

Wojciech Mitkowski*

Możliwości i ograniczenia informatyki**

1. Wprowadzenie

W chwili obecnej informatyka jest przypisana do dwóch dziedzin nauki. Do dziedziny nauk matematycznych i do dziedziny nauk technicznych. Można powiedzieć, że informatyka zajmuje się przetwarzaniem informacji, dokładniej technologiami przetwarzania informacji oraz technologiami tworzenia systemów, które przetwarzają informacje. W informatyce, jako dyscyplinie, można wyróżnić dwie grupy problemów: analizę informacji przepływających w świecie rzeczywistym oraz syntezę i stosowanie systemów przetwarzających informację, w szczególności projektowanie systemów informatycznych, programowanie i korzystanie z systemów informatycznych.

Informatyka pozostaje w ścisłym związku z matematyką, która daje podstawy teoretyczne przetwarzania informacji i podstawy myślenia informatycznego. W ostatnich latach informatyki jest napędzana głównie rozwojem sprzętu komputerowego, jako podstawowego narzędzia przetwarzającego informację. Szybkość przetwarzania informacji i duże moce obliczeniowe obecnych komputerów pozwalają na modelowanie i analizę złożonych procesów fizycznych oraz na syntezę odpowiednich układów sterowania.

Obecnie informatyka przenika wiele dziedzin nauki. Sprzyja temu stosunkowo łatwy dostęp do coraz lepszego i przyjaznego dla użytkownika, łatwego w obsłudze i dobrze oprogramowanego, sprzętu komputerowego. Wizualizacja wyników obliczeń numerycznych wspomaga wyobraźnię i w konsekwencji stanowi dobrą odpowiedź przy stawianiu hipotez naukowych.

2. Zasada odwzorowań zwężających – fundament teoretyczny

Myślenie informatyczne dobrze charakteryzuje twierdzenie nazywane zasadą odwzorowań zwężających (inaczej twierdzenie Banacha o punkcie stałym) podane poniżej. Niech X będzie przestrzenią metryczną zupełną z metryką ρ . Niech F będzie operacją zwężającą, czyli spełnia warunek Lipschitza ze stałą $\alpha \in (0, 1)$

$$F : X \rightarrow X, \quad \rho(F(x_1), F(x_2)) \leq \alpha \rho(x_1, x_2), \quad \alpha \in (0, 1), \quad x_1, x_2 \in X \quad (1)$$

* Katedra Automatyki, Wydział EAIiE, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

** Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2008–2011 jako projekt badawczy nr N N514 414034

Wtedy istnieje dokładnie jedno rozwiązanie równania (dokładnie jeden punkt stały operacji F)

$$x^o = F(x^o) \quad (2)$$

Rozwiązanie x^o jest granicą ciągu

$$x_n \rightarrow x^o, \quad x_{n+1} = F(x_n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad x_0 \in X \quad (3)$$

Zachodzi również oszacowanie odległości rozwiązania przybliżonego x_m od rozwiązania dokładnego x^o .

$$\rho(x^o, x_m) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} \rho(x_0, F(x_0)), \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

Powyższe twierdzenie precyzyjnie formułuje problem, podaje warunek istnienia jednoznacznego rozwiązania, metodę iteracyjnego poszukiwania rozwiązania przybliżonego (zob. (3)) oraz oszacowanie błędu (zob. (4)).

Dowód twierdzenia jest bardzo prosty (zob. np. Mitkowski (2007, s. 13 i 14)). Założenia twierdzenia są stosunkowo łatwe do spełnienia. Rozważania są prowadzone w zbiorze, w którym wprowadzona metryka pozwala określić odległość pomiędzy dwoma dowolnymi elementami. Dodatkowe założenie (1) i zupełność przestrzeni wystarcza do wykazania istnienia jednoznacznego rozwiązania równania (2). Algorytm (3) pozwala iteracyjnie wyznaczać rozwiązanie przybliżone z dokładnością (4). Przy założonej z góry dokładności obliczeń konieczną do wykonania liczbę iteracji można wyznaczyć z nierówności (4).

Myśl zawarta w powyższym twierdzeniu Banacha stanowi wzorzec postępowania. Prosta, a zatem elegancka, teoria daje nam jednoznaczne rozwiązanie problemu, do którego możemy się jedynie przybliżać z dowolną dokładnością, ale dokładne rozwiązanie numerycznie nie jest osiągalne. Obecnie coraz szybsze komputery pozwalają zwiększać dokładność obliczeń w zadanym z góry przedziale czasu przeznaczonym na poszukiwanie rozwiązania przybliżonego, wykorzystywanego praktycznie. Natomiast siłą teorii jest to, że możemy odkrywać i badać „byty idealne” niedostępne „numerycznie”.

Powyższa zasada odwzorowań zwięźających sformułowana przez Stefana Banacha (S. Banach urodził się w Krakowie 30.03.1892, zmarł we Lwowie 31.08.1945) dotyczy fundamentalnych problemów teorii poznania: dostępności prawdy i możliwości poznawczych człowieka.

3. Ograniczone możliwości komputera

Ograniczenia o charakterze poznawczym zilustrujemy kilkoma przykładami. Realizacja techniczna komputerów (automaty dwustanowe) spowodowała zainteresowanie teorią liczb wykorzystującą układ dwójkowy. Jest oczywiste, że rozważania można prowadzić

w dowolnym układzie, np. w układzie z podstawą 10. W takim układzie zbiór liczb rzeczywistych można utożsamiać z ogółem ułamków dziesiętnych nieskończonych. Komputer posługuje się szczególnym przypadkiem liczb rzeczywistych, a mianowicie ułamkami dziesiętnymi skończonymi.

Rozważmy prosty przykład ciągu zbieżnego

$$0,3 \quad 0,33 \quad 0,333 \quad 0,3333 \quad 0,33333 \quad \dots \rightarrow 0,(3) = \frac{1}{3} \quad (5)$$

Zauważmy, że każdy element ciągu jest liczbą wymierną (skończona liczba cyfr w rozwinięciu dziesiętnym). Granica ciągu jest też liczbą wymierną, która nie jest możliwa do osiągnięcia przez komputer.

Rozważmy drugi przykład ciągu liczb wymiernych

$$x_{i+1} = F(x_i), \quad F(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right), \quad x \in [1, 2], \quad x_i \rightarrow \sqrt{2} \quad (6)$$

Granica istnieje i jest liczbą niewymierną $\sqrt{2}$, która nie jest osiągalna w komputerze, ale jest wyznaczona w wyniku rozważań teoretycznych. Obliczenia numeryczne wykonywane za pomocą komputera pozwalają dowolnie blisko przybliżać się do liczby $\sqrt{2}$.

Podobno Gauss miał powiedzieć (Courant i Robbins 1998, s. 43): „Matematyka jest królową nauk, a teoria liczb jest królową matematyki”. Komputer wykorzystuje „mały” podzbiór liczb rzeczywistych scharakteryzowany skończonym rozwinięciem (skończoną długością słowa). Zatem nawet najbardziej precyzyjne obliczenia prowadzone z wykorzystaniem komputera nie pozwalają rozróżnić liczb różnych między sobą ze swej istoty, w szczególności nie pozwalają rozróżnić, czy dana liczba jest wymierna, czy też niewymierna. Na osi liczb rzeczywistych znajduje się bardzo dużo liczb, o których prawie nic nie wiemy. Do takich liczb należą liczby przestępne. Komputer umożliwia zbliżanie się do takich liczb z dowolną dokładnością. Dla przykładu komputer pozwala z dowolną dokładnością przybliżać się do prawdziwej wartości liczby przestępnej Eulera e (Courant i Robbins 1998, s. 286).

W tym miejscu warto również wspomnieć, że teoria liczb jest wykorzystywana w kryptografii.

4. Redukcja wymiaru

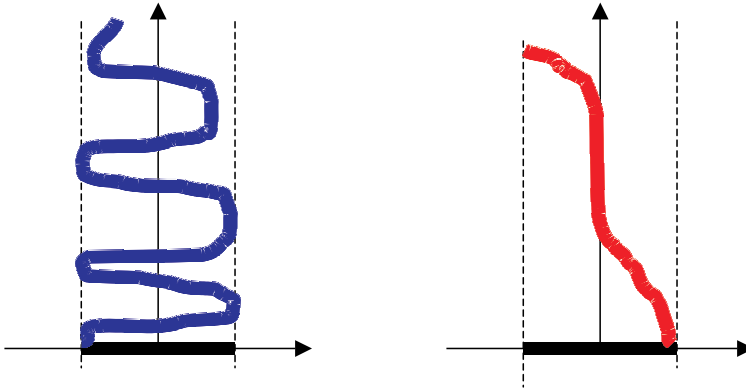
Obliczenia numeryczne i symulacje komputerowe są wykonywane technikami skończenie wymiarowymi. W konsekwencji świat w komputerze ma wymiar skończony. Ta redukcja wymiaru z $n = \infty$ do wymiaru skończonego $n < \infty$ wiąże się z utratą informacji, w szczególności z utratą możliwości obserwowania pewnych własności układu.

Dla przykładu prędkość rozchodzenia fali w układzie hiperbolicznym (np. równanie struny drgającej) jest skończona. Równanie hiperboliczne można modelować (aproksymować)

wać) odpowiednim obwodem elektrycznym typu LC , w którym sygnały rozchodzą się nieskończenie szybko.

Inny przykład. Wyobraźmy sobie walec, na którego bocznej ścianie rozgrywają się pewne procesy. Wszystkie trajektorie, bez względu na kształt, leżące na ścianie walca po zrzutowaniu na podstawę walca są zawarte w trajektorii stanowiącej okrąg.

Utrata informacji przy redukcji wymiaru (przy aproksymacji) z $n = 2$ do wymiaru $n = 1$ jest schematycznie pokazana na rysunku 1. Dwie różne krzywe po zrzutowaniu na oś poziomą tworzą odcinek.



Rys. 1. Utrata informacji przy rzutowaniu

Jest dość oczywiste, że użytkownik komputera chce rozwiązać odpowiednie zadanie w możliwie krótkim czasie. Redukcja wymiaru problemu skraca czas uzyskania rozwiązania zadania, ale niestety często prowadzi do utraty pewnych, czasem bardzo istotnych, właściwości poszukiwanego rozwiązania.

Dla przykładu rozważmy system dynamiczny S generowany przez równanie różniczkowe

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \varphi(x(t)), \quad x(t) \in R^n,$$

gdzie A jest macierzą rzeczywistą $n \times n$ oraz φ jest pewną funkcją nieliniową.

Na początku rozważań założmy, że $\varphi = 0$. Zauważmy, że dla $n = 1$ w systemie S mamy wyłącznie przebiegi wykładnicze $x(t) = e^{\lambda t} x(0)$, $\lambda \in R$. Dla $n = 2$ w systemie S mogą wystąpić przebiegi oscylacyjne. Przy $n = 3$ dynamika układu S jest jeszcze bardziej bogata. Macierz A ma bowiem zawsze jedną wartość własną rzeczywistą oraz może posiadać parę sprzężonych wartości własnych. Jeżeli w tym przypadku (czyli dla $n = 3$) dodatkowo $\varphi \neq 0$, to system S może posiadać dynamikę chaotyczną. W tym miejscu warto również wspomnieć, że przy $\varphi \neq 0$ i $n < 3$ układ dynamiczny S nie może posiadać dynamiki chaotycznej.

5. Odwzorowania iterowane

Zasada odwzorowań zwięzających ma bogatą interpretację, co jest siłą matematyki. Dla przykładu niech $H(X)$ będzie przestrzenią z metryką Hausdorffa, której elementami są zwarte i niepuste podzbiory przestrzeni $X = R^2$. Taka przestrzeń metryczna jest nazywana przestrzenią fraktali. Przestrzeń fraktali jest przestrzenią zupełną i jest wykorzystywana w teorii przetwarzania obrazów.

Niech $x = [x_1 \ x_2]^T$ oraz $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$. Niech $d(x, B)$ będzie odległością euklidesową punktu x od zbioru B (zob. rys. 2),

$$d(x, B) = \min_{y \in B} \rho(x, y).$$

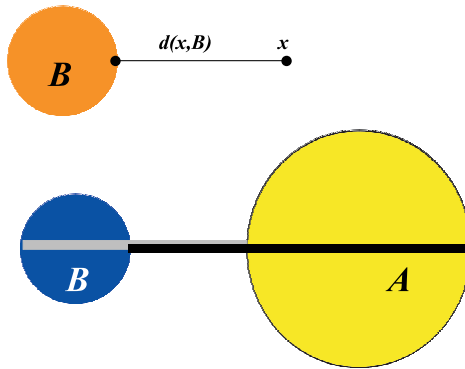
Dalej niech $d(A, B)$ oznacza odległość zbioru A od zbioru B ,

$$d(A, B) = \max_{x \in A} d(x, B) \quad \text{oraz} \quad d(B, A) = \max_{y \in B} d(y, A) \quad (7)$$

Metryka Hausdorffa określona jest następującym wzorem:

$$h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\} \quad (8)$$

Interpretacja geometryczna metryki Hausdorffa jest pokazana na rysunku 2. Odległość Hausdorffa pomiędzy zbiorami A i B jest zaznaczona czarną grubą linią.



Rys. 2. Interpretacja geometryczna odległości Hausdorffa

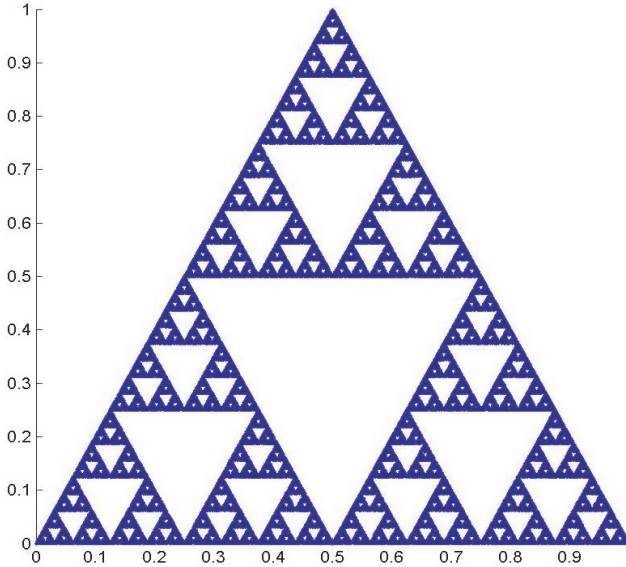
Rozważmy przykładowe odwzorowanie iterowane:

$$x(i+1) = A_k x(i) + b_k, \quad x(0) = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad k = 1 \text{ lub } 2 \text{ lub } 3 \quad (9)$$

przy czym

$$A_1 = A_2 = A_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (10)$$

W każdej iteracji o numerze i jest losowo wybierany zestaw parametrów (10) równania (9). W „granicy” otrzymujemy zbiór pokazany na rysunku 3 przy liczbie iteracji równej 10000 (jest to tak zwany trójkąt Sierpińskiego).

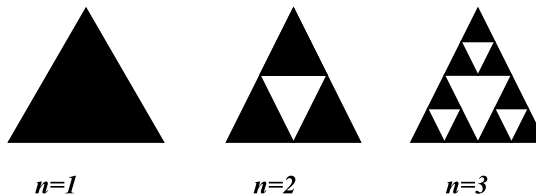


Rys. 3. Trójkąt Sierpińskiego przy $n = 10000$

Trójkąt Sierpińskiego pokazany na rysunku 3 jest granicą ciągu zbiorów pokazanych na rysunku 4. Odległość Hausdorffa pomiędzy odpowiednimi elementami tego ciągu określona jest następującym wzorem:

$$h(A_n, A_m) < 2^{-n} \quad n < m \quad (11)$$

Z równości (11) widać, że ciąg $\{A_n\}$ pokazany na rysunku 4 jest ciągiem Cauchy’ego w przestrzeni fraktali $H(X)$ i zatem posiada granicę. Dokładna granica nie jest osiągalna „środkami informatycznymi”. Wykorzystując „narzędzia informatyczne”, można uzyskać granicę przybliżoną. Numerycznie przybliżona granica tego ciągu jest pokazana na rysunku 3 (przy liczbie iteracji równej 10000).



Rys. 4. Trzy elementy ciągu w przestrzeni fraktali

6. Przyjazne sformułowanie problemu

Zastosowania informatyki w różnych dziedzinach wymagają tworzenia przyjaznego oprogramowania dla użytkownika. Tworzenie przyjaznego oprogramowania wymaga z kolei odpowiednich podstaw teoretycznych i odpowiednich sformułowań problemów. Dla przykładu rozważmy macierzowe równanie liniowe

$$Ax = b \quad (12)$$

gdzie A jest macierzą o odpowiednich wymiarach, a b jest wektorem również o odpowiedniej długości. Rozwiązanie równania (12) względem x może istnieć (np. dokładnie jedno rozwiązanie), może być wiele rozwiązań i równanie (12) może nie posiadać rozwiązania. Z punktu widzenia użytkownika, zwłaszcza użytkownika o małej wiedzy teoretycznej, najwygodniejsza jest sytuacja, w której algorytm numeryczny (w postaci odpowiedniego oprogramowania) zawsze wyliczy „jakieś” rozwiązanie równania (12). By doprowadzić do takiej sytuacji należy problem poszukiwania rozwiązania równania (12) przeformułować w następujący problem optymalizacji: przy zadanych A i b poszukujemy elementu $x^o \in X$ takiego, że

$$\|x^o\| \leq \|v\|, \quad \forall v \in V, \quad V = \{v \in X : \|Av - b\| \leq \|Ax - b\|, \forall x \in X\} \quad (13)$$

Innymi słowy, wśród elementów minimalizujących normę $\|Ax - b\|$ poszukujemy elementu minimalizującego dodatkowo normę $\|x\|$. Taki element $x^o \in X$ istnieje i jest określony jednoznacznie

$$x^o = A^+b \quad (14)$$

gdzie A^+ jest macierzą pseudoodwrotną do A . Element x^o nazywamy rozwiązaniem (przybliżonym optymalnie) równania (12).

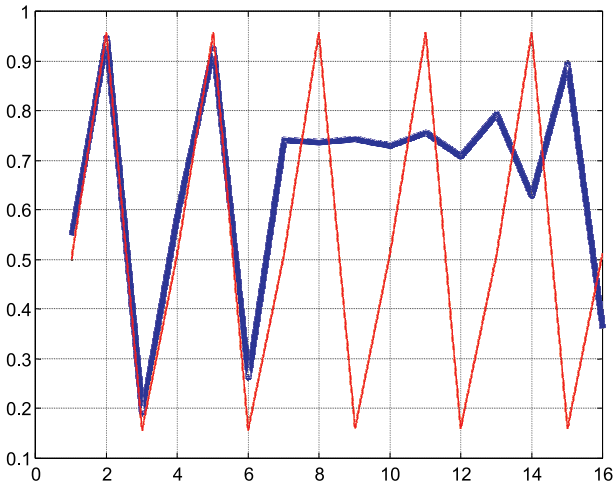
7. Zagrozenia w interpretacji wyników

Prosty układ dynamiczny dyskretny w czasie o następującej postaci

$$x(i+1) = F(x(i), \lambda), \quad F(x, \lambda) = \lambda x(1-x), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

posiada bardzo złożoną dynamikę (np. Lasota i Mackey 1994, s. 1; Oprocha 2007), nazywaną popularnie dynamiką chaotyczną. Cechą charakterystyczną tej dynamiki jest następująca własność: dwie trajektorie startujące w chwili początkowej z punktów położonych blisko siebie po pewnym czasie oddalają się od siebie (zob. rys. 5), by potem znowu zbliżyć się i następnie znowu oddalić od siebie o ustaloną wielkość.

Problem w tym, że przy symulacji komputerowej złożonych układów dynamicznych można „przypadkowo”, w sposób nie zamierzony przez programistę, wygenerować formuły rekurencyjne posiadające dynamikę chaotyczną.



Rys. 5. Trajektorie $x(t)$ układu (15) przy $\lambda = 3,8284$

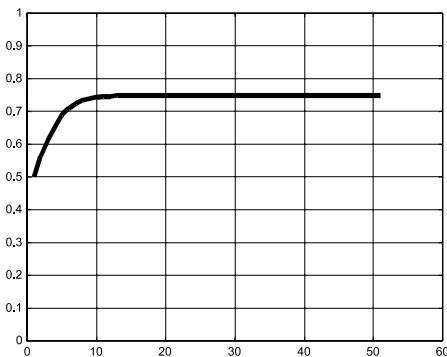
Dla przykładu rozwiązując numerycznie równanie Riccatiego

$$\dot{x}(t) = ax(t)^2 + bx(t) + c \quad (16)$$

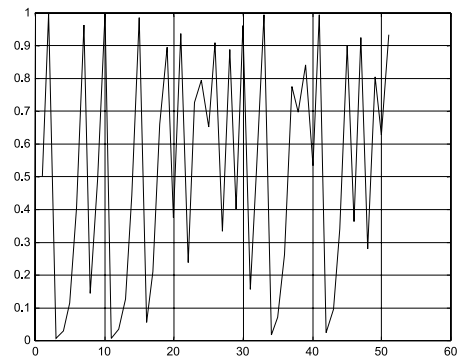
które występuje w syntezy regulatora LQ, otrzymujemy równanie rekurencyjne o następującej postaci:

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{h} = ax_i^2 + bx_i + c, \quad x_i = x(ih), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

a)



b)



Rys. 6. Numeryczne rozwiązanie równania (16) przy $h = 0,5$ (a) oraz $h = 3,99$ (b)

Na rysunku 6 pokazano rozwiązanie numeryczne równania (16) z wykorzystaniem schematu różnicowego (17) przy $a = -1$, $b = 3/4$, $c = 0$, $x(0) = 0$ oraz przy kroku dyskretyzacji czasu $h = 0,5$ (rysunek po lewej stronie) i $h = 3,99$ (rysunek prawy). Krok dyskretyzacji h jest zwykle zwiększany dla przyspieszenia obliczeń (uzyskanie rozwiązania w zadanej chwili czasu możliwie szybko). Z rysunku 6 widać, że zwiększanie h w schemacie różnicowym (17) z ilorzem różnicowym przednim, powoduje destabilizację obliczeń.

8. Dynamika sieci neuronowej

Sieci neuronowe są jednym z częściej stosowanych „narzędzi” informatycznych. Dobre oprogramowanie stosowane do nauczania sieci neuronowych pozwala przeprowadzać różne eksperymenty symulacyjne użytkownikowi nawet średnio przygotowanemu teoretycznie. Tego rodzaju postępowanie bez głębszego fizycznego zrozumienia rozważanego problemu, zwłaszcza przy zagadnieniach związanych z modelowaniem układów dynamicznych, może prowadzić do nadinterpretacji otrzymanych wyników.

Dynamikę neuronowej sieci komórkowej (np. Galias 1995, s. 26) złożonej z trzech neuronów można opisać układem trzech równań różniczkowych

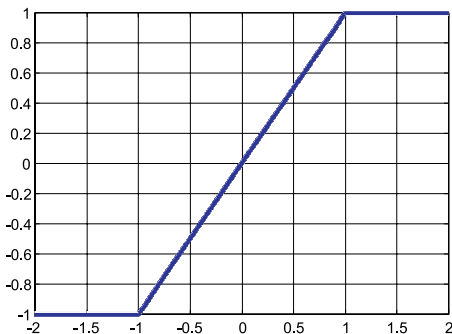
$$\dot{w}(t) = Aw(t) + Bu(t),$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} p_1 & -s & -s \\ -s & p_2 & -r \\ -s & -r & p_3 \end{bmatrix}, \quad w(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad (18)$$

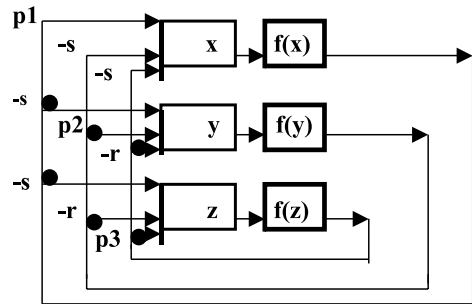
$$u_1(t) = f(x(t)), \quad u_2(t) = f(y(t)), \quad u_3(t) = f(z(t))$$

gdzie $f(x) = 0,5(|x+1| - |x-1|)$ jest charakterystyką „nasylenia” pokazaną na rysunku 7.

Schemat połączeń neuronów jest pokazany na rysunku 8.

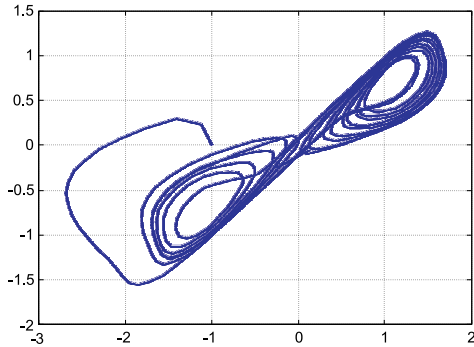


Rys. 7. Charakterystyka na wyjściu z neuronu

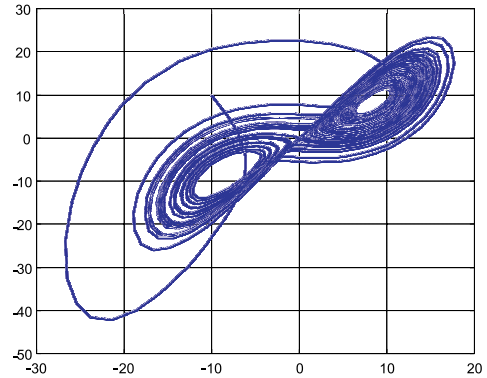


Rys. 8. Schemat połączeń sieci neuronowej

Na rysunku 9 pokazano (wynik symulacji komputerowej z wykorzystaniem pakietu programowego Matlab/simulink) rzut trajektorii systemu (18) na płaszczyznę xy , dokładniej zależność $y(x)$, przy następujących parametrach sieci pokazanej na rysunku 8: $p_1 = 1,25$; $p_2 = 1,1$; $p_3 = 1,0$; $s = 3,2$; $r = 4,4$.



Rys. 9. Rzut trajektorii systemu (18) na płaszczyznę xy



Rys. 10. Atraktor Lorenza

Dla porównania na rysunku 10 pokazano atraktor Lorenza, który można otrzymać w wyniku rozwiązania numerycznego układu równań

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \varepsilon Bu(t), \quad A = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ b & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Bu(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -K_1 x_1(t) x_3(t) \\ K_2 x_1(t) x_2(t) \end{bmatrix} \quad (19)$$

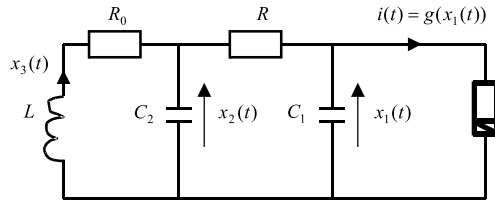
$$u_1(t) = -K_1 x_1(t) x_3(t), \quad u_2(t) = K_2 x_1(t) x_2(t), \quad x(t) \in R^3, \quad u(t) \in R^2$$

przy parametrach $a = 10 > 0$, $b = 28 > 0$, $c = 8/3 > 0$ oraz $K_1 = 1$, $K_2 = 1$, $\varepsilon = 1$.

Źródłem dynamiki chaotycznej może być źle prowadzony proces rozwiązywania numerycznego systemu dynamicznego (zob. rys. 6) lub wykorzystanie narzędzi informatycznych bez „głębszego zrozumienia” (zob. rys. 8 i 9). Złożone sieci komórkowe zawierają w sobie nieliniowości, które tworzą nowy typ nieliniowości trudny do teoretycznej analizy. Może zatem wystąpić sytuacja, w której w komputerowych symulacjach pojawiają się zachowania chaotyczne nieistniejące w modelowanym systemie rzeczywistym. Problem w tym, że w realnym świecie fizycznym występują systemy, np. elektryczne, które z natury rzeczy posiadają dynamikę chaotyczną. Dobrym przykładem jest nieliniowy obwód elektryczny Chuy (np. Galias 1995, s. 24).

9. Dynamika obwodu Chuy

Rozważmy obwód elektryczny pokazany na rysunku 11. Pojemność C_1 jest zwarta nieliniową opornością (np. Galias 2003, s. 36), $g(v) = g_1 v + g_2 v^3$, $g_1 < 0$, $g_2 > 0$.

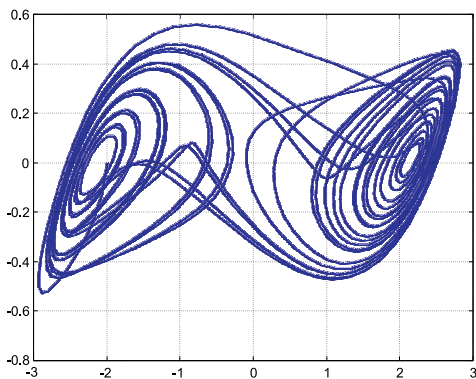


Rys. 11. Elektryczny obwód Chuy

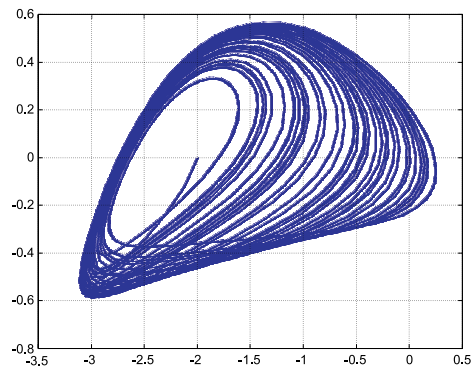
Obwód elektryczny pokazany na rysunku 11 można opisać następującym układem równań różniczkowych

$$\begin{aligned} C_1 \dot{x}_1 &= \frac{1}{R}(x_2 - x_1) - g(x_1) \\ C_2 \dot{x}_2 &= -\frac{1}{R}(x_2 - x_1) + x_3 \\ L \dot{x}_3 &= -x_2 - R_0 x_3 \end{aligned} \quad (20)$$

Symulacje komputerowe przeprowadzono dla zestawu parametrów podanych w pracy Z. Galiasa (Galias 2003, s. 36). Na rysunkach 12 i 13 pokazano dwie zasadniczo różne trajektorie $x_2(x_1)$ otrzymane przy małej zmianie oporności R . Tego rodzaju własność jest cechą dynamiki chaotycznej.



Rys. 12. Trajektorie $x_2(x_1)$ układu (20) przy $R = 2,0$

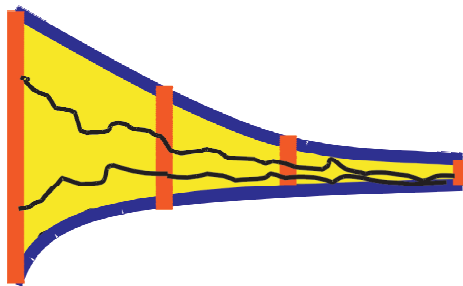


Rys. 13. Trajektorie $x_2(x_1)$ układu (20) przy $R = 2,1$

Badacz przystępując do analizy układu dynamicznego nie zna jego własności. Wykorzystując stosunkowo łatwo dostępne narzędzia informatyczne uzyskuje symulacje komputerowe, w których może zaobserwować różnego typu dziwne zachowania. Krytyczny badacz będzie się starał zrozumieć źródło tych zachowań. Dobra teoria i wiedza badacza pozwoli mu przed przystąpieniem do analizy symulacyjnej wykazać istnienie (metodami teoretycznymi) dynamiki chaotycznej (definicje zob. np. Oprocha 2007). Symulacje numeryczne pozwalają zilustrować rozważania teoretyczne. Z drugiej strony, symulacje komputerowe prowadzone „właściwie” mogą stanowić podpowiedź i zachętę do poszukiwania metodami teoretycznymi zachowań chaotycznych.

10. Zakończenie

W ostatnich latach, ze względu na szybki rozwój narzędzi informatycznych, coraz częściej wraca się do wcześniejszych pomysłów dotyczących dowodów komputerowych, dokładniej do wspomagania dowodów matematycznych technikami komputerowymi. Wykorzystuje się tu metody arytmetyki przedziałowej (np. Galias 2003) symbolicznie przedstawionych na rysunku 14 i określających dokładnie przedziały ewoluujące w czasie, w których mogą znajdować się trajektorie czasowe badanego układu dynamicznego. Inną cechą charakterystyczną, która uzasadnia wykorzystania komputera w dowodzeniu twierdzeń jest możliwość przeformułowania problemu weryfikacji nieskończonej liczby eksperymentów w problem równoważny o skończonej liczbie eksperymentów. Dobrym przykładem jest wykorzystanie twierdzenia Charitonowa do badania asymptotycznej stabilności wielomianu przedziałowego (np. Mitkowski 2007, s. 139).



Rys. 14. Obliczenia przedziałowe

Innym przykładem dużych możliwości informatyki stosowanej jest komputerowe sterowanie różnego typu obiektów w czasie rzeczywistym.

Podsumowując, należy zauważyć, że informatyka jako dziedzina nauki zwiększa stopień dostępności do prawdy i możliwości poznawcze człowieka, przy czym równocześnie uzmysławia nam, że pewne „byty idealne” są niedostępne. Informatyka tak rozumiana ma ogromne znaczenie dydaktyczne i wychowawcze. Młodzi ludzie, i to nie tylko młodzi bada-

cze, chętnie interesują się informatyką. Przy okazji udostępniania coraz lepszych narzędzi informatycznych można przekazywać myśli głębsze, a mianowicie filozofię nadziei i dążenia do doskonałości. Zbliżanie się do doskonałości jest procesem nieskończonym i jak się okazuje niemożliwym do zakończenia w skończonym przedziale czasu.

Niniejsza praca powstała na podstawie referatu wygłoszonego na seminarium wyjazdowym Katedry Automatyki w Politechnice Lubelskiej w dniu 9.11.2007.

Literatura

- Courant R., Robbins H., *Co to jest matematyka?* Warszawa, Prószyński i S-ka 1998.
- Galias Z., *Analiza i przetwarzanie sygnałów chaotycznych*. Kraków, Zakład Elektrotechniki AGH 1995 (praca doktorska).
- Galias Z., *Metody arytmetyki przedziałowej w badaniach układów nieliniowych*. Kraków, Rozprawy i Monografie 122, UWND AGH 2003.
- Kudrewicz J., *Fraktale i chaos*. Wyd. 2, Warszawa, WNT 1993.
- Lasota A., Mackey M.C., *Chaos, Fractals, and Noise. Stochastic Aspects of Dynamics*. 2nd Ed., New York, Springer-Verlag 1994.
- Mitkowski W., *Równania macierzowe i ich zastosowania*. Wydanie drugie poprawione, Kraków, UWND AGH 2007, ISBN 978-83-7464-119-7, 1–203.
- Oprocha P., *Mieszanie topologiczne w dyskretnych układach dynamicznych – krótkie wprowadzenie*. Automatyka (półrocznik AGH), t. 12, z. 1, 2008.