MINUT 2020 (2), s. 92–99
ISSN 2719-3063

Józef BURZYK[1], Jan POCHCIAŁ[1]

[1]Institute of Mathematics, Silesian University of Technology, Gliwice, Poland

Rodziny zbiorów, zadania wprowadzające do teorii miary

Streszczenie. Prezentowany zestaw zadań poprzedzony kilkoma pojęciami wstępnymi ma charakter wprowadzający w problematykę funkcji rzeczywistych, teorii miary i tematyki pokrewnej. Jest wynikiem kilkuletnich doświadczeń autorów związanych z prowadzeniem zajęć z Teorii funkcji rzeczywistych na Wydziale Matematyczno-Fizycznym Politechniki Ślaskiej. Może być wykorzystywany zarówno przez studentów jak i prowadzących zajęcia. Autorem przeważającej większości niestandardowych zadań jest pierwszy z autorów, którego wkład w powstanie tej pracy jest absolutnie kluczowy.

Podstawowe oznaczenia i definicje

Niech (A_n) będzie ciągiem podzbiorów ustalonego zbioru X.

Zbiór $\{x \in X : \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n > n_0\; x \in A_n\}$ nazywamy *dolną granicą* ciągu (A_n) i oznaczamy $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$.

Zbiór $\{x \in X : \forall n_0 \in \mathbb{N}\, \exists n > n_0\; x \in A_n\}$ nazywamy *górną granicą* ciągu (A_n) i oznaczamy $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$.

Jeżeli $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n = A$, to zbiór A nazywamy *granicą* ciągu (A_n) i oznaczamy $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

Niepusta rodzina $\mathcal{R}$ podzbiorów zbioru X jest *półpierścieniem*, jeżeli spełnia następujące warunki:

$$A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{R},$$

$$A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow \exists C_1, C_2, ..., C_n \in \mathcal{R} \quad A \setminus B = C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n.$$

Niepusta rodzina $\mathcal{R}$ podzbiorów zbioru X jest *pierścieniem*, jeżeli spełnia następujące warunki:

$$A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R},$$

$$A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{R}.$$

Autor korespondencyjny: J. Pochciał (jan.pochcial@polsl.pl).
Data wpłynięcia: 23.03.2020.

Niepusta rodzina $\mathcal{R}$ podzbiorów zbioru X jest *ciałem*, jeżeli spełnia następujące warunki:

$$A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R},$$

$$A \in \mathcal{R} \Rightarrow A' \in \mathcal{R},$$

gdzie A' jest dopełnieniem zbioru A w zbiorze X.

Niepusta rodzina $\mathcal{R}$ podzbiorów zbioru X jest $\sigma-$*pierścieniem*, jeżeli spełnia następujące warunki:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A_n \in \mathcal{R} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R},$$

$$A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{R}.$$

Niepusta rodzina $\mathcal{R}$ podzbiorów zbioru X jest $\sigma-$*ciałem*, jeżeli spełnia następujące warunki:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A_n \in \mathcal{R} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R},$$

$$A \in \mathcal{R} \Rightarrow A' \in \mathcal{R}.$$

Dla dowolnego zbioru niepustego X i dowolnej rodziny $\mathcal{R} \subset 2^X$ przez $\mathbf{S}(\mathcal{R})$, $\mathbf{F}(\mathcal{R})$, $\mathbf{P}(\mathcal{R})$ oznaczamy odpowiednio $\sigma-$*ciało, ciało* i *pierścień* podzbiorów X generowany przez $\mathcal{R}$.

Jeżeli $\mathcal{I}$ jest niepustą rodziną podzbiorów zbioru X spełniającą następujące warunki:

$$A, B \in \mathcal{I} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{I},$$

$$A \in \mathcal{I},\ B \subset A \ \Rightarrow B \in \mathcal{I},$$

to mówimy że $\mathcal{I}$ jest *ideałem* w 2^X. Jeżeli $\mathcal{I} \neq 2^X$ to ideał $\mathcal{I}$ nazywamy *ideałem właściwym*. Ideał w 2^X nazywamy *ideałem maksymalnym*, jeżeli jest ideałem właściwym i dla dowolnego ideału $\mathcal{I}_0 \subset 2^X$ takiego że $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}_0$ mamy $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}$ lub $\mathcal{I}_0 = 2^X$.

Zadania

1 Niech $A_n \subset \mathbb{R}$. Znaleźć $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ i $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$, jeżeli:

(a) $$A_n = \begin{cases} [0,1] & \text{dla } n \text{ nieparzystego} \\ [0,2] & \text{dla } n \text{ parzystego} \end{cases}$$

(b) $$A_n = [(-1)^n \frac{1}{n}, 1]$$

(c) $$A_n = [n, n+1]$$

(d) $$A_n = \{x_n\}, \quad \text{gdzie} \quad x_n \to x$$

(e)
$$A_n = \begin{cases} [0, 1 - \frac{1}{n}] & \text{dla } n \text{ nieparzystego} \\ [\frac{1}{n}, 1] & \text{dla } n \text{ parzystego} \end{cases}$$

2 Wykazać, że:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

3 Wykazać, że jeśli $A_{n+1} \subset A_n$ dla $n \in \mathbb{N}$ lub $A_{n+1} \supset A_n$ dla $n \in \mathbb{N}$, to istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ przy czym:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

w przypadku, gdy ciąg (A_n) jest zstępujący,

oraz:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

w przypadku, gdy ciąg (A_n) jest wstępujący.

4 Wykazać, że:

$$(\liminf_{n\to\infty} A_n)' = \limsup_{n\to\infty} A_n'$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n' = (\limsup_{n\to\infty} A_n)'$$

5 Wykazać, że:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A \Leftrightarrow \limsup_{n\to\infty}(A_n \div A) = \emptyset.$$

6 Wykazać, że:

(a)
$$\liminf_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) = \liminf_{n\to\infty} A_n \cap \liminf_{n\to\infty} B_n$$

(b)
$$\limsup_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) = \limsup_{n\to\infty} A_n \cup \limsup_{n\to\infty} B_n$$

(c)
$$\liminf_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) \supset \liminf_{n\to\infty} A_n \cup \liminf_{n\to\infty} B_n$$

(d)
$$\limsup_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) \subset \limsup_{n\to\infty} A_n \cap \limsup_{n\to\infty} B_n$$

Podać przykłady wykazujące, że znaków inkluzji w zadaniach (a) i (b) nie można zastąpić znakami równości.

Wykazać, że jeśli istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ lub $\lim\limits_{n\to\infty} B_n$ to:

(e)
$$\liminf_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) = \liminf_{n\to\infty} A_n \cup \liminf_{n\to\infty} B_n$$

(f)
$$\limsup_{n\to\infty}(A_n \cap B_n) = \limsup_{n\to\infty} A_n \cap \limsup_{n\to\infty} B_n$$

7 Wykazać, że:

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$$

8 Niech (p_n) będzie podciągiem ciągu (n). Wykazać, że jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$, to $\lim\limits_{n\to\infty} A_{p_n} = A$. Czy analogiczne stwierdzenie jest prawdziwe dla $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ i $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$?

9 Niech $A_n = (a_n, b_n)$, gdzie $0 < a_n < b_n < 1$. Wykazać, że ciąg (A_n) zawiera podciąg zbieżny, tzn. istnieje zbiór A i podciąg liczb naturalnych (p_n) taki, że $\lim\limits_{n\to\infty} A_{p_n} = A$.

10 Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem wszystkich liczb wymiernych odcinka $[0, 1]$. Znaleźć $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ i $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$, jeżeli:

(a) $$A_n = [0, x_n]$$

(b) $$A_n = \begin{cases} [x_n, x_{n+1}] & \text{jeśli } x_{n+1} > x_n \\ [0,1] \setminus [x_{n+1}, x_n] & \text{jeśli } x_{n+1} < x_n \end{cases}$$

(c)(*) $$A_n = \begin{cases} [x_n, x_{n+1}] & \text{jeśli } x_{n+1} > x_n \\ [x_{n+1}, x_n] & \text{jeśli } x_{n+1} < x_n \end{cases}$$

11 Niech $X = \{1, 2, 3\}$.

(a) Wyznaczyć liczbę wszystkich rodzin podzbiorów zbioru X.

(b) Podać przykład pierścienia zawartego w 2^X, który nie jest ciałem.

(c) Wyznaczyć liczbę wszystkich pierścieni i ciał zawartych w 2^X.

(d) Opisać wszystkie pierścienie i ciała zawarte w 2^X.

12

(a) Wykazać, że każdy skończony pierścień jest σ-pierścieniem, a każde ciało σ-ciałem.

(b) Czy znak "$\bigcup$" w definicjach pierścienia, σ-pierścienia, ciała i σ-ciała można zastąpić znakiem "$\bigcap$" ?

(c) Wykazać, że jeśli $\mathfrak{M}$ jest pierścieniem (σ-pierścieniem) podzbiorów zbioru X oraz $X \in \mathfrak{M}$, to $\mathfrak{M}$ jest ciałem (σ-ciałem).

13 Niech $X = \mathbb{N}$. Podać przykład pierścienia zawartego w 2^X, który nie jest σ-pierścieniem i ciała, które nie jest σ-ciałem.

14 Wykazać, że jeśli $\mathfrak{M}_0$ jest pierścieniem (σ-pierścieniem) podzbiorów zbioru X oraz $\mathfrak{M} = \{A \subset X;\ A \in \mathfrak{M}_0 \text{ lub } A' \in \mathfrak{M}_0\}$, to $\mathfrak{M}$ jest ciałem (σ-ciałem).

Czy dla każdego ciała (σ-ciała) $\mathfrak{M}$ istnieje pierścień (σ-pierścień) $\mathfrak{M}_0$ taki, że dla każdego $A \in \mathfrak{M}$ dokładnie jeden ze zbiorów A lub A' należy do $\mathfrak{M}_0$?

15 Udowodnić, że liczba elementów dowolnego skończonego ciała zbiorów jest równa 2^n. Czy twierdzenie to jest prawdziwe dla pierścienia?

16 Załóżmy, że X jest dowolnym zbiorem a $\mathfrak{m}$ liczbą kardynalną nieskończoną. Wykazać, że zbiór: $\mathfrak{M} = \{A \subset X : \ \mathrm{moc}(A) \le \mathfrak{m}\}$ jest $\sigma-$pierścieniem podzbiorów zbioru X.

17 Niech X będzie zbiorem niepustym oraz $A, B, C \subset X$. Znaleźć pierścień i ciało podzbiorów X generowane przez rodzinę $\{A, B, C\}$.

18 Opisać pierścień, ciało i $\sigma-$ciało generowane przez skończoną rodzinę $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ podzbiorów zbioru X.

19 Załóżmy, że X jest dowolnym zbiorem niepustym, a $\mathcal{R}$ jest rodziną wszystkich podzbiorów jednopunktowych X. Znaleźć pierścień, ciało i $\sigma-$ciało generowane przez rodzinę $\mathcal{R}$.

20 Udowodnić, że każda z podanych rodzin generuje ten sam pierścień to samo ciało i $\sigma-$ciało podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych:
$\{(a,b) : \ a, b \in \mathbb{R}, \ a < b\}$, $\{[a,b] : \ a, b \in \mathbb{R}, \ a < b\}$, $\{[a,b) \cup (c,d] : \ a, b, c, d \in \mathbb{R}, \ a < b < c < d\}$.

21 Opisać $\sigma-$ciało podzbiorów $\mathbb{R}$ generowane przez wszystkie przedziały postaci $[a, b)$, gdzie $a, b \in \mathbb{Z}, \ a < b$.

22 Załóżmy, że X_1, X_2 są zbiorami rozłącznymi i $X = X_1 \cup X_2$. Niech $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ będą ciałami podzbiorów odpowiednio X_1 i X_2. Znaleźć ciało podzbiorów X generowane przez $\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$.

23 Podać przykład dwóch rodzin $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \subset 2^{\mathbb{N}}$ takich, że $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \emptyset$, oraz $\mathbf{P}(\mathcal{R}_1) = \mathbf{P}(\mathcal{R}_2)$.

24 Udowodnić, że jeśli $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ są rodzinami podzbiorów zbioru X, oraz $\mathbf{P}(\mathcal{R}_1) = \mathbf{P}(\mathcal{R}_2)$, to $\mathbf{F}(\mathcal{R}_1) = \mathbf{F}(\mathcal{R}_2)$ oraz $\mathbf{S}(\mathcal{R}_1) = \mathbf{S}(\mathcal{R}_2)$.

25 Podać przykład dwóch nieskończonych pierścieni $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ podzbiorów tego samego zbioru takich, że $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 = \{\emptyset\}$, oraz $\mathbf{S}(\mathfrak{M}_1) = \mathbf{S}(\mathfrak{M}_2)$.

26 Niech $\mathfrak{M}$ będzie ciałem podzbiorów zbioru X. Niech $\mathcal{R} = \mathfrak{M} \cup \{Z\}$, gdzie Z jest dowolnym podzbiorem zbioru X. Udowodnić, że: $\mathbf{F}(\mathcal{R}) = \{(A \cap Z) \cup (B \cap Z') : \ A, B \in \mathfrak{M}\}$. Pokazać, że jeśli $\mathfrak{M}$ jest $\sigma-$ciałem, to $\mathbf{F}(\mathcal{R}) = \mathbf{S}(\mathcal{R})$.

27 Niech $\mathcal{R} \subset 2^X$ będzie taką rodziną zbiorów, że $\emptyset \in \mathcal{R}$ oraz $A, B \in \mathcal{R}, \ A \ne B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$. Udowodnić, że: $\mathbf{P}(\mathcal{R}) = \{A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n : \ n \in \mathbb{N}, \ A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{R}\}$.

28 Niech $\mathcal{P}_0$ będzie rodziną wszystkich przedziałów w $\mathbb{R}$ postaci $[a, b)$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ i $a \le b$. Przyjmijmy, że: $\mathfrak{M}_0 = \{P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_n : \ P_i \in \mathcal{P}_0, \ i = 1, 2, ..., n\}$. Udowodnić, że $\mathfrak{M}_0$ jest pierścieniem.

29 Niech $\mathcal{P}_0$ będzie rodziną przedziałów zdefiniowaną w poprzednim zadaniu. Przyjmijmy, że: $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \cup \{(-\infty, a) : \ a \in \mathbb{R}\} \cup \{[b, \infty) : \ b \in \mathbb{R}\}$ oraz $\mathfrak{M} = \{P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_n : \ P_i \in \mathcal{P}, \ i = 1, 2, ..., n\}$. Udowodnić, że $\mathfrak{M}$ jest ciałem podzbiorów $\mathbb{R}$.

30 Udowodnić, że jeżeli $\mathfrak{M}$ jest pierścieniem podzbiorów zbioru X, to relacja $\sim$ określona w 2^X w następujący sposób: $A \sim B :\Leftrightarrow A \div B \in \mathfrak{M}$, jest relacją równoważności.

31 Niech $\mathfrak{M}$ będzie pierścieniem podzbiorów zbioru X. Dla dowolnych dwóch zbiorów $A, B \in \mathfrak{M}$ niech $A \oplus B = A \div B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$. Udowodnić, że z tak określonym dodawaniem $\mathfrak{M}$ jest grupą przemienną.

32 Niech $\mathcal{R}$ będzie rodziną wszystkich kwadratów domkniętych w $\mathbb{R}^2$. Niech $\mathfrak{M}$ będzie pierścieniem generowanym przez $\mathcal{R}$. Udowodnić, że:

(a) dowolny odcinek (domknięty, otwarty) należy do $\mathfrak{M}$,

(b) dowolny wielokąt domknięty i wielokąt otwarty należą do $\mathfrak{M}$.

33 Załóżmy, że , $f : X \to X$ funkcją różnowartościową, gdzie $X \neq \emptyset$. Niech $\mathfrak{M} = \{A \subset X : \ f[A] = A\}$. Udowodnić, że $\mathfrak{M}$ jest $\sigma-$pierścieniem, a jeśli $f[X] = X$, to $\mathfrak{M}$ jest $\sigma-$ciałem.

34 Udowodnić, że jeśli $\mathfrak{M}$ jest $\sigma-$ciałem podzbiorów zbioru X a $f : X \to Y$ dowolną funkcją, to rodzina $\{A \subset Y : \ f^{-1}[A] \in \mathfrak{M}\}$ jest $\sigma-$ciałem podzbiorów zbioru Y.

35 Niech $\mathfrak{M}$ będzie rodziną wszystkich tych zbiorów $A \subset [0,1]$, których funkcja charakterystyczna χ_A jest całkowalna w sensie Riemanna. Udowodnić, że $\mathfrak{M}$ jest ciałem podzbiorów $[0,1]$, ale nie jest $\sigma-$ciałem.

36 Dla dowolnego zbioru skończonego $A \subset \mathbb{N}$ oznaczmy przez $|A|$ ilość elementów zbioru A. Dla dowolnego $A \subset \mathbb{N}$ określamy funkcje $m_w[A]$ oraz $m_z[A]$ w następujący sposób:

$$m_w[A] = \liminf_{n\to\infty} \frac{|A \cap \{1,2,...,n\}|}{n}, \qquad m_z[A] = \limsup_{n\to\infty} \frac{|A \cap \{1,2,...,n\}|}{n}$$

Niech: $\mathfrak{M}_0 = \{A \subset \mathbb{N} : \ m_z[A] = 0\}, \quad \mathfrak{M} = \{A \subset \mathbb{N} : \ m_w[A] = m_z[A]\}.$

Udowodnić, że:

(a) dowolny zbiór skończony należy do $\mathfrak{M}_0$,

(b) zbiór wszystkich kwadratów liczb naturalnych należy do $\mathfrak{M}_0$,

(c)(**) zbiór liczb pierwszych należy do $\mathfrak{M}_0$,

(d) dla każdego $\varepsilon \in [0,1]$ istnieje zbiór $A \in \mathfrak{M}$ taki, że $m_z[A] = m_w[A] = \varepsilon$.

Podać przykład zbioru nie należącego $\mathfrak{M}$.

37 Przy założeniach poprzedniego zadania udowodnić, że:

(a) $\mathfrak{M}_0$ jest pierścieniem podzbiorów $\mathbb{N}$, ale nie jest $\sigma-$pierścieniem,

(b) jeśli $A,\ B \in \mathfrak{M}$ oraz $A \cap B = \emptyset$, to $A \cup B \in \mathfrak{M}$,

(c) jeśli $A,\ B \in \mathfrak{M}$ oraz $B \subset A$, to $A \setminus B \in \mathfrak{M}$,

(d) $\mathfrak{M}$ nie jest pierścieniem.

38 Niech (X,d) będzie dowolną przestrzenią metryczną. Oznaczmy przez $\mathfrak{M}$ rodzinę tych zbiorów $A \subset X$, których domknięcie $\overline{A}$ jest zwarte. Udowodnić, że $\mathfrak{M}$ jest pierścieniem zbiorów.

Czy $\mathfrak{M}$ musi (może) być $\sigma-$pierścieniem ?

39 Udowodnić, że rodzina podzbiorów I-kategorii dowolnej przestrzeni metrycznej jest $\sigma-$pierścieniem.

40 Niech (X,d) będzie dowolną przestrzenią metryczną. Oznaczmy przez $\mathcal{K}$ rodzinę wszystkich kul otwartych: $K(x,r) = \{y \in X : \ d(y,x) < r\}, \quad (x \in X,\ r > 0).$

Niech $\mathfrak{M}$ będzie $\sigma-$ciałem generowanym przez $\mathcal{K}$. Udowodnić, że:

(a) dla dowolnych $x \in X$ i $r > 0$ kula domknięta $\overline{K}(x,r) = \{y \in X : \ d(y,x) \leq r\}$ należy do $\mathfrak{M}$,

(b) jeżeli X jest przestrzenią ośrodkową, to dowolny zbiór otwarty (domknięty) należy do $\mathfrak{M}$.

Pokazać że założenie ośrodkowości w punkcie (b) jest istotne.

41 Załóżmy że $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ są pierścieniami podzbiorów odpowiednio X i Y. Udowodnić, że $\{A \times B : \ A \in \mathfrak{M}, \ B \in \mathfrak{N}\}$ jest półpierścieniem podzbiorów zbioru $X \times Y$.

Opisać pierścień podzbiorów $X \times Y$ generowany przez $\mathcal{R}$.

42 Pokazać, że dla dowolnego $q \in \mathbb{N}$, rodzina zbiorów $\{[\mathbf{a}, \mathbf{b}) : \ \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^q\}$ jest półpierścieniem w$\mathbb{R}^q$. Opisać pierścień generowany przez tę rodzinę.

43 Udowodnić, że jeśli $\mathfrak{M}$ jest półpierścieniem, to:
$\mathbf{P}(\mathfrak{M}) = \{A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n : \ n \in \mathbb{N}, \ A_1, A_2, ..., A_n \in \mathfrak{M}\}$.

44 Załóżmy, że X, Y są zbiorami niepustymi a $\mathfrak{M}$ jest $\sigma-$ciałem podzbiorów $X \times Y$. Oznaczmy przez π rzutowanie z $X \times Y$ na X (tzn. π jest odwzorowaniem z $X \times Y$ na X określonym za pomocą wzoru $\pi(x,y) = x$.) Wykazać, że $\pi(\mathfrak{M})$ jest $\sigma-$ciałem podzbiorów X.

45 Udowodnić, że dowolny ideał w 2^X, jest pierścieniem podzbiorów zbioru X. Podać przykład ideału, który nie jest $\sigma-$pierścieniem i ideału, który jest $\sigma-$pierścieniem.

46 Pokazać, że jeśli $\mathcal{I}$ jest ideałem w 2^X, to $\mathfrak{M} = \{A \subset X : \ A \in \mathcal{I}$ lub $X \setminus A \in \mathcal{I}.\}$ jest ciałem podzbiorów zbioru X.

47 Udowodnić, że ideał $\mathcal{I} \subset 2^X$ jest ideałem maksymalnym wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujący warunek: $A \subset X \Rightarrow A \in \mathcal{I}$ lub $X \setminus A \in \mathcal{I}$.

48 (*) Udowodnić że dowolny ideał jest zawarty w ideale maksymalnym.

49 Załóżmy, że $\mathcal{S}$ jest rodziną ciał ($\sigma-$ciał) podzbiorów zbioru X. Udowodnić, że $\bigcap\{\mathfrak{M} : \ \mathfrak{M} \in \mathcal{S}\}$ jest ciałem ($\sigma-$ciałem).

50 Podać przykład dwóch $\sigma-$ciał podzbiorów tego samego zbioru X, których suma nie jest ciałem.

51 Niech $\mathcal{S}$ będzie rodziną ciał podzbiorów zbioru X. Udowodnić, że jeśli rodzina $\mathcal{S}$ spełnia następujący warunek: $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \in \mathcal{S} \Rightarrow \mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2$ lub $\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_1$, to $\bigcup\{\mathfrak{M} : \ \mathfrak{M} \in \mathbf{S}\}$ jest ciałem podzbiorów zbioru X.

52 Podać przykład ciągu $(\mathfrak{M}_n)$ $\sigma-$ciał podzbiorów tego samego zbioru X takiego, że $\mathfrak{M}_n \subset \mathfrak{M}_{n+1}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, oraz $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}_n$ nie jest $\sigma-$ciałem.

53 Niech $\mathfrak{M}_0$ będzie będzie ciałem podzbiorów zbioru X i załóżmy, że $A_0 \in 2^X \setminus \mathfrak{M}_0$. Udowodnić, że istnieje maksymalne ciało $\mathfrak{M}$ podzbiorów zbioru X takie, że $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}$ i $A_0 \notin \mathfrak{M}$.

54 (*) Pokazać, że twierdzenie sformułowane w zadaniu poprzednim nie jest prawdziwe dla $\sigma-$ciał.

55 (*) Niech $\mathfrak{M}_0$ będzie ciałem podzbiorów zbioru X. Czy musi istnieć maksymalne właściwe ciało $\mathfrak{M}$ podzbiorów zbioru X zawierające $\mathfrak{M}_0$?

56 Pokazać, że jeśli $\mathcal{R}$ jest nieskończoną rodziną podzbiorów zbioru X, to:

$$\mathrm{moc}(\mathbf{P}(\mathcal{R})) = \mathrm{moc}(\mathbf{F}(\mathcal{R})) = \mathrm{moc}(\mathcal{R}).$$

57 (*) Udowodnić że jeśli $\mathfrak{M}$ jest nieskończonym $\sigma-$ciałem, to $\mathrm{moc}(\mathfrak{M}) \geq \mathfrak{c}$.

Wybrane wskazówki i odpowiedzi

5 $\Rightarrow$ (nie wprost)

$x \in \limsup(A_n \div A) \Rightarrow$ a) $x \in A_n \setminus A$ dla nieskończenie wielu n lub b) $x \in A \setminus A_n$ dla nieskończenie wielu n

w przyp. a) $x \in \limsup(A_n \setminus A)$ w przyp. b) $x \in A \setminus \limsup(A_n)$ sprzeczność.

$\Leftarrow$ (nie wprost)

$A \neq \lim A_n \quad \Rightarrow \quad \limsup((A_n \cup A) \setminus A) \neq \emptyset \Rightarrow \limsup(A_n \setminus A) \neq \emptyset$ lub $A \setminus \liminf(A_n \cap A) \neq \emptyset \Rightarrow A \setminus \liminf A_n \neq \emptyset$

W obu przypadkach $\limsup(A_n \div A) \neq \emptyset$, sprzeczność.

18 Jak łatwo zauważyć ciało generowane przez rodzinę $\mathcal{R}$ składa się z tych zbiorów $A \subset X$, że zbiór A jest skończony lub jego dopełnienie jest skończone. Podobnie $\sigma-$ciało generowane przez $\mathcal{R}$ składa się z tych zbiorów, które są przeliczalne lub których dopełnienia są przeliczalne.

20 Jak łatwo zauważyć $\sigma-$ciało to składa się ze zbiorów postaci $\bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} [\alpha_{n-1}, \alpha_n)$, gdzie $\alpha_{n-1} < \alpha_n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}$.

57 Niech (A_n) będzie ciągiem złożonym z różnych zbiorów $\sigma-$ciała $\mathfrak{M}$ oraz:

$$\mathfrak{M}_0 = \{ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^*, \text{ gdzie } A_n^* \in \{A_n, A_n^{'}\}\}.$$

Łatwo zauważyć, że:

1^0 $\forall B_1, B_2 \in \mathfrak{M}_0, \quad B_1 \neq B_2 \Rightarrow B_1 \cap B_2 = \emptyset$;

2^0 $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}$;

3^0 $\forall x \in X \quad \exists! B_x \in \mathfrak{M}_o$ taki, że $x \in B_x$;

4^0 $\forall n \in \mathbb{N} \quad A_n = \bigcup\limits_{x \in A_n} B_x$.

Z 4^0 wynika, że rodzina $\mathfrak{M}_0$ zawiera ciąg (B_n), $(n \in \mathbb{N})$.

Niech: $\mathfrak{M}_1 = \{ \bigcup\limits_{n \in \delta^{-1}(1)} B_n;\ \delta \in \{0,1\}^\omega\}$.

Oczywiście (z 2^0) $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}$ i wobec 1^0 moc $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{c}$. Zatem moc $\mathfrak{M} \geq \mathfrak{c}$.

Literatura

1. A.N.Kolmogorov, S.V. Fomin, *Elementy teorii funkcji i funkcjonalnovo analiza*. Nauka. Moskva 1976.
2. K.Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*. PWN. Warszawa 1972.
3. S.Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*. PWN. Warszawa 1973.