Henryk Górecki*

Analityczne wyznaczanie ekstremów i zer równań różniczkowych *n*-tego rzędu

1. Rozważania ogólne

Rozważmy równanie

$$\frac{d^3x}{dt^3}+a_1\frac{d^2x}{dt^2}+a_2\frac{dx}{dt}+a_3x=0 \tag{1}$$

z warunkami początkowymi

$$x(0)=c_1,\quad x^{(1)}(0)=c_2,\quad x^{(2)}(0)=c_3 \tag{2}$$

Równanie charakterystyczne dla równania (1) ma postać:

$$s^3+a_1s^2+a_2s+a_3=0 \tag{3}$$

Oznaczmy pierwiastki tego równania przez s_1, s_2, s_3.

Rozwiązanie równania (1) można zapisać następująco:

$$x(t)=A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t}+A_3e^{s_3t} \tag{4}$$

a p-ta pochodna wynosi

$$x^{(p)}(t)=A_1s_1^pe^{s_1t}+A_2s_2^pe^{s_2t}+A_3s_3^pe^{s_3t},\quad p=1,2,\ldots \tag{5}$$

Współczynniki A_i, $i=1,2,3$ są równe

$$\left.\begin{aligned}A_1&=\frac{c_3-(s_2+s_3)c_2+s_2s_3c_1}{(s_1-s_2)(s_1-s_3)}\\ A_2&=\frac{c_3-(s_3+s_1)c_2+s_3s_1c_1}{(s_2-s_3)(s_2-s_1)}\\ A_3&=\frac{c_3-(s_1+s_2)c_2+s_1s_2c_1}{(s_3-s_1)(s_3-s_2)}\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

* Katedra Automatyki, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Z równań (4) oraz (5) przy $p = 1, 2$ otrzymujemy formuły na $e^{s_1 t}$, $e^{s_2 t}$ i $e^{s_3 t}$, które po wymnożeniu stronami i uwzględnieniu wzorów Viete'a, że

$$a_1 = -(s + s_2 + s_3), \quad a_2 = s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3, \quad a_3 = -s_1 s_2 s_3$$

dają następującą zależność

$$\begin{aligned}
&a_3^2 x^2(t) + 2a_2 a_3 x^{(1)}(t)[x(t)]^2 + \left(a_1 a_3 + a_2^2\right)\left[x^{(1)}(t)\right]^2 x(t) + \\
&+(a_1 a_2 - a_3)\left[x^{(1)}(t)\right]^3 + (a_1 a_2 + 3a_3) x^{(2)}(t) x^{(1)}(t) x(t) + a_1 a_3 x^{(2)}(t)[x(t)]^2 + \\
&+a_2\left[x^{(2)}(t)\right]^2 x(t) + \left(a_1^2 + a_2\right) x^{(2)}(t)\left[x^{(1)}(t)\right]^2 + 2a_1\left[x^{(2)}(t)\right]^2 x^{(1)}(t) + \left[x^{(2)}(t)\right]^3 = \\
&= e^{-a_1 t}\left\{a_3^2 c_1^3 + 2a_2 a_3\, c_2 (c_1)^2 + \left(a_1 a_3 + a_2^2\right) c_2^2 c_1 + (a_1 a_2 - a_3) c_2^3 + \right. \\
&\left. +(a_1 a_2 + 3a_3) c_3 c_2 c_1 + a_1 a_3 c_3 c_1^2 + a_2 c_3^2 c_1 + \left(a_1^2 + a_2\right) c_3 c_2^2 + 2a_1 c_3^2 c_2 + c_3^3\right\}
\end{aligned} \tag{7}$$

W celu obliczenia kiedy $x(t)$ przyjmuje wartość zero, uporządkujemy zależność (7) według potęg $x(t)$:

$$\begin{aligned}
&a_3^2 [x(t)]^3 + \left(2a_2 a_3 x^{(1)}(t) + a_1 a_3 x^{(2)}(t)\right)[x(t)]^2 + \\
&+\left[\left(a_1 a_3 + a_2^2\right)\left[x^{(1)}(t)\right]^2 + (a_1 a_2 + 3a_3) x^{(2)}(t) x^{(1)}(t) + a_2\left[x^{(2)}(t)\right]^2\right] x(t) + \\
&+\left[(a_1 a_2 - a_3)\left[x^{(1)}(t)\right]^3 + \left(a_1^2 + a_2\right) x^{(2)}(t)\left[x^{(1)}(t)\right]^2 + \right. \\
&\left. +2a_1\left[x^{(2)}(t)\right]^2 x^{(1)}(t) + \left[x^{(2)}(t)\right]^3\right] = e^{-a_1 t}\left\{a_3^2 c_1^3 + (2a_2 a_3 c_2 + a_1 a_3 c_3)\, c_1^2 + \right. \\
&+\left[\left(a_1 a_3 + a_2^2\right) c_2^2 + (a_1 a_2 + 3a_3) c_3 c_2 + a_2 c_3^2\right] c_1 + \\
&\left. +\left[(a_1 a_2 - a_3) c_2^3 + \left(a_1^2 + a_2\right) c_3 c_2^2 + 2a_1 c_3^2 c_2 + c_3^3\right]\right\}
\end{aligned} \tag{8}$$

Równania (8) można zapisać w następującej postaci, przy $x^{(2)} \neq 0$:

$$
\begin{gathered}
\left[x^{(2)}\right]^3\left\{\left[\frac{x}{x^{(2)}}\right]^3+\left(2a_2a_3+\frac{x^{(1)}}{x^{(2)}}+a_1a_3\right)\left[\frac{x}{x^{(2)}}\right]^2+\right. \\
+\left[\left(a_1a_3+a_2^2\right)\left[\frac{x^{(1)}}{x^{(2)}}\right]^2+\left(a_1a_2+3a_3\right)\left[\frac{x^{(1)}}{x^{(2)}}\right]+a_2\right]\frac{x}{x^{(2)}}+ \\
\left.+\left[\left(a_1a_2-a_3\right)\left[\frac{x^{(1)}}{x^{(2)}}\right]^3+\left(a_1^2+a_2\right)\left[\frac{x^{(1)}}{x^{(2)}}\right]^2+2a_1\frac{x^{(1)}}{x^{(2)}}+1\right]\right\}= \\
=e^{-a_1t}c_3^3\left\{a_3^2\left(\frac{c_1}{c_3}\right)^3+\left(2a_2a_3\frac{c_2}{c_3}+a_1a_3\right)\left(\frac{c_1}{c_3}\right)^2+\right. \\
+\left[\left(a_1a_3+a_2^2\right)\left(\frac{c_1}{c_3}\right)^2+\left(a_1a_2+3a_3\right)\frac{c_2}{c_3}+a_2\right]\frac{c_1}{c_3}+ \\
\left.+\left[\left(a_1a_2-a_3\right)\left(\frac{c_2}{c_3}\right)^3+\left(a_1^2+a_2\right)\left(\frac{c_2}{c_3}\right)^2+2a_1\frac{c_2}{c_3}+1\right]\right\}
\end{gathered}
\tag{9}
$$

Równania zależności od współczynników a_1, a_2, a_3 po obu stronach (9) są identyczne. Oznaczmy przez

$$\frac{x}{x^{(2)}}=\frac{c_1}{c_3}=u \tag{10}$$

$$\frac{x^{(1)}}{x^{(2)}}=\frac{c_2}{c_3}=v \tag{11}$$

Równanie (9) można teraz zapisać w następującej postaci:

$$
\begin{gathered}
\left\{\left[x^{(2)}\right]^3-e^{-a_1t}c_3^3\right\}\left\{a_3^2u^3+\left(2a_2a_3v+a_1a_3\right)u^2+\left[\left(a_1a_3+a_2^2\right)v+a_2\right]u+\right. \\
\left.+\left[\left(a_1a_2-a_3\right)v^3+\left(a_1^2+a_2\right)v^2+2a_1v+1\right]\right\}=0
\end{gathered}
\tag{12}
$$

Przy poszukiwaniu ekstremum kładziemy, w równaniu (12), $v = 0$, wtedy równanie to upraszcza się do postaci

$$\left\{\left[x^{(2)}\right]^3 - e^{-a_1 t_e} c_3^3\right\}\left\{a_3^2 u^3 + a_1 a_3 u^2 + a_2 u + 1\right\} = 0 \tag{13}$$

Natomiast przy poszukiwaniu zer, kładziemy w równaniu (12), $u = 0$ i równanie to przybiera postać

$$\left\{\left[x^{(2)}\right]^3 - e^{-a_1 t_0} c_3^3\right\}\left\{\left(a_1 a_2 - a_3\right) v^3 + \left(a_1^2 + a_2\right) v^2 + 2a_1 v + 1\right\} = 0 \tag{14}$$

Znajdujemy teraz związek między zerami równania

$$a^2 u^3 + a_1 a_3 u^2 + a_2 u + 1 = 0 \tag{15}$$

a pierwiastkami równania charakterystycznego (3).

Niech

$$u = \frac{y}{\sqrt[3]{a_2^2}} \tag{16}$$

Równanie (15), przy tym podstawieniu, jest następujące

$$y^3 + \frac{a_1}{\sqrt[3]{a_3}} y^2 + \frac{a_2}{\sqrt[3]{a_3^2}} y + 1 = 0 \tag{17}$$

Podobnie, kladąc w równaniu (3)

$$s = \sqrt[3]{a_3}\, z \tag{18}$$

otrzymujemy, po podzieleniu przez $a_3 \neq 0$, równanie

$$z^3 + \frac{a_1}{\sqrt[3]{a_3}} z^2 + \frac{a_2}{\sqrt[3]{a_3^2}} z + 1 = 0 \tag{19}$$

Równania (17) i (19) są identyczne, zatem

$$y = z, \quad \text{czyli} \quad \sqrt[3]{a_3} u^2 = \frac{s}{\sqrt[3]{a_3}} \tag{20}$$

Ostatecznie zatem

$$u = \frac{s}{a_3} \tag{21}$$

czyli

$$\frac{x(t_e)}{x^{(2)}(t_e)} = \frac{c_1}{c_3} = \frac{s_i}{a_3}, \quad i = 1, 2, 3 \tag{22}$$

A więc

$$\begin{aligned} \frac{x(t_e)}{x^{(2)}(t_e)} &= \frac{c_1}{c_3} = -\frac{1}{s_2 s_3} \\ \frac{x(t_e)}{x^{(2)}(t_e)} &= \frac{c_1}{c_3} = -\frac{1}{s_1 s_3} \\ \frac{x(t_e)}{x^{(2)}(t_e)} &= \frac{c_1}{c_3} = -\frac{1}{s_1 s_2} \end{aligned} \tag{23}$$

Równania (23) pozwalają na wyznaczenie ekstremum rozwiązania

$$x(t) = A_1 e^{s_1 t_0} + A_2 e^{s_2 t_0} + A_3 e^{s_3 t_0} \tag{24}$$

Z (23) otrzymujemy następujące związki

$$\left.\begin{aligned} s_2 s_3 x(t_e) + x^{(2)}(t_e) = 0 \\ s_1 s_3 x(t_e) + x^{(2)}(t_e) = 0 \\ s_1 s_2 x(t_e) + x^{(2)}(t_e) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

W celu znalezienia zer rozwiązania (24) rozważymy rówananie (25)

$$(a_1 a_2 - a_3) v^3 + \left(a_1^2 + a_2\right) v^2 + 2 a_1 v + 1 = 0 \tag{26}$$

W pracy [1] udowodniono, że pierwiastkami równania

$$8r^3 + 8a_1 r^2 + (2a_2 + 2a_1) r + a_1 a_2 - a_3 = 0 \tag{27}$$

są:

$$r_1 = \frac{s_1 + s_2}{2}, \quad r_2 = \frac{s_1 + s_3}{2}, \quad r_3 = \frac{s_2 + s_3}{2}$$

gdzie s_1, s_2, s_3 są pierwiastkami równania (3).

Kładąc $2r = p$, otrzymujemy równanie

$$p^3 + 2a_1 p^2 + \left(a_2 + a_1^2\right) p + \left(a_1 a_2 - a_3\right) = 0 \tag{28}$$

którego pierwiastkami są

$$p_1 = s_1 + s_2, \quad p_2 = s_1 + s_3, \quad p_3 = s_2 + s_3 \tag{29}$$

Połóżmy teraz

$$p = \frac{1}{v} \tag{30}$$

wtedy otrzymamy równanie

$$(a_1 a_2 - a_3) v^3 + \left(a_2 + a_1^2\right) v + 2a_1 v + 1 = 0 \tag{31}$$

którego pierwiastkami są

$$v_1 = \frac{1}{s_1 + s_2}, \quad v_2 = \frac{1}{s_1 + s_3}, \quad v_3 = \frac{1}{s_2 + s_3} \tag{32}$$

Uwzględniając zależności (32) w (11), otrzymujemy, że

$$\begin{gathered} \frac{x^{(1)}(t_e)}{x^{(2)}(t_e)} = \frac{c_2}{c_3} = \frac{1}{s_1 + s_2} \\ \frac{x^{(1)}(t_e)}{x^{(2)}(t_e)} = \frac{c_2}{c_3} = \frac{1}{s_2 + s_3} \\ \frac{x^{(1)}(t_e)}{x^{(2)}(t_e)} = \frac{c_2}{c_3} = \frac{1}{s_1 + s_3} \end{gathered} \tag{33}$$

Równania (33) pozwalają na wyznaczenie czasów t_0

$$\left.\begin{aligned} x^{(1)}(t_0)\left(s_1 + s_2\right) = x^{(2)}(t_0) \\ x^{(1)}(t_0)\left(s_1 + s_3\right) = x^{(2)}(t_0) \\ x^{(1)}(t_0)\left(s_2 + s_3\right) = x^{(2)}(t_0) \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

2. Extrema rozwiązania $x(t)$ określonego wzorami (4) i (6)

Założenia:

$$x^{(1)}(t_e) = 0, \quad \text{oraz} \quad c_2 = x^{(1)}(0) = 0 \tag{35}$$

Uwzględniając w zależnościach (4) o (6) związki (23), otrzymujemy

$$e^{(s_2-s_3)t_{e1}} = \frac{c_3 + s_1 s_2 c_1}{c_3 + s_1 s_3 c_1} \quad \text{przy czym} \quad c_3 + s_2 s_3 c_1 = 0 \tag{36}$$

eliminując c_3

$$e^{(s_2-s_3)t_{e1}} = \frac{-s_2 s_3 + s_1 s_2}{-s_2 s_3 + s_1 s_3} \cdot \frac{s_1 - s_2}{s_1 - s_3} \cdot \frac{s_3}{s_2} = 1 \tag{37}$$

zatem $t_{e1} = 0$ przy $s_2 \neq s_3$

$$e^{(s_3-s_1)t_{e2}} = \frac{c_3 + s_2 s_3 c_1}{c_3 + s_2 s_1 c_1} \quad \text{przy czym} \quad c_3 + s_3 s_1 c_1 = 0 \tag{38}$$

eliminując c_3

$$e^{(s_3-s_1)t_{e2}} = \frac{-s_3 s_1 + s_2 s_3}{-s_3 s_1 + s_2 s_1} \cdot \frac{s_2 - s_3}{s_2 - s_1} \cdot \frac{s_1}{s_3} = 1 \tag{39}$$

czyli $t_{e2} = 0$ przy $s_3 \neq s_1$

$$e^{(s_1-s_2)t_{e3}} = \frac{c_3 + s_3 s_1 c_1}{c_3 + s_3 s_2 c_1} \quad \text{przy czym} \quad c_3 + s_1 s_2 c_1 = 0 \tag{40}$$

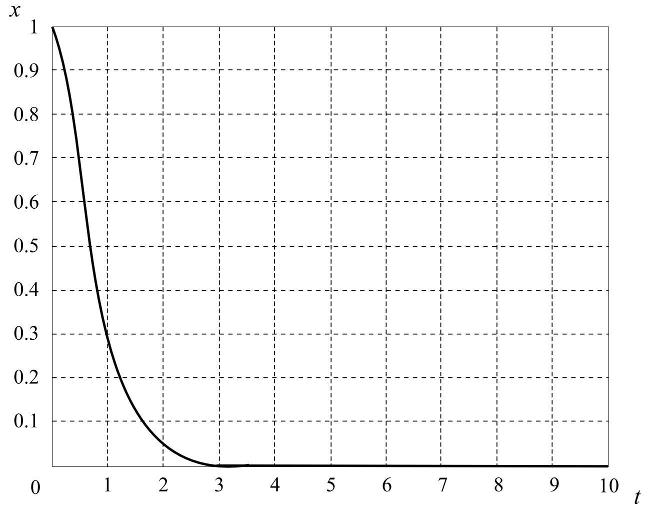
zatem

$$e^{(s_1-s_3)t_{e3}} = \frac{-s_1 s_2 + s_1 s_3}{-s_1 s_2 + s_3 s_2} \cdot \frac{s_3 - s_1}{s_3 - s_1} \cdot \frac{s_2}{s_1} = 1 \tag{41}$$

czyli $t_{e3} = 0$ przy $s_1 \neq s_2$.

Ostatecznie zatem otrzymaliśmy warunki dostateczne na nieistnienie ekstremów poza $t_e = 0$ przy $c_2 = 0$ oraz $c_3 + s_2 s_3 c_1 = 0$, lub $c_3 + s_3 s_1 c_1 = 0$, lub $c_3 + s_1 s_2 c_1 = 0$.

Niech $s_2 = -1$, $s_2 = -2$, $s_3 = -3$. Wtedy przy $c_2 = 0$ mamy, że $c_3 = -6c_1$ lub $c_3 = -4c_1$ lub $c_3 = -2c_1$, przyjmując na przykład $c_1 = 1$, otrzymujemy $c_3 = -6$, $c_3 = -4$, $c_3 = -2$.



Rys. 1. $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = -6$

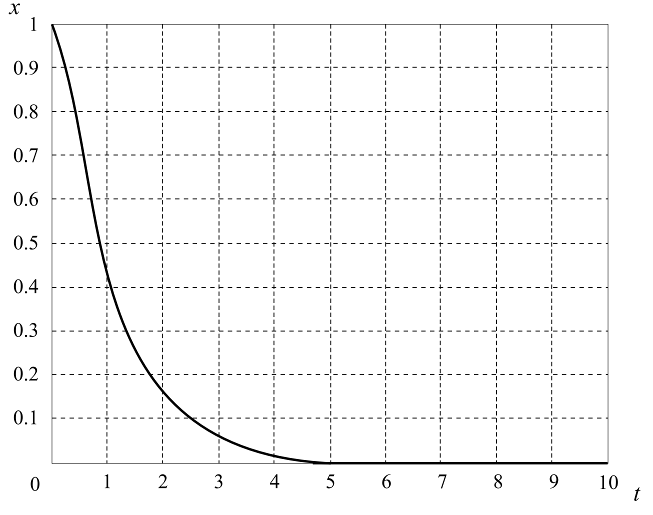
3. Zera rozwiązania $x(t)$ określonego wzorami (4) i (6)

Założenia

$$x(t0) = 0, \quad c_1 = x(0) = 0 \tag{42}$$

Wykorzystując związki (33) i (34) oraz (5) i (6) otrzymujemy nastepujące zależności

$$e^{(s_2 - s_3)t_{01}} = \frac{c_3 - (s_1 + s_2)c_2}{c_3 - (s_1 + s_3)c_2} \cdot \frac{s_1 - s_2}{s_1 - s_3} \cdot \frac{s_3}{s_2} \text{ przy } c_3 = (s_2 + s_3)c_2 \tag{43}$$



Rys. 2. $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = -4$

Eliminując c_3 otrzymujemy

$$e^{(s_2-s_3)t_{01}}=\frac{s_3}{s_2} \tag{44}$$

Podobnie z równania

$$e^{(s_3-s_1)t_{02}}=\frac{c_2(s_3+s_1)-(s_2+s_3)c_2}{c_2(s_3+s_1)-(s_2+s_1)c_2}\cdot\frac{s_2-s_3}{s_2-s_1}\cdot\frac{s_1}{s_2} \quad \text{przy} \quad c_3=(s_3+s_1)c_2 \tag{45}$$

otrzymujemy

$$e^{(s_3-s_1)t_{02}}=\frac{s_1}{s_3} \tag{46}$$

oraz

$$e^{(s_1-s_2)t_{03}}=\frac{s_2}{s_1} \quad \text{przy} \quad c_3=(s_1+s_2)c_2 \tag{47}$$

Natomiast wartości ekstremalne są równe

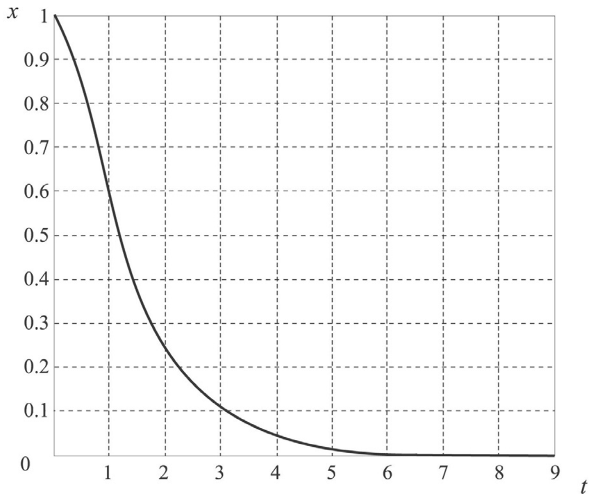
$$x(t_{e1})=\frac{c_2^2-c_1c_3}{s_3c_2-c_3}e^{s_3t_{e1}}, \quad \text{jeśli} \quad c_1=0 \quad \text{to} \quad x(t_{e1})=\frac{c_2}{s_3}e^{s_3t_{e1}} \tag{48}$$

$$x(t_{e2})=\frac{c_2^2-c_1c_3}{s_1c_2-c_3}e^{s_1t_{e2}}, \quad \text{jeśli} \quad c_1=0 \quad \text{to} \quad x(t_{e2})=\frac{c_2}{s_1}e^{s_1t_{e2}} \tag{49}$$

$$x(t_{e3})=\frac{c_2^2-c_1c_3}{s_2c_2-c_3}e^{s_2t_{e3}}, \quad \text{jeśli} \quad c_1=0 \quad \text{to} \quad x(t_{e3})=\frac{c_2}{s_2}e^{s_2t_{e3}} \tag{50}$$

W przypadku gdy s_1 rzeczywiste, a $s_2=\alpha+j\omega$, $s_3=\alpha-j\omega$ z równania (44) otrzymujemy

$$\mathrm{tg}2\alpha\omega t_e=\frac{2\alpha\omega}{\alpha^2+\omega^2} \tag{51}$$



Rys. 3. $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = -2$

Analiza numeryczna przy $s_1 = -1$, $s_2 = -2$, $s_3 = -3$ daje

$$\begin{aligned} t_{01} &= \ln\frac{3}{2} \quad \text{przy} \quad c_3 = -5c_2 \\ t_{02} &= \frac{1}{2}\ln 3 \quad \text{przy} \quad c_3 = -4c_2 \\ t_{03} &= \ln 2 \quad \text{przy} \quad c_3 = -3c_2 \end{aligned} \tag{52}$$

W przypadku równania czwartego rzędu trzeba skorzystać z dwu równań w rozmaitych konfiguracjach.

$$\frac{d^4x}{dt^4} + a_1\frac{d^3x}{dt^3} + a_2\frac{d^2x}{dt^2} + a_3\frac{dx}{dt} + a_4x = 0 \tag{53}$$

z warunkami początkowymi

$$x(0) = c_1, \quad x^{(1)}(0) = c_2, \quad x^{(2)}(0) = c_3, \quad x^{(3)}(0) = c_4 \tag{54}$$

Rozwiązanie równania (53)

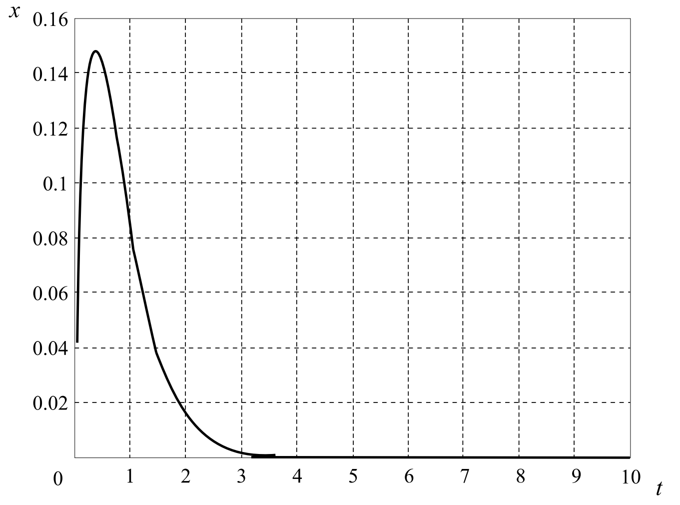
$$x(t) = \sum_{i=1}^{4} A_i e^{s_i t} \tag{55}$$

a współczynniki A_i są równe

$$A_1 = \frac{c_4 - (s_2 + s_3 + s_4)c_3 + (s_2 s_3 + s_2 s_4 + s_3 s_4)c_2 - s_2 s_3 s_4 c_1}{(s_4 - s_1)(s_3 - s_1)(s_2 - s_1)} \tag{56}$$

$A_2 A_3$, A_4 otrzymuje się przez kolejne zmiany wskaźników przy s_i według schematu:

$$s_4 \to s_1 \to s_2 \to s_3 \to s_4 \to s_1 \ldots$$



Rys. 4. $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = -5$, $x_e = 0{,}1481$, $t_e = 0{,}4055$

Mamy następujące transformacje, których użyteczność zależy od tego, które z warunków początkowych są równe zeru, oraz od tego czy obliczamy punkty ekstremalne, czy zera rozwiązania $x(t)$.

$$\text{Jeśli} \left.\begin{array}{r} c_1 = 0 \\ \text{i} \quad c_2 = 0 \end{array}\right\} \text{ to } \quad \frac{x^{(2)}}{x^{(3)}} = \frac{c_3}{c_4} = \frac{1}{s_2 + s_3 + s_4}, \ldots \tag{57}$$

$$\text{Jeśli} \left.\begin{array}{r} c_2 = 0 \\ \text{i} \quad c_3 = 0 \end{array}\right\} \text{ to } \quad \frac{x^{(2)}}{x^{(3)}} = \frac{c_1}{c_4} = \frac{1}{s_2 \cdot s_3 \cdot s_4}, \ldots \tag{58}$$

$$\text{Jeśli} \left.\begin{array}{r} c_1 = 0 \\ \text{i} \quad c_4 = 0 \end{array}\right\} \text{ to } \quad \frac{x^{(1)}}{x^{(2)}} = \frac{c_2}{c_3} = \frac{s_2 + s_3 + s_4}{s_2 s_3 + s_2 s_4 + s_3 s_4}, \ldots \tag{59}$$

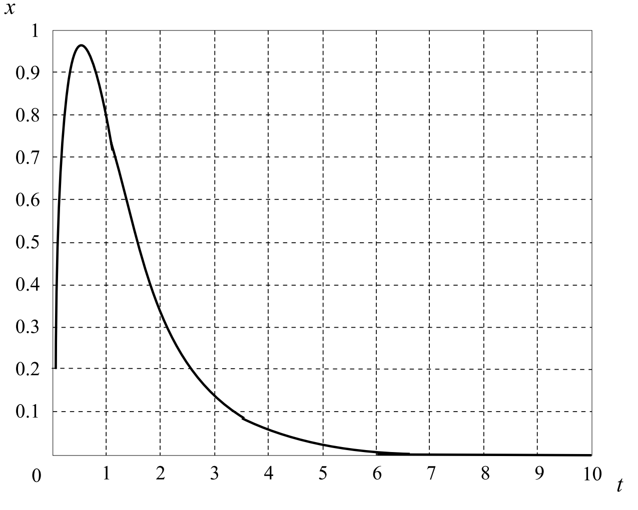
$$\left.\begin{array}{ll}\text{Jeśli} & c_1 = 0 \\ \text{i} & c_3 = 0\end{array}\right\} \quad \text{to} \quad \frac{x^{(1)}}{x^{(3)}} = \frac{c_2}{c_4} = \frac{-1}{s_2 s_3 + s_2 s_4 + s_3 s_4}, \dots \tag{60}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Jeśli} & c_2 = 0 \\ \text{i} & c_4 = 0\end{array}\right\} \quad \text{to} \quad \frac{x^{(1)}}{x^{(2)}} = \frac{c_1}{c_4} = -\frac{s_2 + s_3 + s_4}{s_2 s_3 s_4}, \dots \tag{61}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Jeśli} & c_3 = 0 \\ \text{i} & c_4 = 0\end{array}\right\} \quad \text{to} \quad \frac{x^{(1)}}{x^{(3)}} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{s_2 s_3 s_4}{s_2 s_3 + s_2 s_4 + s_3 s_4}, \dots \tag{62}$$

Przy rugowaniu c_4 mamy

$$\text{Jeśli } c_2 = 0 \text{ to } \frac{x}{x^{(2)}} = \frac{c_1}{c_3} = \frac{-1}{s_3 s_4}, \dots \tag{63}$$



Rys. 5. $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = -4$, $x_e = 0{,}1925$, $t_e = 0{,}549$

$$\text{Jeśli } c_1 = 0 \text{ to } \frac{x^{(1)}}{x^{(2)}} = \frac{1}{s_2 + s_4}, \dots \tag{64}$$

Przy rugowaniu c_3 mamy

$$\text{Jeśli } c_2 = 0 \text{ to } \frac{x}{x^{(3)}} = \frac{c_1}{c_4} = -\frac{1}{s_2 s_4 (s_2 + s_4)}, \dots \tag{65}$$

$$\text{Jeśli } c_1 = 0 \text{ to } \frac{x^{(1)}}{x^{(3)}} = \frac{c_2}{c_4} = \frac{1}{(s_3 + s_4)^2 - s_3 s_4}, \dots \tag{66}$$

Przy rugowaniu c_2 mamy

$$\text{Jeśli } c_3 = 0 \text{ to } \frac{x}{x^{(3)}} = \frac{c_1}{c_4} = \frac{s_3 + s_4}{s_3^2 \cdot s_4^2}, \dots \tag{67}$$

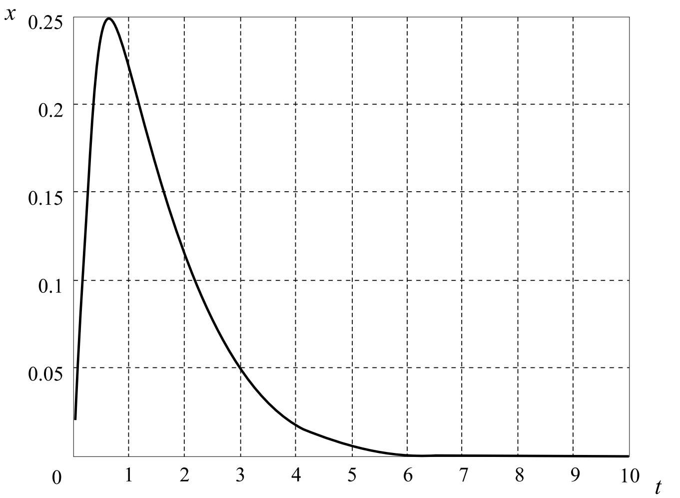
$$\text{Jeśli } c_1 = 0 \text{ to } \frac{x^{(2)}}{x^{(3)}} = \frac{c_3}{c_4} = \frac{s_3 + s_4}{(s_3 + s_4)^2 - s_3 s_4}, \dots \tag{68}$$

Przy rugowaniu c_1 mamy

$$\text{Jeśli } c_2 = 0 \text{ to } \frac{x^{(2)}}{x^{(3)}} = -\frac{c_3}{c_4} = \frac{1}{s_3 + s_4}, \dots \tag{69}$$

$$\text{Jeśli } c_1 = 0 \text{ to } \frac{x^{(1)}}{x^{(3)}} = \frac{c_2}{c_4} = -\frac{1}{s_3 s_4}, \dots \tag{70}$$

W sumie mamy 10 możliwych transformacji.



Rys. 6. $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = -3$, $x_e = 0{,}25$, $t_e = 0{,}693$

W przypadku ogólnym

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n x(t) = 0 \tag{71}$$

Po eliminacji warunków początkowych rżónych od c_1, c_2, c_3 otrzymujemy, że zera $x(t)$ można wyznaczyć ze związków

$$
\begin{gathered}
x^{(1)}(t_0)\cdot(s_1+s_2+\ldots+s_{n-1}) = x^{(2)}(t_0) \quad \text{przy} \quad \mathrm{c}_2=(s_1+\ldots+s_{n-1})\mathrm{c}_3 \\
\ldots\ldots \\
x^{(n)}(t_0)\cdot(s_n+s_{n-1}+\ldots+s_1) = x^{(2)}(t_0) \quad \text{przy} \quad \mathrm{c}_2=(s_n+\ldots+s_2)\mathrm{c}_3
\end{gathered} \tag{72}
$$

i podobnie ekstrema

$$
\begin{gathered}
x(t_{e1})\cdot s_2\ \ldots\ s_n = x^{(2)}(t_{e1}) \quad \text{przy} \quad \mathrm{c}_1 s_2\ \ldots\ s_n = \mathrm{c}_3 \\
\ldots\ldots \\
x(t_{e_n})\cdot s_{n-1}\ \ldots\ s_1 = x^{(2)}(t_{e_n}) \quad \text{przy} \quad \mathrm{c}_1 s_{n-1}\ \ldots\ s_2 = \mathrm{c}_3
\end{gathered} \tag{73}
$$

Literatura

[1] Górecki H., Szymkat M., *Application of on elimination method to the study of the geometry of zeros of real polynomials*. Int. Journal Control, vol. 38, nr 1, 1983, 1–26.