
Pomiary kwantowe A.D. 2023

Quantum Measurements A.D. 2023

Rafał Demkowicz-Dobrzański*

Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego

Streszczenie: W artykule przedstawiono współczesne spojrzenie na zagadnienie pomiarów kwantowych z punktu widzenia kwantowej teorii estymacji oraz najnowsze osiągnięcia teoretyczne i doświadczalne w dziedzinie metrologii kwantowej, ze szczególnym podkreśleniem wkładu grupy badawczej z Uniwersytetu Warszawskiego w rozwój metod teoretycznych.

Słowa kluczowe: metrologia kwantowa, pomiary kwantowe, kwantowa teoria estymacji, interferometria optyczna

Abstract: In the article a quantum estimation theory perspective on the concept of quantum measurement is presented, as well as the latest theoretical and experimental developments in the field of quantum metrology, with particular focus on the contribution of a research group from the University of Warsaw to the development of theoretical methods.

Keywords: quantum metrology, quantum measurements, quantum estimation theory, optical interferometry

Zacznijmy od przypomnienia, czego na temat pomiarów kwantowych uczą nas kanoniczne podręczniki mechaniki kwantowej. Dyskusja zagadnienia pomiaru prowadzona jest zazwyczaj w języku obserwabli, czyli operatorów hermitowskich $\hat{A} = \sum_i a_i |a_i\rangle\langle a_i|$ reprezentujących daną wielkość fizyczną, których wartości własne $\{a_i\}$ reprezentują możliwe wyniki pomiarów, a stany własne $\{|a_i\rangle\}$ odpowiadają stanom o dobrze określonej wartości danej wielkości fizycznej i tworzą bazę ortonormalną w przestrzeni Hilberta. Recepta na obliczanie prawdopodobieństw odpowiednich wyników pomiarów jest zadana regułą Borna $p_i = |\langle a_i|\psi\rangle|^2$. Dodatkowo, nieodzownym elementem wykładu jest sformułowanie zasady nieoznaczoności Heisenberga w wersji $\Delta^2 A \Delta^2 B \geq \frac{1}{4} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|^2$, która ogranicza od dołu wariancję wyników pomiaru dwóch obserwabli na danym stanie poprzez wartość oczekiwaną ich komutatora. I to by było na tyle, jeśli chodzi o podstawowy kurs mechaniki kwantowej!

Czy to naprawdę wszystko, co ciekawego można powiedzieć na temat pomiarów kwantowych? Zdecydowanie nie! Poniżej kilka argumentów:

a) W eksperymencie bardzo rzadko mamy do czynienia z bezpośrednim pomiarem wielkości fizycznej, która nas interesuje. Pomyślmy chociażby o eksperymencie Sterna-Gerlacha. Chcemy mierzyć rzut spinu cząstki na daną oś, a mierzymy ... miejsce, w którym

uderzy cząstka w ekran po tym, jak przeszła przez niejednorodne pole magnetyczne. Czy w takim razie faktycznie mierzymy obserwabłę reprezentującą rzut spinu na daną oś? Jak poprawnie opisać proces pomiaru w tym przypadku?

- b) Pewne wielkości fizyczne, które chcielibyśmy zmierzyć, nie mają odpowiadającej sobie obserwabli, np. czas, opóźnienie fazowe w interferometrze optycznym, kąt obrotu cząstki. Czy to znaczy, że nie możemy tych wielkości mierzyć? Możemy, ale w takich sytuacjach, skoro nie ma obserwabli odpowiadającej danej wielkości fizycznej, pojawia się nieoczywiste pytanie, jakie pomiary pozwolą nam na uzyskanie jak najlepszej informacji na temat interesujących nas wielkości fizycznych.
- c) Zasada nieoznaczoności w wersji Robertsona mówi jedynie o rozrzucie wyników pomiaru dwóch obserwabli, które mierzylibyśmy na *niezależnie przygotowanych* kopiach danego stanu kwantowego, a tym samym nie dotyczy w sposób jawny problemu *jednoczesnego pomiaru* tych wielkości fizycznych na tym samym układzie fizycznym, a w szczególności tego np., jak pomiar położenia zaburza pęd cząstki i *vice versa*.

Tego typu zagadnienia, dla których próżno szukać odpowiedzi w standardowych kursach mechaniki kwantowej, stały się bodźcem do rozwoju całej dziedziny kwantowej teorii pomiaru i estymacji [Hel76, Hol82, BKT92, WM09], która stanowi bazę dla rozwoju swego rodzaju „zbrojnego ramienia technologicznego” zwa-

*ORCID: 0000-0001-5550-4431

nego metrologią kwantową [GLM11, DDJK15, DRC17, PSO⁺18, PVSS20].¹

Fundamenty kwantowej teorii pomiaru i estymacji zostały sformułowane już w latach 70. XX wieku, w głównej mierze dzięki pracom Helstroma [Hel76] i Holevo [Hol82]. Kluczowym krokiem było wprowadzenie pojęcia pomiarów uogólnionych. Pojęcie to pojawia się naturalnie, gdy uwzględnimy fakt, że w trakcie pomiaru nasz układ fizyczny oddziałuje z pewnym większym (ale ciągle kwantowym) „układem pomiarowym”, a sam odczyt wyniku przez obserwatora następuje na podstawie obserwacji stanu tego większego układu pomiarowego. Matematycznie prowadzi to do opisu pomiaru za pomocą zestawu dodatnich operatorów $\{M_i\}$, które sumują się do jedynki, $\sum_i M_i = \mathbf{1}$, a reguła liczenia prawdopodobieństw danych wyników pomiaru ma postać $p_i = \langle \psi | M_i | \psi \rangle$ (ogólniej, jeśli mamy do czynienia ze stanem mieszanym $p_i = \text{Tr}(\rho M_i)$). W przypadku pomiarów standardowych (rzutowych) powyższe operatory byłyby po prostu rzutami na odpowiednie wektory własne danej obserwabli $M_i = |a_i\rangle\langle a_i|$. Tu jednak operatory mogą być dowolne, a co więcej możemy mieć ich dowolną liczbę, a nawet nieprzeliczalny zbiór. Można pokazać, że dla każdego zestawu takich operatorów pomiarowych istnieje fizyczny protokół (schemat) ten pomiar realizujący.

Dzięki pojęciu pomiarów uogólnionych możliwe było w szczególności sformalizowanie problemu jednoczesnego pomiaru niekomutujących obserwabli, który okazuje się możliwy kosztem dodatkowego zaszumienia wyników pomiaru. Przykładowo, jednoczesny pomiar położenia i pędu prowadzi do ograniczenia na iloczyn wariancji uzyskanych wyników postaci $\Delta^2 x \Delta^2 p \geq \hbar^2$ [YL73], co jest czterokrotnie silniejszym ograniczeniem, niż ograniczenie wynikające ze standardowej zasady nieoznaczoności Heisenberga–Robertsona.

1. W tym miejscu, należy podkreślić, że poza powyższymi „technicznymi” problemami związanymi z pomiarami kwantowymi, istnieją znacznie głębsze zagadnienia o charakterze *de facto* filozoficznym, dotyczące samych podstaw mechaniki kwantowej. Pojęcie pomiaru pojawia się w teorii jako aksjomat i tym samym w ramach ortodoksyjnej minimalistycznej interpretacji kopenhaskiej nie można zredukować procesu pomiaru do unitarnej ewolucji, która opisuje ewolucję układów fizycznych izolowanych. Tym samym proces pomiaru jest pewnego rodzaju „wtrętem klasycznym” w ramach teorii. Intuicyjnie, wierząc w fundamentalny charakter opisu kwantowego, chcielibyśmy jednak sam pomiar również opisać jako proces kwantowy. Z tym jednak są poważne problemy i zwolennicy konkurujących ze sobą różnych interpretacji mechaniki kwantowej prowadzą ze sobą od ponad stu lat spór na temat natury pomiaru kwantowego, funkcji falowej, roli obserwatora, świadomości, grawitacji itp. Mimo doniosłości tych pytań, nie będziemy się nimi tutaj zajmować, jako że zaprowadziłoby to nas w gąszcz filozoficznych dywagacji, z których moglibyśmy się szybko nie wypłatać... o tych rzeczach można by napisać w wersji „weekendowej” artykułu.

W typowym zagadnieniu kwantowej teorii estymacji rozważa się stan kwantowy ρ_φ sparametryzowany jednym lub wieloma parametrami φ . Celem jest znalezienie optymalnego pomiaru uogólnionego $\{M_i\}$ oraz estymatora $\tilde{\varphi}(i)$, które zapewnią jak najlepszą estymację nieznanego parametru φ . Estymator jest funkcją, która na podstawie uzyskanych wyników pomiaru zwraca wartość estymowanego parametru. Zadanie kwantowej teorii estymacji, można teraz sformułować następująco: znajdź najlepszy pomiar i estymator, tak by błąd estymacji był jak najmniejszy.

Jednym z najważniejszych matematycznych narzędzi pozwalających określić najlepszą możliwą precyzję estymacji parametru zakodowanego w stanach kwantowych jest *kwantowa informacja Fishera*, $F_Q(\rho_\varphi)$ [Hel76, Hol82, BC94]. Jej odwrotność daje fundamentalne dolne ograniczenie na możliwą wariancję estymatora (nieobciążonego) w postaci:

$$\Delta^2 \tilde{\varphi} \geq \frac{1}{F_Q(\rho_\varphi)}. \quad (1)$$

Powyższa nierówność nazywana jest kwantową nierównością Craméra-Rao. Znajomość kwantowej informacji Fishera pozwala ocenić, jak dużo informacji na temat danego parametru można uzyskać wykonując pomiar na stanie ρ_φ . W przypadku stanów czystych $\rho_\varphi = |\psi_\varphi\rangle\langle\psi_\varphi|$ wielkość ta wyraża się prostym, jawnym wzorem

$$F_Q(|\psi_\varphi\rangle) = 4 \left(\langle \dot{\psi}_\varphi | \dot{\psi}_\varphi \rangle - |\langle \psi_\varphi | \dot{\psi}_\varphi \rangle|^2 \right), \quad |\dot{\psi}_\varphi\rangle = \frac{d}{d\varphi} |\psi_\varphi\rangle. \quad (2)$$

Jako przykład zastosowania, rozważmy problem estymacji czasu ewolucji układu fizycznego. Niech $|\psi_t\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar} |\psi_0\rangle$ będzie stanem przeewoluowanym pod wpływem znanego Hamiltonianu w nieznanym czasie t . Naszym celem jest estymacja czasu t . Zauważając, że $|\dot{\psi}_t\rangle = -i\hat{H}/\hbar |\psi_t\rangle$ i korzystając z równania (2) otrzymujemy

$$F_Q(|\psi_t\rangle) = \frac{4}{\hbar^2} \left(\langle \psi_t | \hat{H}^2 | \psi_t \rangle - \langle \psi_t | \hat{H} | \psi_t \rangle^2 \right) = \frac{4}{\hbar^2} \Delta^2 \hat{H}. \quad (3)$$

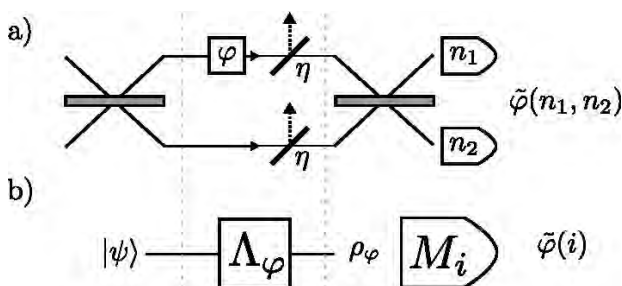
Widzimy, że kwantowa informacja Fishera jest proporcjonalna do wariancji Hamiltonianu na stanie $|\psi_t\rangle$. Korzystając z nierówności Craméra-Rao (1) otrzymujemy

$$\Delta^2 \tilde{t} \Delta^2 \hat{H} \geq \frac{\hbar^2}{4}. \quad (4)$$

Tym samym wyprowadziliśmy formalnie zasadę nieoznaczoności typu czas-energia, gdzie $\Delta^2 \hat{H}$ jest standardową wariancją obserwabli, w tym przypadku związanej z energią, a $\Delta^2 \tilde{t}$ jest wariancją estymatora. Zauważmy, że dzięki ogólnemu sformułowaniu w ramach kwantowej teorii estymacji, nie przeszkadzała nam sytuacja, w której estymowany parametr (czas) związany jest z wielkością, która nie ma odpowiadającej sobie obserwabli. Ma to operacyjny sens, ponieważ możemy mierzyć dowolną

obserwablę i na jej podstawie wnioskować o upływie czasu.

Z praktycznego punktu widzenia, najciekawsze wyniki kwantowej teorii estymacji i metrologii kwantowej dotyczą zagadnień interferometrii optycznej. Na cały problem interferometrii optycznej można patrzeć nieco bardziej abstrakcyjnie, jako na przykład problemu estymacji kanału kwantowego (rys. 1) [DDJK15]. Można traktować ramiona interferometru, w których wprowadzane jest opóźnienie fazowe i gdzie zachodzą straty fotonów, jako kanał kwantowy Λ_φ . Kanał kwantowy przekształca wejściowy stan $|\psi\rangle$ (w tym przypadku będzie to stan światła za pierwszą płytką światłodzielną interferometru, którą tym samym można traktować jako element przygotowania stanu) w stan końcowy $\rho_\varphi = \Lambda_\varphi(|\psi\rangle\langle\psi|)$. Na stanie końcowym wykonywany jest pomiar, który w standardowym schemacie interferometrycznym polega na użyciu kolejnej płytki światłodzielną i wykonaniu pomiaru liczby fotonów n_1, n_2 w odpowiednich portach wyjściowych interferometru. W bardziej ogólnym podejściu powiedzielibyśmy, że na stanie kwantowym ρ_φ został wykonany pewien uogólniony pomiar kwantowy $\{M_i\}$, a wartość opóźnienia fazowego została określona przez estymator $\tilde{\varphi}(i)$.



Rys. 1. a) Schematyczna ilustracja interferometru Macha-Zehndera z uwzględnieniem strat fotonów modelowanych poprzez obecność wirtualnych płytek światłodzielną w jego ramionach, o transmisjach η . Na końcu wykonywany jest pomiar liczby fotonów, na podstawie którego estymowana jest wartość opóźnienia fazowego za pomocą estymatora $\tilde{\varphi}(n_1, n_2)$. b) Równoważne spojrzenie na zagadnienie interferometrii jako szczególny przypadek ogólnego problemu estymacji kanału kwantowego, gdzie stan kwantowy $|\psi\rangle$ przechodzi przez kanał kwantowy Λ_φ , po czym wykonywany jest na nim pomiar uogólniony $\{M_i\}$ i na podstawie uzyskanych wyników estymowany jest parametr

Możemy teraz skorzystać z narzędzi kwantowej estymacji, aby odpowiedzieć na fundamentalne dla interferometrii optycznej pytania. Jakie stany światła, przy ograniczeniu na całkowitą energię (liczbę fotonów), są optymalne dla uzyskania jak najlepszej precyzji interferometrycznej, najdokładniejszej estymacji fazy φ . Jaką poprawę precyzji można uzyskać, dzięki wykorzystaniu nieklasycznych źródeł światła (splątanych fotonów, stanów ściśniętych światła) i czy przewagę tę będzie można wykorzystać w realistycznych warunkach eksperymentalnych, gdzie mamy do czynienia z nieuniknionymi stratami fotonów?

Matematycznie problem sprowadza się do znalezienia stanów wejściowych $|\psi\rangle$ takich, że kwantowa informacja Fishera stanu wyjściowego będzie maksymalna

$$\max_{|\psi\rangle} F_Q[\Lambda_\varphi(|\psi\rangle\langle\psi|)]. \quad (5)$$

Ogólny stan n fotonów podróżujących dwoma ramionami interferometru można zapisać w postaci superpozycji

$$|\psi\rangle = \sum_{k=0}^n c_k |k\rangle \otimes |n-k\rangle, \quad (6)$$

gdzie $|k\rangle \otimes |n-k\rangle$ oznacza stan, w którym k fotonów podróżuje górnym, a $n-k$ dolnym ramieniem.

W przypadku braku strat w interferometrze można pokazać, że optymalnym stanem n -fotonowym maksymalizującym informację Fishera jest stan postaci

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|n\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |n\rangle) \quad (7)$$

(tzw. stan $n00n$ [BIWH96, LKD02]) reprezentujący superpozycję dwóch stanów, gdzie wszystkie fotony podróżują wspólnie jednym z dwóch ramion. Jest to bardzo silnie splątany stan n -fotonowy i pozwala na uzyskanie precyzji estymacji fazy skalującej się jak $\Delta\tilde{\varphi} \approx \frac{1}{n}$. Jest to tak zwane skalowanie Heisenberga [HB93], gdyż analogicznie do zasady nieoznaczoności czas-energia, odpowiada zasadzie nieoznaczoności faza-liczba fotonów².

Dla porównania, jeśli byśmy wykorzystywali jedynie „klasyczne stany światła”, reprezentowane jako stany koherentne, najlepsza precyzja (pierwiastek z wariancji) estymacji fazy wyniosłaby $\Delta\tilde{\varphi} = 1/\sqrt{\bar{n}}$, gdzie \bar{n} jest średnią liczbą fotonów w stanie koherentnym (stan koherentny charakteryzuje się statystyką Poissonowską liczby fotonów) i nosi nazwę granicy szumu śrutowego. Można go interpretować, jako precyzję wynikającą z \bar{n} -krotnego powtarzania eksperymentu interferometrycznego wykorzystującego pojedyncze fotony. W tym sensie wykorzystujemy jedynie interferencję „fotonu samego ze sobą” i nie korzystamy z wielofotonowych efektów interferencyjnych na jakie pozwala mechanika kwantowa.

Lepsze skalowanie niepewności estymacji fazy w interferometrii, możliwe dzięki wykorzystaniu splątania międzyfotonowego, stało się motywacją do rozwoju nowej dziedziny – metrologii kwantowej. Spektrum zastosowań wykracza daleko poza interferometrię optyczną i podobnych efektów można oczekiwać dla interferometrii atomowej, która znajduje zastosowania w stabilizacji zegarów atomowych [PPCS⁺ 20], magnetometrii [PSO⁺ 18],

2. Dokładniejsza analiza granicy Heisenberga prowadzi to wniosku, że poprawne wyrażenie na najlepszą możliwą asymptotycznie osiągalną niepewność ma postać $\Delta\tilde{\varphi} \approx \frac{\pi}{n}$, co pokazaliśmy w pracy [GDDanWB20] i uogólniliśmy również na przypadki estymacji wieloparametrowej [GDDan22].

jak i grawitometrii [BHV⁺19]. Metrologia kwantowa wyrosła tym samym na jeden z głównych filarów całej dziedziny technologii kwantowych, na równi z dziedziną obliczeń kwantowych i komunikacji kwantowej.

Kluczowym pytaniem pozostaje jednak, czy zysk kwantowy można wykorzystać w praktyce, mimo obecności nieuniknionych niedoskonałości eksperymentalnych, co w przypadku interferometrii optycznej jest związane przede wszystkim ze stratami fotonów. Straty fotonów są szczególnym przypadkiem zjawiska dekoherencji kwantowej, która niszczy kwantową superpozycję stanów. Przykładowo wspomniane powyżej stany $n00n$ są ekstremalnie wrażliwe na straty fotonów. Wystarczy strata jednego fotonu, w którymkolwiek z ramion interferometru, aby stan stał się całkowicie bezużyteczny z punktu widzenia estymacji fazy. Jest to pokrewne zagadnienie, do tego czy możliwe jest w ogóle zbudowanie komputerów kwantowych, czy też dekoherencja spowoduje, że ostatecznie jakiegokolwiek potencjalne zyski obiecane przez teorię obliczeń kwantowych nie będą mogły być w praktyce zrealizowane. W przypadku obliczeń kwantowych na ratunek przychodzi teoria kwantowej korekcji błędów, która jest kwantowym uogólnieniem klasycznych protokołów korekcji błędów, pozwalająca na ochronę informacji kwantowej przed dekoherencją [Geo20]. Wciąż nie jesteśmy na etapie, kiedy techniczne możliwości pozwolą na efektywną implementację tych idei, ale przynajmniej wiemy, że w zasadzie trudności te mogą zostać pokonane.

Czy podobne rozwiązania są możliwe w przypadku metrologii kwantowej? Czy można uzyskać kwantową poprawę precyzji w obecności dekoherencji? W ciągu ostatnich lat rozwinięta została, w dużym stopniu za sprawą badań prowadzonych na Wydziale Fizyki UW, kompleksowa teoria metrologii kwantowej pozwalająca odpowiadać na tego typu pytania i jednocześnie identyfikować optymalne protokoły metrologiczne pozwalające na uzyskanie optymalnej precyzji pomiarowej w realistycznych warunkach eksperymentalnych [EdMFD11, DDGK12, DDanM14, DDanCS17, ZZPJ18, ZJ21, KGAD22]. Rozumiemy teraz, w przypadku jakich modeli metrologicznych można zastosować idee kwantowej korekcji błędów do uzyskania skalowania Heisenberga nawet w obecności dekoherencji, a dla jakich modeli jest to fundamentalnie niemożliwe. Potrafimy na te pytania odpowiedzieć również w przypadku modeli wieloparametrowych, gdzie podobnie jak w przypadku jednoczesnego pomiaru położenia i pędu, pojawiają się dodatkowe kwantowe aspekty związane z faktem, że strategie optymalne z punktu widzenia estymacji różnych parametrów wzajemnie się wykluczają [GZJDD20, ADDan22].

Niestety okazuje się, że w najbardziej interesujących modelach metrologicznych nie jest możliwe uzyskanie skalowania Heisenberga w obecności dekoherencji.

Przykładem jest tu chociażby interferometria optyczna w obecności strat. W tym przypadku można pokazać, że stosując najogólniejsze protokoły kwantowe, uwzględniające dowolnie splątane stany fotonów, jak i dowolne kody kwantowej korekcji błędów, nie jest możliwe uzyskanie precyzji lepszej niż [DDJK15]

$$\Delta\tilde{\varphi} \geq \sqrt{\frac{1-\eta}{\eta n}}, \quad (8)$$

gdzie η jest efektywną transmisją interferometru, a n liczbą użytych fotonów. Dla porównania, w przypadku użycia stanów koherentnych, wzór miałby postać $\Delta\tilde{\varphi} = \sqrt{\frac{1}{\eta n}}$. Pokazuje to, że chociaż nie jesteśmy w stanie uzyskać skalowania Heisenberga, mamy zauważalny zysk w postaci czynnika $\sqrt{1-\eta}$, który zawdzięczamy wykorzystaniu nieklasycznych stanów światła. Co ciekawe zysk ten można w praktyce osiągnąć poprzez względnie prosty schemat interferometryczny, kiedy na dwa wejścia interferometru Macha-Zehndera puszcza się odpowiednio stan koherentny oraz stan ściśniętej próżni po raz pierwszy zaproponowany już w latach 80. XX wieku przez Carla Cavesa [Cav81].

Co więcej, dokładnie takie stany światła są obecnie używane w detektorach fal grawitacyjnych LIGO [Tse19], VIRGO [Ace19] i dają obserwowalną poprawę czułości tych urządzeń. Dzięki wykorzystaniu stanów ściśniętych światła, poziom szumów w tych detektorach został obniżony dodatkowo o około 30%, co jest spektakularnym osiągnięciem biorąc pod uwagę, jak niesamowitą czułość miały już te detektory zanim wykorzystano w nich ściśnięte stany światła. Detektory te wykorzystują zatem kwantowe własności światła w sposób optymalny [DDanBS13]. Aby podzielać na wyobraźnię czytelnika zauważmy, że gdybyśmy chcieli podobny zysk otrzymać zwiększając jedynie moc laserów wykorzystywanych w detektorach, konieczne byłoby zwiększenie mocy laserów prawie dwukrotnie. Oznaczałoby to zwiększenie liczby fotonów wpuszczanych do interferometru o ok 10^{20} fotonów na sekundę. Wykorzystując własności ściśniętej próżni z kolei, to samo uzyskujemy wysyłając efektywnie do układu jedynie około 100 fotonów na sekundę, czyli tyle co nic! Dowodzi to, że idee metrologii kwantowej, mimo trudności spowodowanych obecnością dekoherencji, są w stanie dostarczyć nowych, praktycznych rozwiązań pozwalających na poprawę precyzji dzięki wykorzystaniu kwantowych własności światła i materii.

Obecnie w wielu wiodących ośrodkach badawczych i firmach metrologicznych prowadzone są intensywne prace w dziedzinie magnetometrów wspomaganych kwantowo, grawitometrów [GLMPDS20], zegarów atomowych [CPPV22] i niewykluczone, że spośród wszyst-

kich mających na horyzoncie technologii kwantowych to właśnie tego typu urządzenia znajdą się w praktycznym użyciu, podczas gdy komputery kwantowe będą nas wciąż mamić obietnicami wielkiego przełomu, który wciąż nie nadchodzi ...

Literatura

- [Ace19] F. et al. Acernese. Increasing the astrophysical reach of the advanced virgo detector via the application of squeezed vacuum states of light. *Phys. Rev. Lett.*, 123:231108, Dec 2019.
- [ADDan22] Francesco Albarelli and Rafał Demkowicz-Dobrzański. Probe incompatibility in multiparameter noisy quantum metrology. *Phys. Rev. X*, 12:011039, Mar 2022.
- [BC94] Samuel L. Braunstein and Carlton M. Caves. Statistical distance and the geometry of quantum states. *Phys. Rev. Lett.*, 72(22):3439–3443, May 1994.
- [BHV⁺19] Kai Bongs, Michael Holynski, Jamie Vovrosh, Philippe Bouyer, Gabriel Condon, Ernst Rasel, Christian Schubert, Wolfgang P. Schleich, and Albert Roura. Taking atom interferometric quantum sensors from the laboratory to real-world applications. *Nature Reviews Physics*, 1(12):731–739, Dec 2019.
- [BIWH96] J. J. Bollinger, Wayne M. Itano, D. J. Wineland, and D. J. Heinzen. Optimal frequency measurements with maximally correlated states. *Phys. Rev. A*, 54(6):R4649–R4652, Dec 1996.
- [BKT92] Vladimir B. Braginsky, Farid Ya Khalili, and Kip S. Thorne. *Quantum Measurement*. Cambridge University Press, 1992.
- [Cav81] Carlton M. Caves. Quantum-mechanical noise in an interferometer. *Phys. Rev. D*, 23(8):1693–1708, Apr 1981.
- [CPPV22] Simone Colombo, Edwin Pedrozo-Penafiel, and Vladan Vuletic. Entanglement-enhanced optical atomic clocks. *Applied Physics Letters*, 121(21):210502, 2022.
- [DDanBS13] Rafał Demkowicz-Dobrzański, Konrad Banaszek, and Roman Schnabel. Fundamental quantum interferometry bound for the squeezed-light-enhanced gravitational wave detector geo 600. *Phys. Rev. A*, 88:041802, Oct 2013.
- [DDanCS17] Rafał Demkowicz-Dobrzański, Jan Czajkowski, and Pavel Sekatski. Adaptive quantum metrology under general markovian noise. *Phys. Rev. X*, 7:041009, Oct 2017.
- [DDanM14] Rafal Demkowicz-Dobrzański and Lorenzo Maccone. Using entanglement against noise in quantum metrology. *Phys. Rev. Lett.*, 113:250801, Dec 2014.
- [DDGK12] R. Demkowicz-Dobrzański, M. Guță, and J. Kołodyński. The elusive heisenberg limit in quantum enhanced metrology. *Nat. Commun.*, 3:1063, 2012.
- [DDJK15] R. Demkowicz-Dobrzański, M. Jarzyna, and J. Kołodyński. Quantum limits in optical interferometry. In Emil Wolf, editor, *Progress in Optics*, volume 60, pages 345–435. Elsevier, 2015.
- [DRC17] Christian L Degen, F Reinhard, and P Cappellaro. Quantum sensing. *Rev. Mod. Phys.*, 89(3):035002, 2017.
- [EdMFD11] B. M. Escher, R. L. de Matos Filho, and L. Davidovich. General framework for estimating the ultimate precision limit in noisy quantum-enhanced metrology. *Nature Phys.*, 7:406–411, 2011.
- [GDDan22] Wojciech Górecki and Rafał Demkowicz-Dobrzański. Multiple-phase quantum interferometry: Real and apparent gains of measuring all the phases simultaneously. *Phys. Rev. Lett.*, 128:040504, Jan 2022.
- [GDDanWB20] Wojciech Górecki, Rafał Demkowicz-Dobrzański, Howard M. Wiseman, and Dominic W. Berry. π -corrected heisenberg limit. *Phys. Rev. Lett.*, 124:030501, Jan 2020.
- [Geo20] Iulia Georgescu. 25 years of quantum error correction. *Nature Reviews Physics*, 2(10):519–519, Oct 2020.
- [GLM11] V. Giovannetti, S. Lloyd, and L. Maccone. Advances in quantum metrology. *Nature Photonics*, 5:222–229, 2011.
- [GLMPDS20] Remi Geiger, Arnaud Landragin, Sébastien Merlet, and Franck Pereira Dos Santos. High-accuracy inertial measurements with cold-atom sensors. *AVS Quantum Science*, 2(2):024702, 2020.
- [GZJDD20] Wojciech Górecki, Sisi Zhou, Liang Jiang, and Rafał Demkowicz-Dobrzański. Optimal probes and error-correction schemes in multi-

- parameter quantum metrology. *Quantum*, 4:288, July 2020. [PSO⁺18]
- [HB93] M. J. Holland and K. Burnett. Interferometric detection of optical phase shifts at the heisenberg limit. *Phys. Rev. Lett.*, 71(9):1355–1358, Aug 1993.
- [Hel76] C. W. Helstrom. *Quantum detection and estimation theory*. Academic Press, 1976. [PVSS20]
- [Hol82] A. S. Holevo. *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory*. North Holland, 1982. [Tse19]
- [KGAD22] Stanislaw Kurdzialek, Wojciech Gorecki, Francesco Albarelli, and Rafal Demkowicz-Dobrzanski. Using adaptiveness and causal superpositions against noise in quantum metrology. *arXiv e-prints*, page arXiv:2212.08106, December 2022. [WM09]
- [LKD02] Hwang Lee, Pieter Kok, and Jonathan P. Dowling. A quantum rosetta stone for interferometry. *Journal of Modern Optics*, 49(14-15):2325–2338, 2002. [YL73]
- [PPCS⁺20] Edwin Pedrozo-Penafiel, Simone Colombo, Chi Shu, Albert F. Adiyatullin, Zeyang Li, Enrique Mendez, Boris Braverman, Akio Kawasaki, Daisuke Akamatsu, Yanhong Xiao, and Vladan Vuletić. Entanglement on an optical atomic-clock transition. *Nature*, 588(7838):414–418, Dec 2020. [ZJ21]
- Luca Pezzè, Augusto Smerzi, Markus K. Oberthaler, Roman Schmied, and Philipp Treutlein. Quantum metrology with nonclassical states of atomic ensembles. *Rev. Mod. Phys.*, 90:035005, Sep 2018.
- Emanuele Polino, Mauro Valeri, Nicolò Spagnolo, and Fabio Sciarrino. Photonic quantum metrology. *AVS Quantum Science*, 2(2):024703, June 2020.
- M. et al. Tse. Quantum-enhanced advanced ligo detectors in the era of gravitational-wave astronomy. *Phys. Rev. Lett.*, 123:231107, Dec 2019.
- Howard M. Wiseman and Gerard J. Milburn. *Quantum Measurement and Control*. Cambridge University Press, 2009.
- H. Yuen and M. Lax. Multiple-parameter quantum estimation and measurement of nonselfadjoint observables. *IEEE Transactions on Information Theory*, 19(6):740–750, November 1973.
- Sisi Zhou and Liang Jiang. Asymptotic theory of quantum channel estimation. *PRX Quantum*, 2:010343, Mar 2021.
- Sisi Zhou, Mengzhen Zhang, John Preskill, and Liang Jiang. Achieving the heisenberg limit in quantum metrology using quantum error correction. *Nature Communications*, 9(1):78, Jan 2018. [ZZPJ18]