AUTOMATYKA • 2008 • Tom 12 • Zeszyt 3

Mirosław Zajdel*, Bogusław Filipowicz*

Dobór metod optymalizacji dla sieci transportowych

1. Wprowadzenie

Od dłuższego czasu daje się zauważyć dynamiczny rozwój technik informatycznych, które w swoich wyspecjalizowanych formach wspomagają funkcjonowanie systemów o charakterze rozproszonym, gdzie komunikacja między węzłami sieci stanowi w znacznej mierze wyznacznik generalnej wydajności.

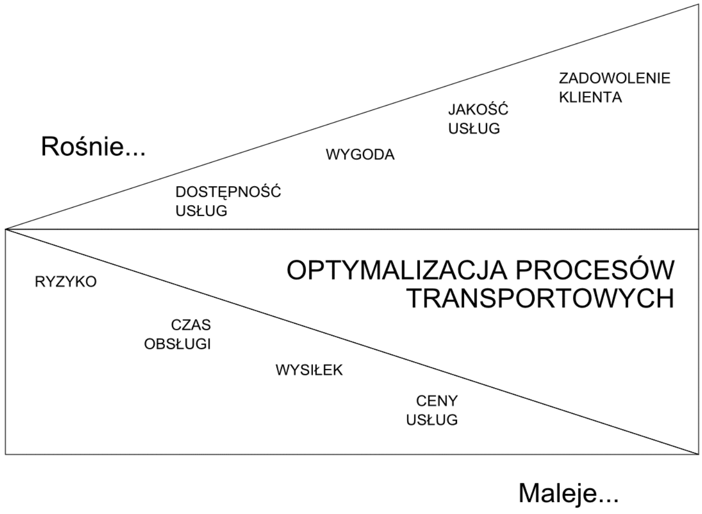
Najczęściej w trakcie działania tego rodzaju systemów przetwarzane są ogromne ilości informacji, co sprawia, że na drodze do optymalnego funkcjonowania takich środowisk stają problemy natury matematycznej. Problemy, które należy rozwiązać z jak najlepszym skutkiem, w ograniczonym z reguły czasie. Odpowiedzią wobec takiego stanu rzeczy może być tylko i wyłącznie wykorzystanie mocy obliczeniowej, jaką niosą ze sobą najnowsze zdobycze techniki i komputeryzacji w połączeniu z najlepszymi, specjalizowanymi metodami matematycznymi, pozwalającymi na szybką i tanią analizę problemu, a w razie potrzeby umożliwiającymi stworzenie modelu określonych zjawisk i symulację, by w efekcie doprowadzić do zamierzonego celu, którym jest optymalne wykorzystanie dostępnej struktury i własności systemu.

2. Systemy optymalizacji

2.1. Cele decyzyjne

Poprawne opracowanie procesu optymalizacji środowiska sieciowego niesie ze sobą większą dostępność dóbr i usług, poprawę jakości oferowanych usług transportowych i komunikacyjnych, a także podwyższenie poziomu bezpieczeństwa. Stosowanie ogólnie przyjętych standardów i integracja systemów w połączeniu z umiejętnie dobranymi, sprawdzonymi technikami optymalizacji daje nie tylko dobrą komunikację regionalną czy krajową jednostki z obiektami sąsiednimi, lecz również przyspieszenie rozwoju i konkurencyjność. Sprawia, że pogłębia się współpraca w zakresie polityki kulturalnej, gospodarczej i społecznej. Podstawowe zalety wynikające z takich działań prezentuje rysunek 1.

* Katedra Automatyki, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie



Rys. 1. Przebieg zmian wynikających z zastosowania optymalizacji procesów przetwarzania danych w sieciach transportowych

Wprowadzanie procesów transportowych na wyższy poziom pozwala uzyskiwać fundusze na modernizację istniejących infrastruktur i budowę nowych, w których znajdą zastosowanie już wypróbowane techniki poprawy wydajności. Towarzyszy temu likwidowanie zatorów transportowych i komunikacyjnych oraz podwyższenie poziomu jakości stosowanych powszechnie standardów. Wyposażenie rozproszonych struktur transportowych w inteligentne systemy sterujące przekuwa się w krótkim czasie na namacalne zyski, które będą także procentować w przyszłości, dając solidną podstawę dla dalszego rozwoju [7].

2.2. Zyski

Zyski z przeprowadzania procesów optymalizacji sieci transportowych są niebanalne. Potwierdzają to dotychczasowe doświadczenia w tym względzie, które mówią, że dobrze opracowana zmiana struktury sieciowej może przynieść 20÷70% oszczędności kosztów w stosunku do stanu sprzed optymalizacji [6]. Różnice przeważnie wynikają ze stopnia skomplikowania struktury.

Profity są tym większe, im z większym przedsiębiorstwem czy organizacją mamy do czynienia. Sporo oczywiście zależy od wcześniej podejmowanych prób poprawienia procesów funkcjonowania danego sytemu. Jeżeli dotychczasowe działania opierały się w głównej mierze na podejściu intuicyjnym, a tak jest w większości przypadków, jak pokazuje praktyka, to zyski mogą okazać się znacznie większe, niż się powszechnie zwykło oczekiwać. Dzieje się tak, gdyż podejście intuicyjne spłyca w dużym stopniu organizację optymalizacji systemu i podchodzi do niej bardzo schematycznie. Efektem tego postępowania na płaszczyźnie matematycznej jest najczęściej zatrzymywanie się procesu poszukiwania optimum globalnego w ekstremach lokalnych funkcji rozwiązania.

Człowiek postępując zgodnie ze swoją intuicją, pozwala sobie na zaangażowanie emocji, które z kolei nie dopuszczają wielu aspektów myślenia kreatywnego, gdyż ryzyko strat jest zbyt duże. Z tego względu zastosowanie pozbawionych uczuć i przez to obiektywnych algorytmów automatycznego trasowania, przepływu czy przydziału skutkuje przeważnie nieoczekiwanymi, a także z reguły bardzo dobrymi efektami.

3. Modele

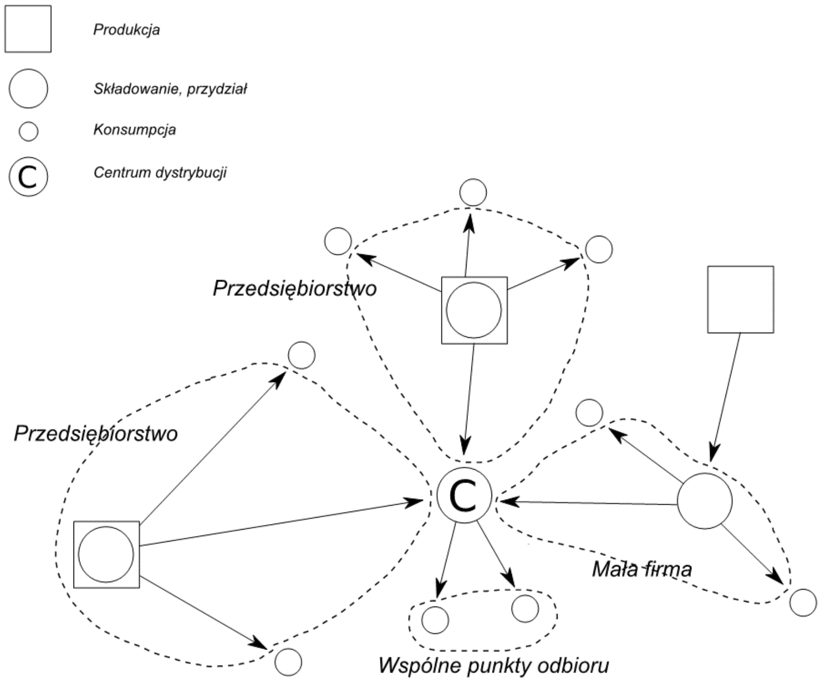
3.1. Formalizacja matematyczna

Niezbędny dla prawidłowej analizy sieciowych systemów transportu i przetwarzania danych jest ich ścisły opis formalny. Tylko w ten sposób możemy łatwo zaprezentować wszystkie istotne cechy sieci, jej ograniczenia, oraz przygotować ją możliwie przystępnie do zastosowania algorytmów optymalizacyjnych. Niezwykle istotne na tym etapie jest również jednakowe zrozumienie specyfiki problemu przez ekspertów z różnych dziedzin pracujących nad modelem, a tego nie zapewni w wystarczającym stopniu sam opis werbalny, choć jest on mimo wszystko użyteczny w początkowej fazie prac.

Zasadniczo tworzony model powinien być konstrukcją formalną, która za pomocą swojej reprezentacji matematycznej przedstawia powiązania między rozpatrywanymi zjawiskami, występującymi w rzeczywistym systemie, lecz nie tylko. Jednocześnie jego zadaniem jest prezentacja zależności zmiennej opisywanej, czyli czynnika, który chcemy poddać optymalizacji, od zmiennych opisujących, co przedstawiane jest w formie funkcji kosztu. Ponieważ nie sposób jest uwzględnić wszystkich zmiennych opisujących wpływających na optymalizowaną zmienną, warto oszacować aproksymację rozkładu prawdopodobieństwa czynnika opisywanego na podstawie rzeczywistych pomiarów. Przybliżone parametry rozkładu pozwolą określić przedziały ufności, które wskażą realną opłacalność inwestycji [2].

Do modelowania praktycznie wszystkich systemów sieciowych oraz zdecydowanej większości struktur rozproszonych można wykorzystać techniki formalne z zakresu, jaki obejmuje dział matematyki zwany matematyką dyskretną. Zadziwiające jest, jak wiele zjawisk z otaczającego nas świata można przedstawić, zinterpretować i rozwiązać w języku grafów. Jest to wspaniałe narzędzie wykorzystywane w wielu dziedzinach, a przede wszystkim takich, które mniej lub bardziej związane są z ekonomią. Teoria grafów pozwala na przedstawienie systemów w przystępnej nawet dla laików formie wizualnej, umożliwiającej dalszą analizę [3]. Na rysunku 2 przedstawiona została wstępna faza procesu modelowania sieci transportowej w postaci grafu.

Analiza może przybierać niezwykłą liczbę form, gdyż istnieje ogromna liczba algorytmów i metod opartych na strukturach grafowych, a spośród nich niektóre opracowane zostały już w starożytności. Ich wyjątkowa elastyczność w zastosowaniach stwarza wiele możliwości przed inżynierami sieci, którzy mają dużą swobodę w kwestii doboru rozwiązań. Jest jeszcze jeden, niezwykle istotny czynnik, który decyduje o popularności grafów w modelach sieciowych. To fakt, że mimo dogłębnej analizy teorii grafów i istnienia bardzo wielu rozwiązań, nauka ciągle oferuje nowe, lepsze i szybsze techniki o mniejszej złożoności i nie sposób jest wskazać ograniczenia dla ich rozwoju [2].



Rys. 2. Faza wstępna modelowania sieci transportowej w postaci grafu z uwzględnieniem różnych poziomów abstrakcji

3.2. Reprezentacja grafu

Obok reprezentacji graficznej, zrozumiałej dla każdego, istnieją jeszcze inne formy matematycznego przedstawiania struktur grafowych. Każdy z rodzajów reprezentacji ma swoje wady i zalety, zależne od stopnia gęstości grafu oraz rodzaju operacji, jakie będą wykonywać algorytmy stosowane dla tego grafu. Oznaczając przez V liczbę wierzchołków, zaś przez E liczbę krawędzi grafu, sposoby owe oraz ich podstawowe własności prezentują się [1] w sposób przedstawiony poniżej.

1) *Lista krawędzi* – jest to najprostsza, intuicyjna reprezentacja; ma postać jednej listy, na której w dowolnej kolejności umieszczone są pary wierzchołków reprezentujące początki i końce krawędzi; metoda ta jest mało efektywna, gdyż wykonanie większości operacji na grafie wymusza przeszukanie całej listy.

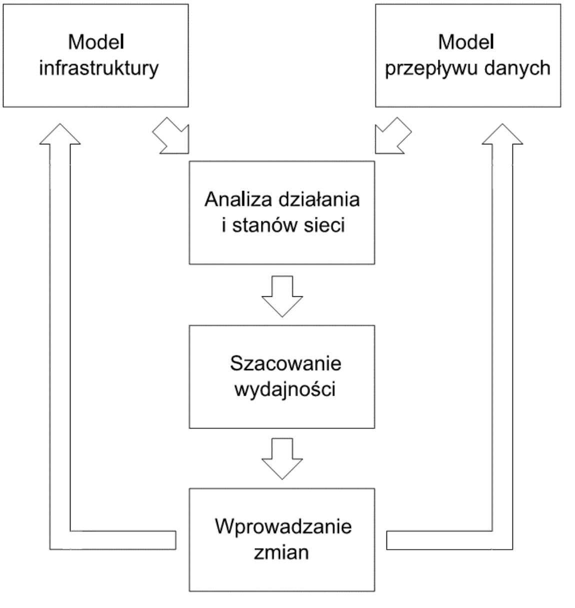
2) *Macierz incydencji* – składa się ona z V wierszy odpowiadających wierzchołkom i E kolumn odpowiadających krawędziom; wartość –1 oznacza, że krawędź wychodzi z wierzchołka, +1 – krawędź wchodzi do wierzchołka, 2 – oznacza pętlę, 0 – brak incydencji wierzchołka z krawędzią; jest to najgorsza metoda jeśli chodzi o złożoność oraz przydatność dla obliczeń.
3) *Listy sąsiedztwa* – metoda bazuje na utworzeniu dla każdego wierzchołka listy wszystkich jego sąsiadów; jest mało intuicyjna, jednak w ogólnym przypadku najlepsza, a ponadto cechuje się minimalną złożoność pamięciową, umożliwiająca szybkie przeszukiwanie krawędzi wychodzących z danego wierzchołka oraz łatwą implementację.
4) *Macierz sąsiedztwa* – macierz ta ma wymiary V×V. Jeśli w komórce odpowiadającej i-temu wierszowi i j-tej kolumnie znajduje się 1, to znaczy, że istnieje krawędź (i, j), czyli wychodząca z i-tego i wchodząca do j-tego wierzchołka; jeśli zaś znajduje się tam 0, to takiej krawędzi nie ma; wadą tej reprezentacji jest spora złożoność pamięciowa i długie czasy przeglądania większej ilości krawędzi, co może być uciążliwe dla grafów rzadkich; zazwyczaj reprezentacja ta jest stosowana jako element pomocniczy w algorytmach.
5) *Macierz kosztów* – to bardzo dobra i popularna metoda reprezentacji grafów ważonych; macierz ma wymiary V×V. Jeśli w komórce odpowiadającej i-temu wierszowi i j-tej kolumnie znajduje się ∞, to znaczy, że nie istnieje krawędź skierowana (i, j); jeśli znajduje się tam inna wartość, to jest to waga tej krawędzi; niektóre algorytmy wymagają aby dla $i = j$ w komórce macierzy znajdowała się wartość 0; metoda ta jest łatwa w implementacji i czytelna, stąd chętnie stosowana, mimo średniej złożoności pamięciowej.

4. Zagadnienie złożoności

4.1. Modelowanie abstrakcyjne

Dziedziną, która zajmuje się badaniem i oceną efektywności sieci oraz opracowywaniem metod optymalizacji ich działania, jest inżynieria ruchu (rys. 3). Głównym pytaniem, jakie stawia sobie inżynieria ruchu, jest problem, jak sterować i zarządzać strumieniami ruchu w sieci, zapewniając usługi zgodne ze specyficznymi wymaganiami użytkowników, aby wykorzystywać zasoby sieciowe w optymalny sposób, uwzględniający zarówno wydajność sieci, jak i czynniki ekonomiczne [7]. W badaniach brane są pod uwagę takie aspekty, jak aktualne i przyszłe szacowane żądania ruchu, indywidualne potrzeby klientów w kwestii przepustowości i natężenia ruchu w czasie, jakość usług, niezawodność i dostępność zasobów, oraz wiele innych. Ilość i poziom szczegółowości czynników, jaki brany jest pod uwagę przy opracowywaniu rozwiązań, zależy od możliwości obliczeniowych dla wybranego poziomu abstrakcji modelu sieci.

W zasadzie wszystkie te metody, aby przyniosły odpowiednie efekty, muszą opierać się na modelowaniu węzłów i łącz sieciowych z uchwyceniem ich odpowiednich cech eksploatacyjnych na wybranym poziomie abstrakcji, czyli z zachowaniem adekwatnego do obliczeniowych zasobów symulacji poziomu szczegółowości. Najczęściej wybierane do modelu cechy to topologia sieci, szerokość pasma, wielkość buforów, a w przypadkach bardziej zaawansowanych także priorytety pakietów, zarządzanie buforami i temu podobne. Poprawnie opracowany model sieci pozwala na badania i opracowanie wyników w zakresie rozkładu prawdopodobieństwa dla różnie dobranych cech sieci, a w konsekwencji umożliwia przebudowę infrastruktury przepływowej z minimalnym ryzykiem braku poprawy parametrów wydajnościowych oraz szacowanie tych parametrów w sensie proaktywnym [6].



Rys. 3. Ogólny schemat procesu optymalizacji działania modelu sieci transportowej w ramach inżynierii ruchu

Uproszczenia wprowadzane w modelu empirycznym opierają się głównie na zasadach abstrakcji, dekompozycji oraz aproksymacji. Na przykład już uwzględnienie w modelu efektywnej szerokości pasma i efektywnej wielkości bufora pozwoli na przybliżenie rzeczywistego zachowania się węzła sieci na poziomie pakietów i uproszczenie analizy na poziomie połączeń sieciowych. Taki rodzaj analizy sieci wykorzystujący teorię grafów, kolejek i schematów aproksymacji opierających się na technikach asymptotycznych i dekompozycyjnych, ma na celu nie tylko przedstawienie problemów w bardziej przystępny dla analizy sposób, ale także bierze pod uwagę uwarunkowania i ograniczenia związane z możliwościami czasowymi narzucanymi przez charakter rzeczywistej sieci i obliczeniowymi, związanymi ze sprzętem symulacyjnym i stosowanymi algorytmami analizy sieci, wśród których najbardziej polecane są techniki analityczne, empiryczne bazujące na pomiarach i symulacyjne [5].

4.2. Cyfrowa reprezentacja modelu

Z reguły wybór odpowiedniej reprezentacji grafu opiera się na analizie i stwierdzeniu, czy jest on grafem rzadkim, czy gęstym. Pierwszą z tych klas charakteryzuje mały stosunek liczby krawędzi E do liczby wierzchołków V. W drugim przypadku natomiast stosunek ten jest generalnie większy. Jest to oczywiście podział elastyczny, a wybór metody reprezentacji powinien być weryfikowany także na podstawie innych uwarunkowań problemu, jednakże za podstawę klasyfikacji przyjmuje się wyrażenie zależności liczby wierzchołków i krawędzi, które dla grafów rzadkich ma postać $E \approx V^2$, natomiast dla grafów gęstych $E \approx V$.

W poniższym zestawieniu (tab. 1) zaprezentowane zostały wszystkie powszechnie stosowane metody reprezentacji grafu wraz z ich własnościami, związanymi ze złożonością obliczeniową oraz elementarnymi operacjami na modelu.

Tabela 1
Sposoby reprezentacji cyfrowej grafu oraz ich złożoność

Metoda	Złożoność pamięciowa	Przejrzenie wszystkich krawędzi	Przejrzenie sąsiadów wierzchołka	Sprawdzenie istnienia krawędzi
Lista krawędzi	O(E)	O(E)	O(E)	O(E)
Macierz incydencji	O(VE)	O(E)	O(E)	O(E)
Listy sąsiedztwa	O(E)	O(E)	O(V)	O(V)
Macierz sąsiedztwa	$O(V^2)$	$O(V^2)$	O(V)	O(1)
Macierz kosztów	$O(V^2)$	$O(V^2)$	O(V)	O(1)

4.3. Złożoność obliczeniowa algorytmów

Z punktu widzenia złożoności, a w konsekwencji poziomu optymalizacji sieci, interesujący jest problem tworzenia minimalnego drzewa rozpinającego. Jest on związany z grafami niekierowanymi, możemy więc założyć, że przepływ danych odbywa się w dowolnym kierunku między wierzchołkami. Znane są trzy deterministyczne algorytmy rozwiązujące to zadanie o złożoności liniowo-logarytmicznej. Wszystkie one oparte są na strategiach zachłannych i nie nakładają na rozpatrywany graf żadnych ograniczeń, włącznie z dopuszczeniem ujemnych wag krawędzi.

Jednym z podstawowych i najczęściej wykorzystywanych zagadnień optymalizacji sieciowego transportu danych jest problem optymalnej ścieżki. Jest on związany z grafami skierowanymi i dotyczy znajdowania wśród wszystkich możliwych ścieżek istniejących między danymi dwoma wierzchołkami grafu ścieżki o wartości optymalnej. Fakt wyboru minimalizacji czy też maksymalizacji funkcji celu dla zadanego problemu jest związany z wybranym sposobem opisu sieci i może być stosowany wymiennie. Istnieją dwa szczególne przypadki zagadnienia, a dla każdego z nich opracowane zostały dedykowane algorytmy.

Pierwszym z nich jest zadanie znalezienia najkrótszej ścieżki od jednego wierzchołka do wszystkich innych. Okazuje się, że aby wykonać to zadanie dla dwóch wybranych wierzchołków, w pesymistycznym przypadku konieczne jest znalezienie optymalnych dróg dla każdej pary wierzchołków grafu, w której jednym z elementów jest wybrany wcześniej wierzchołek źródłowy. W ogólnym przypadku algorytmy rozwiązujące ten przypadek problemu najkrótszej ścieżki wykonują niemal V iteracji dla E krawędzi, jednakże dla indywidualnych przypadków sporo zależy tutaj od reprezentacji grafu [4].

Drugim szczególnym przypadkiem problemu najkrótszej ścieżki jest znalezienie najkrótszych ścieżek pomiędzy każdą parą wierzchołków grafu. Naturalnie można w tym celu zastosować dla każdego wierzchołka algorytm znajdujący ścieżkę od niego do wszystkich innych, jednak jest to w praktyce mało efektywne, dlatego też opracowane zostały specjalne algorytmy rozwiązujące to zadanie z mniejszym kosztem obliczeniowym. Ich złożoność obliczeniowa w ogólnym przypadku jest sześcienna, przy czym istnieją implementacje przeznaczone dla osobliwych przypadków, takie jak algorytm *Johnsona* dla grafów rzadkich, które uzyskują dla nich wyjątkowo dobre rezultaty [1].

Zagadnienie przepływu w sieciach transportujących dane obejmuje zarówno bardzo wiele rzeczywistych systemów sieciowych, jak drogi w formie medium do transportu towarów, okablowania telekomunikacyjne, rurociągi wodne i kanalizacyjne oraz wiele innych, w których możemy założyć przepływ danych w postaci jednorodnego produktu, jak tabory transportu towarów, cyfrowe jednostki informacji, ropa naftowa, gaz ziemny, produkty spożywcze, woda czy ścieki.

Problem wyznaczania maksymalnego przepływu rozwiązuje między innymi algorytm *Forda–Fulkersona*, oparty na idei sieci rezydualnych oraz ścieżek powiększających oraz inne algorytmy spokrewnione. Słabość tego algorytmu przejawia się jednak w tym, iż ścieżka powiększająca wybierana jest przeszukiwaniem grafu w głąb, co w praktyce okazuje się niejako wyborem losowym, gdyż w ten sposób uzyskiwane ścieżki są stosunkowo długie i o małej przepustowości rezydualnej. Wobec takiego stanu rzeczy zadowalające rezultaty metoda ta daje tylko dla przepustowości całkowitoliczbowych (zaleca się globalne sprowadzenie zmiennoprzecinkowych wartości wag do całkowitoliczbowych poprzez przemnożenie wszystkich przez odpowiednią wartość) oraz względnie małej wartości przepływu optymalnego. W przypadku gdy wagi krawędzi nie są całkowitoliczbowe lub gdy przeszukiwanie w głąb będzie wybierało za każdym razem ścieżkę powiększającą o małej wartości przepustowości rezydualnej w stosunku do przepływu optymalnego, czas działania algorytmu może znacznie się wydłużać, gdyż systematyczna poprawa rozwiązania będzie niezwykle mało znacząca [4].

Istnieją pewne ulepszenia algorytmu *Forda–Fulkersona* pozwalające zredukować nieco jego złożoność, które wybierają ścieżkę powiększającą w bardziej efektywny sposób. Okazuje się, że lepsze efekty od wyboru losowego daje statystycznie wybór najkrótszej ścieżki powiększającej w sensie ilości krawędzi na nią się składających. Praktycznym rozwiązaniem jest tutaj zastosowanie metody przeszukiwania grafu wszerz, która zawsze znajduje najkrótsze ścieżki ze względu na ilość krawędzi. Algorytm *Forda–Fulkersona* wykorzystujący poprawkę do wyszukiwania ścieżek powiększających nosi nazwę algorytmu *Edmondsa–Karpa* i jest jedną z najpopularniejszych implementacji dla rzeczywistych zastosowań. Jego złożoność warunkowana jest przez metodę przeszukiwania wszerz i wynosi $O(VE^2)$ [1].

Najszybsze w ogólnym przypadku znane obecnie algorytmy obliczania maksymalnego przepływu działają z wykorzystaniem metody przedprzepływu. Pomysł pochodzi od Karzanova, który jako pierwszy opracował algorytm tego typu, jednak dopiero ulepszenie jego metody i opracowanie ogólnego schematu przez Goldberga pozwoliło na uzyskanie niskich złożoności obliczeniowych warunkujących opłacalność zastosowań praktycznych tego podejścia. Metody przedprzepływowe działają lokalnie i zamiast badać całą sieć rezydualną w celu znalezienia ścieżki powiększającej, w każdym kroku przetwarzają tylko jeden wierzchołek wraz z sąsiadami [1]. Są to obecnie najbardziej efektywne metody wyznaczania maksymalnego przepływu w sieci, choć niezbyt często stosowane ze względu na małą znajomość w kręgach zainteresowań oraz trudności w realizacji. Ich złożoność, choć zależna od sposobu implementacji i w najlepszym znanym przypadku sześcienna, jest też jednocześnie całkowicie niezależna od gęstości grafu, co stanowi niepodważalną zaletę predestynującą je do profesjonalnych zastosowań.

5. Podsumowanie

5.1. Zestawienie wybranych metod

Zaprezentowane w tabeli 2 techniki i algorytmy optymalizacji nie wyczerpują wszystkich możliwości poprawy efektywności transportu, jednakże pozwalają poradzić sobie w większości przypadków zastosowań. Wprawny zespół inżynierów dostosowując do nich odpowiednio model może uzyskać doskonałe efekty. Nawet proste algorytmy w rękach fachowców stają się znakomitym narzędziem, co bardzo szybko ma swoje przełożenie w zyskach finansowych.

Sprawne i skuteczne modelowanie wymaga przede wszystkim wiedzy, doświadczenia i inwencji twórczej ze strony osób modelujących dany przypadek. W praktyce większość zagadnień sieciowych nadających się do optymalizacji to problemy wymagające indywidualnego podejścia, stąd ważne jest aby biegle poruszać się po podstawowych metodach i rozumieć dogłębnie zasady ich działania, aby w razie potrzeby umieć je dostosować, zbudować właściwy model i doprowadzić przedsięwzięcie do wyznaczonego celu.

Przy wyborze konkretnego algorytmu należy wziąć pod uwagę przede wszystkim aspekt gęstości grafów, które będą reprezentowały optymalizowane sieci, oraz nie tylko stopień złożoności algorytmów, lecz także jej uzależnienie od liczby wierzchołków V oraz brak tegoż uzależnienia od liczby krawędzi E.

W przypadku metod poszukujących minimalnego drzewa rozpinającego założenie to w całej rozciągłości spełnia algorytm *Prima*, który jest absolutnie niezależny od stopnia gęstości grafu, na którym operuje, i to on właśnie będzie stanowił najlepszy wybór w ogólnym przypadku. Jednakowoż dla problemów o dużym rozmiarze danych wejściowych zasadne staje się zrównoleglanie obliczeń, a do tej operacji ze względu na swoją konstrukcję lepiej nadaje się algorytm *Boruvki*. Jego złożoność w podstawowej wersji to O(E lg *V*), jednak maleje ona niezwykle szybko dla implementacji równoległej nawet przy niewielkiej ilości węzłów obliczeniowych.

Tabela 2

Zestawienie najczęściej stosowanych metod deterministycznych z uwzględnieniem ich złożoności

Algorytm	Złożoność	Uwagi
	Minimalne drzewo rozpinające	
Kruskala	O(Elg *E*)	
Dijkstry–Prima	O(V+Vlg *V*)	
*Boruvki**	O(E lg *V*)	implementowany na maszyny równoległe
	Optymalna ścieżka grafowa	
Bellmana–Forda	O(VE)	stosowany w e-mapach
Dijkstry	O(V lg *V*+E)	stosowany w protokołach OSPF i MOSPF
Dantzinga	O(V lg *V*+E)	lepszy od *Dijkstry* dla grafów małych i rzadkich; duże ryzyko trafienia na przypadek pesymistyczny
	Optymalna ścieżka macierzowa	
Floyda–Warshalla	$O(V^3)$	stosowany w technologii MPLS
Demoucrona	$O(V^3)$	szybszy od *Floyda–Warshalla*; wymaga więcej pamięci
Johnsona	$O(V^2 \lg V + VE)$	
	Maksymalny przepływ	
Forda–Fulkersona	$O(Ef_{max})$	mało efektywny w wersji podstawowej
Edmondsa–Karpa	$O(VE^2)$	ulepszona metoda ścieżek powiększających
Dinica	$O(EV^2)$	metoda przepływu blokującego
Trzech Hindusów	$O(V^3)$	metoda przepływu blokującego z elementami metody przedprzepływowej
Karzanova	$O(V^3)$	metoda przedprzepływowa
Goldberga–Tarjana	$O(V^3)$	ulepszona metoda przedprzepływowa
Goldberga	$O(V^3)$	metoda przedprzepływowa z ulepszeniem „podnieś i przesuń na początek”

* W literaturze często błędnie nazywany algorytmem *Sollina*.

Kwestia wyboru optymalnego algorytmu dla poszukiwania ścieżek optymalnych jest nieco bardziej skomplikowana, ponieważ nie istnieje w zasadzie jeden, uniwersalny algorytm, którego wydajność w ogólnym przypadku jest najwyższa. Zasadnicza jest w tym przypadku odpowiedź na pytanie, czy potrzebujemy informacji o najkrótszych ścieżkach między każdą parą wierzchołków sieci, czy też może interesować nas one będą tylko dla wyróżnionego wierzchołka źródłowego. W pierwszym przypadku nasze oczekiwania spełnią zarówno algorytm *Floyda–Warshalla* jak też *Demoucrona*. Jeśli przy tym sieć, na której operujemy, przypomina graf stosunkowo rzadki, można pokusić się o implementację algorytmu *Johnsona*, jednak ze względu na jego stopień skomplikowania należy zastanowić się, czy aż tak istotna jest dla nas jedynie niewielka w przypadku tego algorytmu poprawa wydajności w stosunku do prostszych algorytmów o złożoności sześciennej, a także zadać sobie pytanie, czy aby na pewno gęstość optymalizowanej sieci nie będzie ulegała zmianie. Z kolei dla wyznaczania minimalnych ścieżek z pojedynczego wierzchołka do wszystkich innych, optymalnym rozwiązaniem dla przypadku losowego wydaje się algorytm *Bellmana–Forda*, jako że pozostałe implementacje rozwiązujące owo zagadnienie dają lepsze efekty jedynie w ściśle określonych, indywidualnych przypadkach.

Jeśli podstawowym kryterium jest dla nas jakość, nie zaś prostota, wśród algorytmów znajdujących przepływ maksymalny wybór może być tylko jeden. Metody przedprzepływowe są tutaj bezsprzecznie na pierwszym miejscu. Jakkolwiek popularność i prostota implementacji algorytmu *Forda–Fulkersona* oraz jego ulepszeń sprawiają, że jest on wciąż najczęściej używany, jednak istotne słabości ograniczają jego zastosowanie do aplikacji szkoleniowych i projektów badawczych, natomiast w rozwiązaniach komercyjnych nie znajduje on miejsca. Oczywiście algorytmy przedprzepływowe nie są pozbawione wad. Wysoka wydajność okupiona jest w ich przypadku skomplikowaną implementacją, która wykonana nieprofesjonalnie pogarsza sprawność metody. Ponadto konieczny jest w przypadku tych algorytmów bardziej wnikliwy proces testowania poprawności, która nie jest już tutaj tak oczywista jak dla algorytmów ścieżki powiększającej.

5.2. Wskazówki praktyczne

Prowadzone w niniejszym artykule rozważania dotyczyły aspektów modelowania i złożoności obliczeniowej metod i algorytmów stosowanych przy grafowym podejściu do optymalizacji sieci transportowych.

Pierwszoplanowym celem w procesie tworzenia systemu jest określenie poziomu lub poziomów abstrakcji, na których będzie odbywać się optymalizacja, czyli wyspecyfikowanie tylko tych charakterystycznych elementów i procesów zachodzących w systemie, które są istotne dla obliczeń i pominięcie pozostałych, aby uzyskać rozsądny kompromis między dokładnością wyników a złożonością obliczeń. Zasadne staje się przy tym szczegółowe rozpoznanie specyfiki dziedziny systemu i pomoc ekspertów z tejże dziedziny.

Największy wpływ na rezultat obliczeń ma sposób wyznaczania postaci modelu reprezentującego system wraz z opisującymi go parametrami pod kątem optymalizowanego czynnika, a więc funkcji kosztu. Taki zaś model powinien w możliwe prosty sposób ukazywać złożone mechanizmy. Istotne jest, aby ujmować w nim w sposób ogólny procesy zachodzące w systemie i tym samym stanowić elastyczną bazę podatną na zmiany i rozwój, a jednocześnie zawierać czynniki charakterystyczne i ważne dla danej instancji systemu.

Wykorzystanie w systemie pomiarów parametrów pochodzących z już istniejących elementów infrastruktury (kamer, fotokomórek) może być dodatkowym atutem systemu optymalizacji minimalizującym koszty, a interfejs użytkownika skorelowany z jego umiejętnościami powinien udostępniać jedynie wybrane funkcjonalności, które potrafi on wykorzystać, co zazwyczaj przyspiesza proces wdrażania systemu i optymalizuje efektywność jego wykorzystania.

Literatura

[1] Cormen T.H., Leiserson C.E., Rivest R.L., *Wprowadzenie do algorytmów*. Warszawa, WNT 2001.
[2] Filipowicz B., *Wybrane metody i modele analizy systemów obsługi masowej. Zastosowania praktyczne*. Kraków, Powielarnia AGH 1979.
[3] Filipowicz B., *Modele stochastyczne w badaniach operacyjnych. Analiza i synteza systemów obsługi i sieci kolejkowych*. Warszawa, Powielarnia WNT 1996.
[4] Filipowicz B., *Matematyczne modelowanie zagadnień decyzyjnych. Część pierwsza*. Kraków, Wydawnictwa Akademii Górniczo-Hutniczej 1998.
[5] Górecki H., *Optymalizacja i sterowanie systemów dynamicznych*. Kraków, UWND AGH 2006.
[6] Wydro K.B., *Normalizacja w telematyce transportu*. Telekomunikacja i techniki informacyjne, nr 3–4/2001, 99–110.
[7] Wydro K.B., *Telematyka – znaczenia i definicje terminu*. Telekomunikacja i techniki informacyjne, nr 1–2/2005, 116–130.