transmisji ruchu. Dlatego na podstawie modelu silnika PMSM (11) – (20) wykorzystujemy aproksymację prędkości obrotowej wtórnego wału (1) skrzyni biegów [6]:

$$(20) \omega_1 = k_P^{-1} A \left[1 - \exp(-0.1 t^B) \right]$$

gdzie: A i B – współczynniki aproksymacji.

Wspólnemu całkowaniu podlega równanie (9) z uwzględnieniem wzorów: (1), (2), (4) – (8), (10), (11), (20).

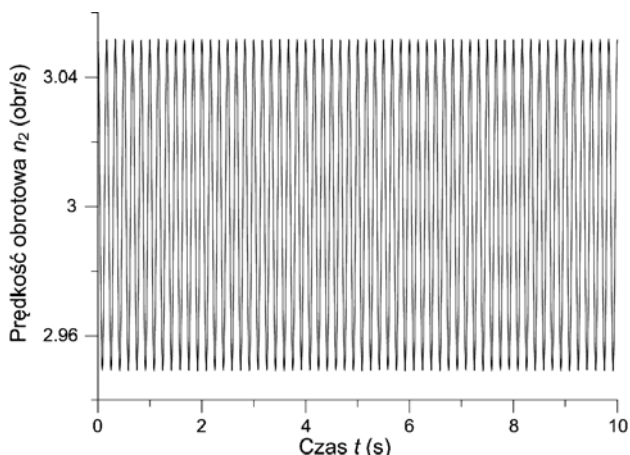
Wyniki symulacji komputerowej

Symulacja komputerowa została wykonana w dwu eksperymentach. W eksperymencie pierwszym samochód ciężarowy jechał po równej drodze i nierównej drogach ze stałą prędkością, $\omega_1 = \text{const}$. W drugim eksperymencie samochód rozpędzał się do stałej prędkości po tych samych drogach, czyli $\omega_1 = \text{var}$. Analizowano procesy dynamiczne w jeździe samochodu przy dwu wartościach częstotliwości występowania wzniesień na drodze. Parametry układu przedstawiono teoretycznie i są następujące:

$n_1=3$ obr/s, $L=3$ m, $h_0=0,3$ m, $\Delta_0 = 0,5$ m, $\Omega_I = 0$ s⁻¹, $\Omega_{II} = 2$ s⁻¹, $\Omega_{III} = 5$ s⁻¹, $\psi = 0$, $A = 1$, $B = 1,7$. Równania stanu transmisji ruchu całkowali się przez metodę Runge-Kutta.

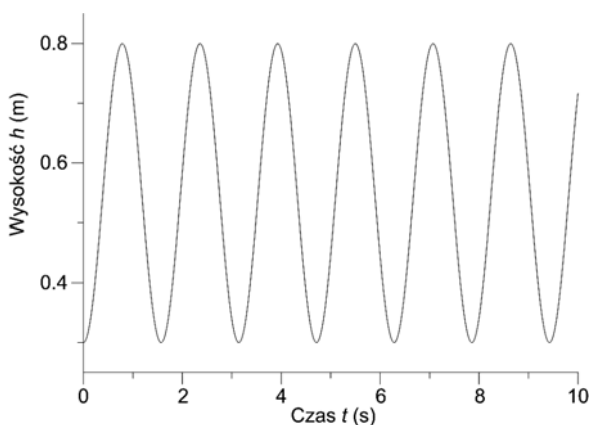
Eksperyment pierwszy.

Na rysunku 2 przedstawiono chwilową prędkość obrotową długiego wału Cardana (2) dla pierwszego eksperymentu dla $\Omega_I = 0$ s⁻¹, oznacza to, że samochód jechał po idealnie równej drodze. Należy podkreślić, że w przegubach Cardana przekładnia jest zmienną funkcją kąta obrotu wału [7], nawet w przypadku, gdy tylny most nie przemieszcza się. Prędkość obrotowa długiego wału jest zmienna. Prędkość wału (3) w przeciwieństwie do wału (2) jest taka sama jak wału (1) [7]. W przypadku, gdy $\alpha_{1,2} \neq \alpha_{2,3}$ prędkości pierwszego i trzeciego wałów różniłyby się [7]. W samochodach wspomniany przypadek jest praktycznie niemożliwy, patrz rysunek 1.



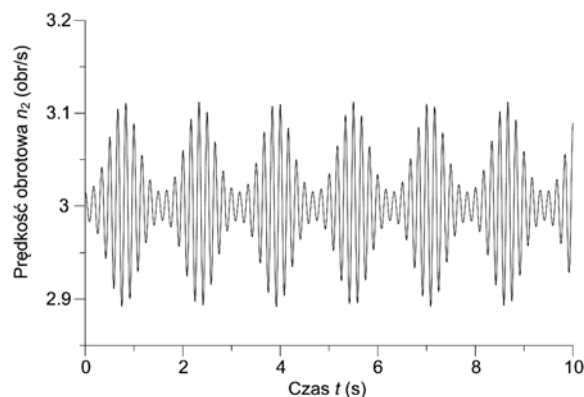
Rys.2. Prędkość obrotowa centralnego wału (2) dla pierwszego doświadczenia ($\Omega_I = 0$ s⁻¹)

Na rysunku 3 przedstawiono amplitudę wahania tylnego mostu samochodu, w przypadku jazdy po wzniesieniach ze stałą prędkością. Do modelowania została wykorzystana funkcja sinus kwadrat, patrz wzór (10) i rysunek 1.



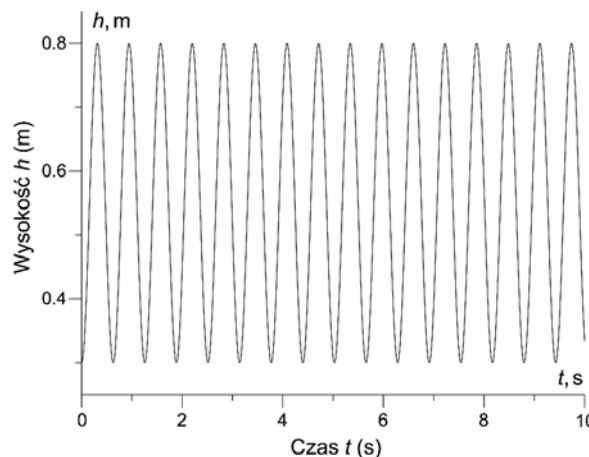
Rys.3. Amplituda oscylacji wału (3) tylnego mostu, $\Omega_I = 2$ s⁻¹

Na rysunku 4 przedstawiono chwilową prędkość obrotową długiego wału Cardana (2) dla pierwszego eksperymentu dla $\Omega_{II} = 2$ s⁻¹, co oznacza, że samochód jechał po nierównej drodze. W porównaniu do rysunku 2 sytuacja jest diametralnie inna. Pojawiły się dodatkowe dudnienia wahań prędkości obrotowej, które są powiązane ze zmianą prześwitu samochodu, czyli ze zmianą kątów $\alpha_{1,2}$ ($\alpha_{2,3}$) [11]. Dudnienia prędkości obrotowej negatywnie wpływają na wytrzymałość materiałów, z których wytwarzane są wały.



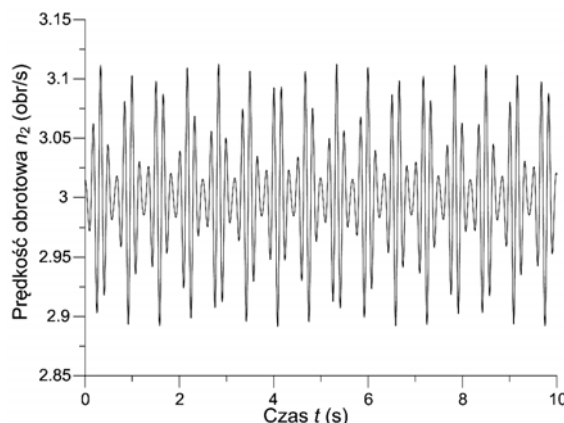
Rys.4. Prędkość obrotowa centralnego wału (2) dla pierwszego doświadczenia $\Omega_{II} = 2$ s⁻¹)

Na rysunku 5 przedstawiono amplitudę wahania tylnego mostu samochodu, jadącego po wzniesieniach ze stałą prędkością, ale z częstotliwością wzniesień 2,5 razy większą w porównaniu do rysunku 3, patrz wzór (10) oraz rysunek 1.



Rys.5. Amplituda oscylacji wału (3) (tylnego mostu), $\Omega_{II} = 5$ s⁻¹

Na rysunku 6 przedstawiono chwilową prędkość obrotową długiego wału Cardana (2) dla $\Omega_{III} = 5$ s⁻¹. Samochód jechał po nierównej drodze o jeszcze większej liczbie wzniesień. W porównaniu do rysunku 3 częstotliwość oscylacji oraz dudnienie prędkości obrotowej środkowego wału znacznie wzrosła.

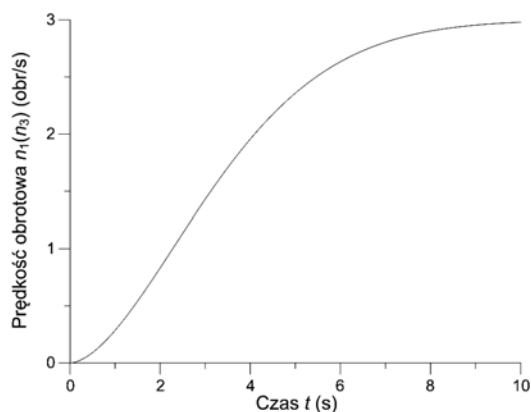


Rys.6. Prędkość obrotowa centralnego wału (2) dla pierwszego doświadczenia $\Omega_{III} = 5$ s⁻¹)

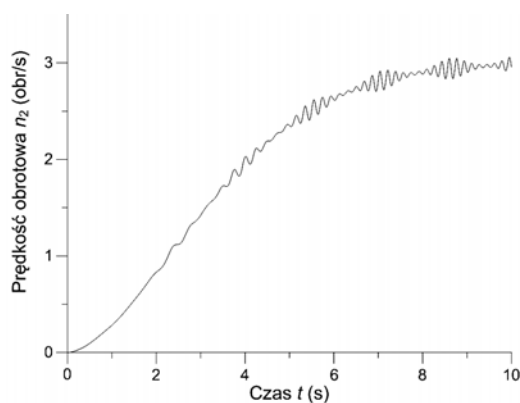
Oznacza to, że bardziej nierówna droga powoduje szybsze zmniejszenie wytrzymałości materiału, z którego wykonany jest wał.

Eksperyment drugi.

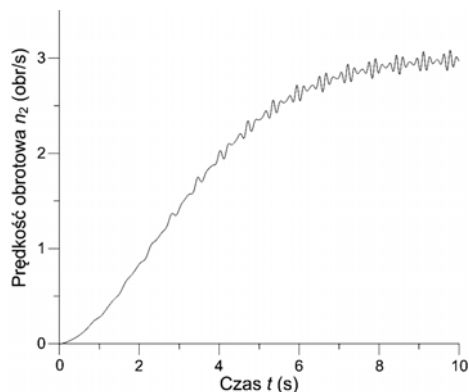
Na rysunku 7 przedstawiono chwilowe prędkości obrotowe wtórnego wału skrzyni biegów samochodu oraz wejściowego wału reduktora tylnego mostu. Po czasie 10 sekund samochód osiągnął ustaloną prędkość.



Rys. 7. Prędkość obrotowa wałów (1) oraz (3) dla drugiego doświadczenia



Rys. 8. Prędkość obrotowa centralnego wału (2) dla drugiego doświadczenia $\Omega_{II} = 2 \text{ s}^{-1}$



Rys. 9. Prędkość obrotowa centralnego wału (2) dla drugiego doświadczenia $\Omega_{III} = 5 \text{ s}^{-1}$

Na rysunkach 8 i 9 przedstawiono chwilowe prędkości obrotowe długiego wału Cardana (2) dla dwu wartości częstotliwości pojawiania się wzniesień na trasie ruchu samochodu: $\Omega_{II} = 2 \text{ s}^{-1}$ oraz $\Omega_{III} = 5 \text{ s}^{-1}$. Sytuacja w tych przypadkach jest podobna do pierwszego eksperymentu.

Jest oczywiste, że jazda po nierównej drodze jest jedną z przyczyn uszkodzenia przegubów Cardana, a czasami i całego długiego wału [10]. Analizując rysunki 4 – 7 można twierdzić, że przyczyną uszkodzeń przegubów Cardana jest proces dudnienia oscylacji prędkości obrotowej centralnego wału.

Wnioski

1. Modelowanie matematyczne procesów dynamicznych w transmisji wału Cardana samochodów ciężarowych przyczynia się do optymalizowania zmęczenia materiału jednostek napędu. Dotyczy to bezpośrednio przegubu, a także wytrzymałości długiego wału transmisji ruchu (2).

2. Zwiększenie liczby wzniesień na trasie ruchu samochodu zwiększa częstotliwość dudnienia prędkości obrotowej centralnego wału transmisji. Na podstawie wyników symulacji komputerowej można stwierdzić, że częstotliwość pojawiania się wzniesień na trasie ruchu samochodu zwiększa częstotliwość dudnienia oscylacji prędkości obrotowej długiego wału. Wpływa to negatywnie na długotrwałość i niezawodność pracy wału Cardana (3).

Podwyższenie niezawodności transmisji ruchu w samochodach ciężarowych można osiągnąć poprzez zwiększenia współczynnika tłumienia oscylacji tylnego mostu samochodu oraz wprowadzenia dodatkowego tłumika drgań skrętnych [12]. W konsekwencji zmniejszamy amplitudę oscylacji prędkości obrotowej wału Cardana.

Autor: dr hab. inż. Andriy Chaban, prof. UTH Rad., University of Technology and Humanities in Radom, Faculty of Transport and Electrical Engineering, ul. Malczewskiego 29, 26-600 Radom, E-mail: atchaban@gmail.com

LITERATURA

- [1] Song M.-H., Nam T.-K., Lee J.-u., Self-Excited Torsional Vibration in the Flexible Coupling of a Marine Propulsion Shafting System Employing Cardan Shafts, *Journal of Marine Science and Engineering*, 8 (2020), nr 5, 348
- [2] Glavardanov V.B., Maretic R.B., Grahovac N. M., Buckling of a twisted and compressed rod supported by Cardan joints, *European Journal of Mechanics A/Solids*, (2009), nr 28, 131–140
- [3] Rabiei S.P., Azarafza R., Investigate of mechanical fuse in cardan shaft using fem, *Review of Information Engineering and Applications*, 1 (2014), nr 1, 1 – 10
- [4] Song M.-H., Pham X.D., Vuong Q.D., Torsional Vibration Stress and Fatigue Strength Analysis of Marine Propulsion Shafting System Based on Engine Operation Patterns. *Journal of Marine Science and Engineering*, (2020), nr 8, 613
- [5] Popenda A., Lis M., Nowak M., Blecharz K., Mathematical Modelling of Drive System with an Elastic Coupling Based on Formal Analogy between the Transmission Shaft and the Electric Transmission Line, *Energies*, (2020), nr 13, 1181
- [6] Yu W., Huang Z., Zhong C., Liu J., Yuan Z., Method of Suppressing Torsional Vibration Noise of Automobile Drivetrain System Based on Discrete Wavelet, *J. Intell. Fuzzy Syst.*, (2020), nr 38, 7585–7594
- [7] Chaban A., Łukasik Z., Popenda A., Szafranec A., Mathematical modelling of transient processes in an asynchronous drive with a long shaft including cardan joints, *Energies*, 14 (2021), nr 18, 5692
- [8] Chen W., Liang J., Shi T., Speed Synchronous Control of Multiple Permanent Magnet Synchronous Motors Based on an Improved Cross-Coupling Structure, *Energies*, (2018), nr 11, 282
- [9] Czaban A., Czaban W., Rusek A., Lis M., Model matematyczny silnika synchronicznego z magnesami trwałymi typu PMSM z wykorzystaniem metod wariacyjnych, *Maszyny Elektryczne, Zeszyty Problemowe*, 98 (2013), nr 1, 177-182
- [10] Kanaan H.Y., Al-Haddad K., Roy G., Analysis of the electromechanical vibrations in induction motor drive due to the mechanical transmission system, *Mathematics and Computers in Simulation*, (2003), nr 63, 421 – 433
- [11] Pukach P., Il'kiv V., Nytrebych Z., Vovk M., Investigation of the mathematical model of bending oscillations of the oil tanks' wall in the transformers considering nonlinear dissipative for ces, 14th International Conference The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics, (2017), 32–34
- [12] Madej J.: Mechanika napędu pojazdów szynowych z elektrycznymi silnikami trakcyjnymi Monografia PWN Warszawa, 1983