Ekonomia Menedżerska
2008, nr 4, s. 27–41

Henryk Gurgul *, Krzysztof Kłęk **

Kursy złotego wobec głównych walut – analiza empiryczna rozkładów

1. Wstęp

Stopy zwrotu kursów walutowych mają podobne własności jak rozkłady stóp zwrotu akcji a więc mają ciężkie ogony i wykazują wyższe wartości prawdopodobieństwa dla średniej i leżących wokół niej wartości niż w przypadku rozkładu normalnego. Łączne występowanie wymienionych faktów znane jest w literaturze przedmiotu jako tzw. leptokurtoza. Najnowsze badania dowodzą, że istnieje co najmniej kilka rozkładów empirycznych, które dobrze nadają się do uwzględnienia własności stóp zwrotu kursów walutowych i mogą dobrze opisywać dane. Rozkłady nadające się do opisu stóp zwrotu można podzielić na dwie grupy. Do pierwszej należą rozkłady symetryczne z rodziny tzw. rozkładów eliptycznych, takich jak np. rozkład *t*-Studenta. Do drugiej – rozkłady asymetryczne, pozwalające uwzględniać asymetrię w ogonach. Badania dotyczące kursów walutowych są istotne nie tylko ze względów teoretycznych, są one również przydatne dla celów polityki monetarnej, ubezpieczeń i badań nad rozkładem dochodów.

W następnej części pracy zostaną krótko omówione dotychczasowe wybrane próby modelowania kursów walutowych. W rozdziale trzecim zostanie przedsta-

* Katedra Ekonomii i Ekonometrii, Wydział Zarządzania, Akademia Górniczo-Hutnicza, al. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków, e-mail: h.gurgul@neostrada.pl

** Zakład Metod Ilościowych w Ekonomii, Wyższa Szkoła Ekonomii i Informatyki w Krakowie, ul. św. Filipa 17, 31-150 Kraków, e-mail: krzysztof.klek@gmail.com

wiona charakterystyka i własności rozkładów wykorzystanych w pracy. W rozdziale czwartym zostaną opisane dane. Kolejny rozdział zawiera wyniki obliczeń i ich analizę. W ostatnim – szóstym zostaną podsumowane najważniejsze wyniki.

2. Przegląd literatury

Analiza rozkładów stóp zwrotu kursów walutowych oraz stóp zwrotu akcji rozwijały się równolegle. Stwierdzono, że oba typy stóp zwrotu wykazują szereg podobieństw [6, 12, 13]. Ekonomiści zajmujący się rozkładami stóp zwrotu kursów walutowych podkreślają, że oddziaływują one na handel zagraniczny i mobilność światowego kapitału, mają znaczenie w modelowaniu kosztów w handlu zagranicznym, wpływają na relację średniej i wariancji portfeli międzynarodowych walorów lub wycenę opcji na obce waluty. Zmiany kursu walutowego, które nie dają się przewidzieć mają istotny wpływ na ceny, płace, stopę procentową, poziom produkcji i zatrudnienie czyli stabilizację ekonomiczną, a zatem i dobrobyt społeczny.

W pierwszych pracach dotyczących kursów walutowych [7], a później [17] rozwinęli ogólną metodykę modelowania stóp zwrotu kursów walutowych. Nie zakładali globalnej postaci parametrycznej rozkładu, a modele parametryczne dobierali tylko dla największych lub najmniejszych statystyk pozycyjnych. Ich odporność została oceniona przez W. H. DuMouchel'a [4]. Wychodząc z założenia własności stabilności rozkładów zaproponował on odporną procedurę, pozwalającą estymować i porównywać kształt ogonów rozkładów.

Do nowszych metod należy odporna metoda [8] estymacji tzw. indeksu ogona. Solano [16] podaje, że Blackwell i Hodges prowadzili badania nad pomiarami pól ogonów za pomocą sum rozkładów, zaś Wallace użył rozkładów normalnych do aproksymacji pola ogonów dla rozkładu *t*-Studenta i rozkładu chi-kwadrat. Aproksymacje te zostały później [11] uogólnione na rozkłady takie jak dwumianowy, gamma i beta. W swojej pracy [16] przedstawił wyniki modelowania stóp zwrotu kursów walutowych za pomocą kilku rozkładów parametrycznych dla systemu kursów płynnych.

Ekonomiści uważają wariancję stóp zwrotu kursu walutowego za miarę niepewności lub nawet ryzyka. Obecnie – jak to podkreśliliśmy – w środowisku ekonomistów jest powszechnie akceptowany pogląd, że krótkoterminowe stopy zwrotu kursu walutowego cechują się leptokutozą. W związku z tym konieczne jest analizowanie ogonów rozkładów stóp zwrotu kursów walutowych, a także ich zmian w czasie czyli stabilności kursu walutowego. Można to zrobić analizując np. zmiany pól ogonów w czasie przy zadanym rozkładzie lub obserwując, jak zmieniają się w czasie optymalne rozkłady dopasowane do danych empirycznych, co jest przedmiotem części trzeciej pracy.

3. Potencjalne rozkłady prawdopodobieństwa

Zanim rozpoczniemy dopasowywanie rozkładów do danych empirycznych, przedstawimy własności szeregu potencjalnie przydatnych w kontekście naszych badań [5, 9, 10, 14, 18] rozkładów: skalowanego rozkładu *t*-Studenta, rozkładu logistycznego, rozkładu hiperbolicznego, 3 – parametrycznego rozkładu odwrotnego normalnego, rozkładu α-stabilnego, rozkładu potęgowo-wykładniczego, rozkładów skośnych *t*-Studenta, uogólnionego rozkładu Gumbela, odwrotnego uogólnionego rozkładu Gumbela oraz uogólnionego rozkładu wartości ekstremalnych. Na podstawie danych oszacowano parametry tych rozkładów, ponieważ są one szeroko używane w analizie bezwarunkowych rozkładów stóp zwrotu, w tym stóp zwrotu kursów walutowych.

Skalowany rozkład *t*-Studenta (s. *t*-S)

Posiada funkcję gęstości:

$$f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{\upsilon+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\upsilon}{2}\right)\sigma\sqrt{\pi\nu}}\left[\frac{\upsilon\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{2}}{\nu}\right]^{-\frac{\nu+1}{2}}, \tag{1}$$

przy czym Γ oznacza funkcję gamma Eulera. Skalowany rozkład *t*-Studenta jest uogólnieniem zwykłego rozkładu *t*-Studenta w następującym sensie: zmienna losowa *X* podlega skalowanemu rozkładowi *t*-Studenta, jeśli μ oraz σ są odpowiednio średnią i odchyleniem standardowym oraz (*X*-μ)/σ podlega rozkładowi *t*-Studenta posiadającemu ν stopni swobody.

Rozkład logistyczny (LG)

Rozkład ten ma funkcję gęstości:

$$f(x)=\frac{\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}{\sigma\left(1+\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^{2}}. \tag{2}$$

W przypadku zmiennej losowej *X* podlegającej rozkładowi logistycznemu $E(X)=\mu$ oraz $\mathrm{var}(X)=\frac{\pi^2}{3}\sigma^2$.

Rozkład hiperboliczny (HIP)

Jest rozkładem często wykorzystywanym do opisu stóp zwrotu. Jego funkcję gęstości można zapisać w postaci:

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+\pi^2}K_1(\zeta)}\exp\left[-\zeta\left(\sqrt{1+\pi^2}\sqrt{1+\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2}-\pi\frac{x-\mu}{\delta}\right)\right], \quad (3)$$

gdzie K_1 jest zmodyfikowaną funkcją Bessela trzeciego rodzaju o parametrze 1.

3-parametryczny odwrotny rozkład Gaussa (NIG 3-P)

Funkcja gęstości tego rozkładu wyraża się wzorem:

$$f(x)=\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi(x-\gamma)^3}}\exp\left(-\frac{\lambda(x-\gamma-\mu)^2}{2\mu^2(x-\gamma)}\right). \quad (4)$$

Interpretacja parametrów modelu NIG jest analogiczna do interpretacji parametrów modelu hiperbolicznego. Za pomocą rozkładu NIG można modelować zarówno rozkłady symetryczne, jak i asymetryczne z możliwymi ciężkimi ogonami. Ogony modelowane za pomocą tego rozkładu są często nazywane ogonami semi-ciężkimi.

Rozkłady α-stabilne (α-S)

Klasa tych rozkładów została wprowadzona przez Levy'ego w 1924 r. Nie posiada ona zwartego zapisu za pomocą wzoru z wyjątkiem trzech wartości parametrów α: α=1/2 (rozkład Lévy'go), α=1 (rozkład Cauchy'ego) i dla α=2 (rozkład Gaussa). Rozkłady α-stabilne definiuje się za pomocą funkcji charakterystycznej. Najpopularniejsza parametryzacja funkcji charakterystycznej rozkładu α-stabilnego ma postać:

$$\Phi(t)=\begin{cases}\exp\left\{-\gamma^\alpha|t|^\alpha\left(1-i\beta\,\mathrm{sgn}(t)\,tg\frac{\pi\alpha}{2}\right)+i\delta t\right\} & \alpha\neq 1\\ \exp\left\{-\gamma^\alpha|t|\left(1+i\beta\frac{2}{\pi}\,\mathrm{sgn}(t)\ln(t)\right)+i\delta t\right\} & \alpha=1.\end{cases}, \quad (5)$$

Jak wspomniano wyżej dla α=2, rozkład jest normalny. Jeśli 0<α<2, to rozkład ten ma cięższy ogon niż rozkład Gaussa. Jeśli X podlega rozkładowi α-stabilnemu z parametrem α>1, to wtedy $E(X)=\delta$. W przeciwieństwie do wszystkich rozkładów opisanych powyżej rozkłady należące do klasy rozkładów α-stabilnych, z wyjątkiem rozkładu Gaussa, mają nieskończoną wariancję.

Mieszanka rozkładów normalnych (MRN)

Funkcja gęstości mieszanki dwóch rozkładów normalnych jest kombinacją wypukłą funkcji gęstości tych rozkładów czyli ma postać:

$$f(x) = \lambda \cdot f_1(x) + (1-\lambda) \cdot f_2(x), \tag{6}$$

gdzie $\lambda \in [0, 1]$, $f_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$, $f_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$.

Rozkład potęgowo-wykładniczy (PW)

Funkcja gęstości tego rozkładu dana jest wzorem:

$$f(x) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\left|\frac{x-\mu}{\alpha}\right|\right]^{\frac{2}{1+\beta}}}{2^{\frac{3+\beta}{2}}\alpha\Gamma\left(\frac{3+\beta}{2}\right)} \tag{7}$$

gdzie μ (–∞ < μ < ∞), α (α > 0) są parametrami odpowiednio: położenia oraz rozproszenia, a β (–1 < β ≤ 1) jest parametrem kształtu. Ostatni z tych parametrów można traktować jako miarę spłaszczenia. Jeśli β > 0, to rozkład posiada grube ogony. Gdy β = 0, to rozkład jest normalny, a dla β < 0 mamy do czynienia z rozkładem o wąskich ogonach.

Skośne rozkłady t-Studenta (sk. t-S)

W literaturze [1, 2, 3] występuje kilka rodzajów skośnych rozkładów *t*-Studenta. W artykule podjęto próbę dopasowania do logarytmicznych stóp zwrotu pięciu z nich.

Funkcja gęstości pierwszego z nich (*ST1*) zdefiniowana jest następująco:

$$f(x) = \frac{2}{\sigma} f_{z_1}(\zeta) F_{z_1}(\nu\zeta) \tag{8}$$

dla –∞ < *x* < ∞, gdzie –∞ < μ < ∞, σ > 0, –∞ < ν < ∞ i τ > 0, oraz gdzie ζ = (*x* – μ)/σ, a f_{Z1} i F_{Z1} są odpowiednio funkcjami gęstości i dystrybuanty *Z*~TF(0, 1, τ) rozkładu *t*-Studenta z τ > 0 stopniami swobody (oraz z τ traktowanym jako ciągły parametr).

Funkcja gęstości drugiego rozkładu (*ST*2) dana jest wzorem:

$$f(x) = \frac{2}{\sigma} f_{z_1}(\zeta) F_{z_1}(\omega) \tag{9}$$

dla $-\infty < x < \infty$, gdzie $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$, $-\infty < \nu < \infty$, i $\tau > 0$, oraz gdzie $\zeta = (x - \mu)/\sigma$, $\omega = \nu\lambda^{1/2}\zeta$, $\lambda = (\tau + 1)/(\tau + \zeta^2)$, f_{Z1} jest funkcją gęstości Z_1~TF(0, 1, τ), a F_{Z1} jest dystrybuantą Z_2 ~ TF(0, 1, τ+1).

Funkcja gęstości rozkładu trzeciego (*ST3*), to:

$$f(x) = \frac{c}{\sigma}\left\{1 + \frac{\zeta^2}{\tau}\left[\nu^2 I(x < \mu) + \frac{1}{\nu^2} I(x \geq \mu\right]\right\} \tag{10}$$

dla $-\infty < x < \infty$, gdzie $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$, $-\infty < \nu < \infty$, i $\tau > 0$ oraz, gdzie $\zeta = (x-\mu)/\sigma$ i $c = 2\nu/[\sigma(1+\nu^2)B(1/2, \tau/2)\tau^{1/2}]$.

Funkcja gęstości czwartego rozkładu (*ST4*):

$$f(x) = \frac{c}{\sigma}\left\{\left[1 + \frac{\zeta^2}{\tau}\right]^{-\frac{\upsilon+1}{2}} I(x < \mu) + \left[1 + \frac{\zeta^2}{\tau}\right]^{\frac{\tau+1}{2}}, I(x \geq \mu)\right\} \tag{11}$$

dla $-\infty < x < \infty$, gdzie $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$, $-\infty < \nu < \infty$, i $\tau > 0$ oraz, gdzie $\zeta = (x - \mu)/\sigma$, a $c = 2[\nu^{1/2}B(1/2, \tau/2) + \tau^{1/2}B(1/2, \tau/2)]^{-1}$.

Funkcja gęstości rozkładu piątego (*ST5*) wyraża się wzorem:

$$f(x) = \frac{c}{\sigma}\left[1 + \frac{\zeta}{\sqrt{a+b+\zeta^2}}\right]^{-a+\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{\zeta}{\sqrt{a+b+\zeta^2}}\right]^{b+\frac{1}{2}} \tag{12}$$

dla $-\infty < x < \infty$, gdzie $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$, $-\infty < \nu < \infty$, i $\tau > 0$ oraz, gdzie $\zeta = (x - \mu)/\sigma$, $c = [2^{a+b-1}(a+b)^{1/2}B(a,b)]^{-1}$, $\nu = (a-b)/[ab(a+b)]^{1/2}$ i $\tau = 2/(a+b)$.

Rozkład Gumbela (GU)

Funkcja gęstości tego rozkładu dana jest wzorem:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\exp\left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - \exp\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right] \tag{13}$$

dla $-\infty < x < \infty$, gdzie $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$.

Odwrotny rozkład Gumbela (OGU)

Z kolei funkcja gęstości tego rozkładu ma postać:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\exp\left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - \exp\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right] \tag{14}$$

dla $-\infty < x < \infty$, gdzie $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$.

Uogólniony rozkład wartości ekstremalnych (URWE)

Jego funkcja gęstości dana jest wzorem:

$$f(x) = \exp\left[-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]_{+}^{-\frac{1}{\xi}} \tag{15}$$

gdzie $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$ i $1+\xi(x-\mu)/\sigma > 0$.

4. Charakterystyka danych

Przedmiotem badań były stopy zwrotu kursów pięciu najważniejszych walut (w stosunku do waluty polskiej): euro, dolara amerykańskiego, franka szwajcarskiego, funta szterlinga oraz jena japońskiego. Mają one wiodący wpływ na szeroko rozumianą gospodarkę światową. Dane do analizy zostały pobrane ze strony internetowej Narodowego Banku Polskiego[1]. Obejmują one po 3785 obserwacji kursów dla każdej z analizowanych walut, od dnia 04. stycznia 1993 r. do dnia 31. grudnia 2007 r. Kurs euro dla lat 1993–1998, przeliczony został z kursu marki niemieckiej, przyjmując współczynnik: 1 EUR = 1,95583 DEM.

Wartości kursów dla każdej z pięciu analizowanych walut, podzielone zostały na okresy. Na podział zdecydowano się z dwóch powodów: chciano sprawdzić, jaki wpływ na kształtowanie się kursów walutowych (i ich stóp zwrotu) miało wprowadzenie przez kraje Unii Europejskiej waluty euro oraz późniejsze wstąpienie Polski do struktur unijnych. W związku z tym analizie poddano kursy walutowe wg podziału na trzy okresy: I okres, tj. od 04.01.1993 r. do 31.12.1998 r., II okres, tj. od 01.01.1999 r. do 30.04.2004 r., III okres, tj. od 04.05.2004 r. do 31.12. 2007 r. Następnie, na postawie wartości kursów, dla każdej z walut obliczono dzienne stopy zwrotu wg wzoru: $R_t = \ln\left(X_t / X_{t-1}\right)$, gdzie X_t jest wartością kursu w chwili t. Poniżej (tabela 1) przedstawiono statystyki opisowe (średnia, odchylenie standardowe, skośność i kurtoza) dla stóp zwrotu kursów walutowych, zgodnie z przedstawionym powyżej podziałem.

Obliczenia wykonane dla wyróżnionych trzech okresów dają podstawę do stwierdzenia, że średnie stopy zwrotu i to dla wszystkich walut wykazują tendencję spadkową. W III okresie wszystkie średnie stają się ujemne. Odchylenia standardowe stóp zwrotu dla tych samych walut w poszczególnych okresach są porównywalne (nie różnią się istotnie). Można zaobserwować dla stóp zwrotu poszczególnych walut malejące z okresu na okres wartości skośności i spłaszczenia.

[1] http://nbp.pl/ArchA.aspx

Tabela 1

Statystyki opisowe dla stóp zwrotu kursów walutowych

I OKRES					
Statystyka	EURO	USD	GBP	CHF	JPY
Średnia	0,00050	0,00053	0,00059	0,00057	0,00059
Odch. std.	0,00539	0,00504	0,00569	0,00656	0,00834
Skośność	2,9288	2,4186	2,1663	1,7711	1,3092
Kurtoza	44,479	38,378	31,324	21,194	11,601
II OKRES					
Średnia	0,00012	0,00010	0,00016	0,00014	0,00012
Odch. std.	0,00743	0,00713	0,00739	0,00783	0,00931
Skośność	0,41120	0,21875	0,24433	0,58916	0,28825
Kurtoza	7,0790	4,3653	6,4188	6,8806	2,6825
III OKRES					
Średnia	−0,00032	−0,00053	−0,00041	−0,00038	−0,00055
Odch. std.	0,00487	0,00709	0,00568	0,00558	0,00718
Skośność	0,25167	0,11266	0,15291	0,32968	0,58134
Kurtoza	1,3794	1,0309	0,6809	0,9719	2,0834

Źródło: obliczenia własne.

W kolejnym rozdziale przedstawiono wyniki estymacji parametrów rozkładów dla okresów I, II i III oraz podano w tabelce najlepiej dopasowane rozkłady.

5. Analiza wyników empirycznych

Do estymacji parametrów badanych rozkładów zastosowano metodę największej wiarygodności. Wyniki estymacji zawierają tabele 2, 3 i 4. W przypadku skośnych rozkładów *t*-Studenta dopasowano każdy z pięciu wymienionych w punkcie 3, a następnie na podstawie kryterium informacyjnego Akaike'a wybrano najlepszy.

Tabela 2

Estymatory współczynników rozkładów dziennych stóp zwrotu dla I okresu

Rozkład	WSP.	EUR	USD	GBP	CHF	JPY
LG	μ σ	0,0005 0,0030	0,0005 0,0028	0,0006 0,0031	0,0006 0,0036	0,0006 0,0046
NIG (3-P)	λ μ γ	30,2110 0,0935 −0,0930	39,6500 0,0985 −0,0979	31,3610 0,0990 −0,0982	32,1280 0,1098 −0,1092	20,4030 0,1110 −0,1104
s. *t*-S	μ σ ν	0,0004 0,0027 2,6551	0,0005 0,0027 2,8461	0,0005 0,0029 2,5061	0,0004 0,0039 3,3070	0,0004 0,0049 2,7597
HIP	π ζ δ μ	0,0382 0,2200 0,0007 0,0003	0,0274 0,1520 0,0005 0,0004	0,0068 0,0351 0,0001 0,0005	0,0588 0,4643 0,0018 0,00005	0,0343 0,0329 0,0002 0,0002
α - S	α β γ δ	1,5859 −0,0017 0,0022 0,0004	1,6065 −0,0468 0,0023 0,0005	1,5160 −0,0180 0,0024 0,0005	1,6890 0,0587 0,0032 0,0004	1,5614 0,0544 0,0040 0,0003
MRN	μ σ λ μ σ λ	0,0004 0,0033 0,9439 0,0025 0,0181 0,0561	0,0005 0,0032 0,9199 0,0010 0,0141 0,0801	0,0005 0,0033 0,8629 0,0008 0,0130 0,1371	0,0004 0,0045 0,9449 0,0041 0,0204 0,0551	0,0003 0,0051 0,8283 0,0019 0,0167 0,1717
PW	μ σ ν	0,0005 0,0047 0,8522	0,0004 0,0045 0,8805	0,0006 0,0052 0,8361	0,0005 0,0061 0,9736	0,0004 0,0080 0,8885
sk. *t*-S	 μ σ ν τ	ST1 0,0003 0,0027 0,0213 2,6604	ST1 0,0005 0,0027 0,0102 2,8500	ST1 0,0005 0,0029 0,0106 2,5117	ST4 0,0004 0,0040 3,7367 3,0297	ST1 0,0001 0,0049 0,0433 2,7661

Tabela 2 – cd.

Rozkład	WSP.	WALUTA				
		EUR	USD	GBP	CHF	JPY
GU	μ σ	0,0039 0,0144	0,0036 0,0129	0,0040 0,0139	0,0043 0,0140	0,0052 0,0148
OGU	μ σ	−0,0020 0,0071	−0,0018 0,0068	−0,0021 0,0070	−0,0025 0,0080	−0,0034 0,0090
URWE	μ σ ξ	−0,0018 0,0064 −0,0710	−0,0016 0,0061 −0,0757	−0,0019 0,0065 −0,0738	−0,0022 0,0073 −0,0844	−0,0029 0,0085 −0,0985

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 3

Estymatory współczynników rozkładów dziennych stóp zwrotu dla II okresu

Rozkład	WSP.	WALUTA				
		EUR	USD	GBP	CHF	JPY
LG	μ σ	0,0001 0,0041	0,0001 0,0039	0,0002 0,0041	0,0001 0,0043	0,0001 0,0051
NIG (3-P)	λ μ γ	551,03 0,3118 −0,3117	1160,0 0,3890 −0,3889	2062,7 0,4824 −0,4823	159,06 0,2129 −0,2128	210,19 0,2627 −0,2626
s. *t*-S	μ σ ν	−0,00006 0,0055 4,5242	−0,00009 0,0057 5,8789	0,000008 0,0055 4,8027	−0,00008 0,0057 4,4449	−0,00007 0,0074 5,3708
HIP	π ζ δ μ	0,0676 0,9402 0,0041 −0,0007	0,1346 1,4639 0,0057 −0,0015	0,0774 1,0735 0,0046 −0,0007	0,0909 0,7621 0,0036 −0,0009	0,0813 1,3527 0,0071 −0,0012

Tabela 3 – cd.

α - S	α	1,8169	1,8594	1,8508	1,8170	1,8287
	β	0,2892	0,5395	0,3238	0,2850	0,2840
	γ	0,0044	0,0045	0,0044	0,0046	0,0058
	δ	−0,0002	−0,0003	−0,0002	−0,0002	−0,0003
MRN	μ	−0,0001	−0,0001	−0,0001	−0,0001	−0,0003
	σ	0,0060	0,0062	0,0060	0,0064	0,0073
	λ	0,9356	0,9484	0,9400	0,9431	0,8426
	μ	0,0039	0,0041	0,0036	0,0048	0,0024
	σ	0,0178	0,0162	0,0181	0,0191	0,0161
	λ	0,0644	0,0516	0,0600	0,0569	0,1574
PW	μ	0,00002	−0,0001	−0,00005	−0,0001	−0,00004
	σ	0,0073	0,0071	0,0072	0,0077	0,0092
	ν	1,1755	1,2983	1,2179	1,1361	1,3149
sk. *t*-S		ST4	ST3	ST2	ST5	ST5
	μ	−0,0001	−0,0012	−0,0014	−0,0011	−0,0014
	σ	0,0055	0,0057	0,0057	0,0057	0,0074
	ν	5,6672	1,1318	0,2995	0,0632	0,0539
	τ	3,8929	5,9489	4,8192	0,4397	0,3650
GU	μ	0,0040	0,0037	0,0039	0,0042	0,0049
	σ	0,0110	0,0096	0,0105	0,0119	0,0116
OGU	μ	−0,0035	−0,0034	−0,0035	−0,0036	−0,0044
	σ	0,0105	0,0095	0,0104	0,0103	0,0104
URWE	μ	−0,0029	−0,0028	−0,0029	−0,0031	−0,0037
	σ	0,0085	0,0078	0,0084	0,0086	0,0095
	ξ	−0,1426	−0,1482	−0,1498	−0,1346	−0,1570

Źródło: obliczenia własne.

Rozkład, dla którego wartość statystyki KS jest najmniejsza lub równoważnie, który ma największą wartość prawdopodobieństwa krytycznego czyli prawdopodobieństwa obszaru krytycznego (ang. *p-value*) może być uważany za najlepiej opisujący próbę czyli stopy zwrotu wybranego kursu walutowego. To kryterium jest właściwe dla wyboru najlepiej dopasowanego rozkładu jedynie w środkowej części próby. Jeśli przedmiotem zainteresowania byłyby ogony rozkładów (co w finansach jest bardzo częstym przypadkiem), to właściwą statystyką jest statystyka testu Andersona-Darlinga (AD). Nadaje sie ona znacznie lepiej do testowania rozkładu empirycznego w jego ogonach niż statystyki innych testów. Dlatego uwzględniono też wartości statystyki Andersona-Darlinga przy wyborze rozkładu, który najlepiej pasuje do danych. Tabela 5 podaje najlepiej dopasowany rozkład wg statystyki Kołmogorowa-Smirnowa oraz Andersona-Darlinga.

Tabela 4

Estymatory współczynników rozkładów dziennych stóp zwrotu dla III okresu

Rozkład	**WSP.**	**WALUTA**				
		EUR	**USD**	**GBP**	**CHF**	**JPY**
LG	μ σ	−0,0003 0,0027	−0,0005 0,0039	−0,0004 0,0031	−0,0004 0,0031	−0,0005 0,0040
NIG (3-P)	λ μ γ	53,1570 0,1079 −0,1082	637,69 0,3176 −0,3182	121,12 0,1574 −0,1578	16,464 0,0798 −0,0802	5,9856 0,0673 −0,0678
s. *t*-S	μ σ ν	−0,0004 0,0040 5,7059	−0,0006 0,0061 7,4080	−0,0005 0,0050 9,2814	−0,0005 0,0048 7,7055	−0,0008 0,0061 7,2663
HIP	π ζ δ μ	0,0699 1,4012 0,0039 −0,0009	0,0570 1,9918 0,0074 −0,0013	0,0596 2,7771 0,0075 −0,0011	0,1637 2,4890 0,0067 −0,0022	0,2324 2,2586 0,0079 −0,0037
α - S	α β γ δ	1,8276 0,3131 0,0031 −0,0005	1,8648 0,2778 0,0046 −0,0007	1,9013 0,3877 0,0038 −0,0006	1,8609 0,6263 0,0036 −0,0008	1,8658 0,7865 0,0046 −0,0012
MRN	μ σ λ μ σ λ	−0,0006 0,0036 0,7084 0,0005 0,0070 0,2916	−0,0009 0,0052 0,6226 0,0001 0,0094 0,3774	−0,0007 0,0046 0,7129 0,0003 0,0077 0,2871	−0,0011 0,0043 0,7060 0,0013 0,0076 0,2940	−0,0012 0,0063 0,9151 0,0064 0,0115 0,0849
PW	μ σ ν	−0,0003 0,0048 1,3529	−0,0006 0,0071 1,4451	−0,0004 0,0057 1,5249	−0,0005 0,0056 1,4628	−0,0009 0,0072 1,4229

Tabela 4 – cd.

		ST4	ST1	ST4	ST2	ST3
sk. *t*-S	μ	−0,0005	−0,0013	−0,0005	−0,0033	−0,0024
	σ	0,0040	0,0061	0,0051	0,0055	0,0060
	ν	7,5913	0,1188	13,0768	0,7650	1,1862
	τ	4,7917	7,2538	7,6194	8,2335	7,7416
GU	μ	0,0022	0,0031	0,0025	0,0025	0,0032
	σ	0,0055	0,0077	0,0061	0,0063	0,0094
	μ	−0,0027	−0,0040	−0,0032	−0,0031	−0,0040
	σ	0,0050	0,0075	0,0057	0,0055	0,0068
URWE	μ	−0,0022	−0,0033	−0,0026	−0,0026	−0,0036
	σ	0,0048	0,0071	0,0056	0,0054	0,0067
	ξ	−0,1910	−0,2108	−0,2040	−0,1842	−0,1201

Źródło: obliczenia własne.

Jeśli chodzi o kryterium KS, to w pierwszym okresie dominuje rozkład skalowany *t*-Studenta. Z upływem czasu jego rola w rankingu zmniejsza się, bo w III okresie nie jest już najlepiej dopasowanym rozkładem dla żadnej waluty. Na pierwsze miejsca w rankingu wysuwają się, zależnie od waluty, różne rozkłady: MRN *exequo* α-S i PW oraz PW, HIP, ST3. Jeśli wziąć pod uwagę jako kryterium dobroci dopasowania wartości statystyki testu AD (a dokładnie biorąc wartości *p-value*), to najczęściej dla pierwszego okresu najlepiej pasuje skalowany rozkład *t*-Studenta, natomiast w drugim i trzecim okresie dopasowane rozkłady silnie zależą od waluty. Są to m.in. mieszanka rozkładów normalnych, rozkłady z rodziny ST, rozkład hiperboliczny i potęgowo-wykładniczy.

Z przeprowadzonych badań wynika, że test AD nie wskazuje (ani jeden raz) na rozkłady: logarytmiczny, odwrotny rozkład normalny, rozkład Gumbela oraz odwrotny rozkład Gumbela, ani też na uogólniony rozkład wartości ekstremalnych, jako najlepiej dopasowane w którymkolwiek z trzech analizowanych okresów. Te wyniki różnią się istotnie od wyników dla stóp zwrotu akcji lub tzw. log-wolumenu (logarytmu wielkości obrotów), dla których HIP oraz NIG mają najmniejsze wartości statystyk, tak KS jak i AD [Gurgul i in. 2007].

Ponadto wartości statystyki KS (*p-value*) dla rozkładu hiperbolicznego i rozkładu NIG są bardzo zbliżone. To samo dotyczy statystyk AD (*p-value*). A to świadczy o tym, że dla stóp zwrotu akcji oraz log-wolumenu najlepiej pasują oba wymienione tu rozkłady, czego nie stwierdza się w przypadku stóp zwrotu kursów walutowych.

Tabela 5

Najlepiej dopasowane rozkłady

Okres	Test Kołmogorowa - Smirnowa					Test Andersona - Darlinga				
	EUR	**USD**	**GBP**	**CHF**	**JPY**	**EUR**	**USD**	**GBP**	**CHF**	**JPY**
I	α-S	s. *t*-S	s. *t*-S	MRN	s. *t*-S	α-S	s. *t*-S	s. *t*-S ST1	MRN	s. *t*-S
II	HIP	ST3	ST2	s. *t*-S	HIP	HIP ST4	ST3 MRN	ST2	ST5 s. *t*-S	MRN
III	α-S MRN PW	PW	HIP	PW	ST3	MRN	PW ST1	HIP	ST2 PW	MRN

Źródło: obliczenia własne.

6. Podsumowanie

Dzięki znajomości rozkładów stóp zwrotu można oszacować wielkość ryzyka inwestora na rynku akcji bądź rynku walutowym. Jak wynika z przeprowadzonych obliczeń, kurs złotego względem pięciu wybranych walut podlegał w ciągu ostatnich kilkunastu lat znacznym wahaniom. Dlatego można przypuszczać, że i rozkład stóp zwrotu kursu walutowego nie był niezmienny w badanych podokresach, a więc i najlepiej dopasowane rozkłady zależały od okresu, z którego pochodziły dane. Widać to wyraźnie przy przejściu od pierwszego do drugiego okresu (test AD). Żaden z najlepiej dopasowanych rozkładów w pierwszym okresie nie pozostał takim w okresie drugim.

Współczynniki skośności i spłaszczenia były wysokie, szczególnie w pierwszym z rozważanych okresów, co świadczy o istotnych odstępstwach rozkładów empirycznych od rozkładu normalnego. Z upływem czasu obie statystyki opisowe znacznie się zmniejszyły. Dało to możliwość przybliżania rozkładów empirycznych za pomocą rozkładów normalnych lub ich mieszanek. W trzecim z analizowanych okresów mieszanka rozkładów pojawiła się nawet jako najlepiej dopasowany rozkład (wg testów KS i AD).

W literaturze [6] pisze się o występowaniu długiej pamięci w szeregach stóp zwrotu kursów walutowych, co wyklucza ich normalność, a nawet uniemożliwia dopasowanie rozkładu zbliżonego do normalnego. Wykryte zmniejszanie się „nienormalności” rozkładów stóp zwrotu kursów walutowych może wskazywać na tzw. skracanie długiej pamięci (zaobserwowane w przypadku danych giełdowych) w szeregach walutowych. Zagadnienie to wymaga przeprowadzenia dalszych badań.

Literatura

[1] Azzalini, A., *Further results on a class of distributions which includes the normal ones*, "Statistica" 46, 1986. s. 199–208.

[2] Azzalini, A. and Capitanio, A., *Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew t-distribution*, "J. R. Statist. Soc. B" 65, 2003, s. 367–389.

[3] Crowder, M. J., Kimber, A. C., Smith R. L. and Sweeting, T. J., *Statistical Analysis of Reliability Data*. "Chapman and Hall", London 1991.

[4] DuMouchel W.H. (1983) *Estimating the Stable Index XXX in Order to Measure Tail Thickness: a Critique*, "The Annals of Statistics" 11, 1983, s. 1019–31.

[5] Fernandez, C., Steel, M. F. J. ,*On Bayesian Modeling of Fat Tails and Skewness,* "J. Am. Statist. Ass.", 93, 1998, s. 359–371.

[6] Gurgul H., Mestel R., Wójtowicz T. *Distribution of Volume on the American Stock Market*, ,,Ekonomia Menedżerska" 2007, s. 143–163.

[7] Hill B.M., *A Simple General Approach to Inference about the Tail of a Distribution*, "The Annals of Statistics" 3, 1975, s. 1063–1174.

[8] Hsieh D. A., *Robustness of Tail Index Estimation*, "Journal of Computational and Graphical Statistics" 8, 1999, s. 332–338.

[9] Johnson, N. L., Kotz, S., Balakrishnan, N. (1995). *Continuous Univariate Distributions*, vol. II, 2nd edn. "Wiley", New York.

[10] Jones, M. C. and Faddy, M. J. *A skew extension of the t distribution with applications*. "J. Roy. Statist. Soc B" 65, 2003, s. 159–174.

[11] Lindsay B. *Moment Matrices: Applications in Mixtures*, "The Annals of Statistics" 17, 1989, s. 722–740.

[12] Mandelbrot B., *The variation of certain speculative prices*, "Journal of Business" 36, 1963, s. 394–419.

[13] Peiro A., *International evidence on the distribution of stock returns*, "Applied Financial Economics" 4, 1994, s. 431–439.

[14] Prescott, P. and Walden, A. T., *Maximum likelihood estimation of the parameters of the generalized extreme-value distribution*. "Biometrika" 67, 1980, s. 723–724.

[15] Smith, R. L., *Maximum likelihood estimation in a class of nonregular cases*. "Biometrika" 72, 1985, s. 67–90.

[16] Solano H. M. Z., *Modeling the distribution of exchange rate time series and measuring the tail area: an empirical application of the Colombian flexible exchange rate returns*, "Rev. Econ. Ros." 7 (1), 2004, s. 19–43.

[17] Weissman I., *Maximum Likelihood Estimation of the Lower Tail of a Probability Distribution*, "J.R. Statistics. Soc. B" 47, 1985, s. 285–298.

[18] Yee, T. W., Stephenson, A. G., *Vector generalized linear and additive extreme value models,* "Extremes" 10, 2007, s. 1–19.