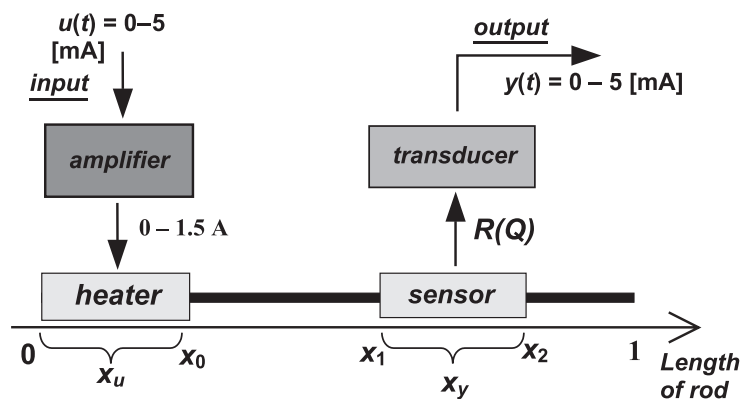


Wojciech Mitkowski, Krzysztof Oprzędkiewicz\*

## Odporny dyskretny kompensator dynamiczny dla systemu parabolicznego o niepewnych parametrach

### 1. System paraboliczny o niepewnych parametrach i jego model matematyczny

Rozważany obiekt doświadczalny jest obiektem typu cieplnego, którego uproszczony schemat pokazany jest na rysunku 1. Jest to metalowy pręt ogrzewany na jednym z końców elementem grzeijnym o długości  $x_u$ , a którego temperatura jest odczytywana przez czujnik pomiarowy o długości  $\Delta x = x_2 - x_1$ . Sterowaniem obiektu jest sygnał prądowy podawany poprzez wzmacniacz na element grzeiny, a sygnałem wyjściowym jest temperatura odczytywana przez czujnik pomiarowy.



Rys. 1. Uproszczony schemat rozważanego obiektu cieplnego

Podstawowym modelem dynamiki rozważanego obiektu jest równanie przewodnictwa cieplnego w ośrodku jednowymiarowym, z warunkami brzegowymi Neumanna na końcach

\* Katedra Automatyki, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

pręta, wymianą ciepła wzdłuż długości oraz rozłożonym sterowaniem i obserwacją. Jest to równanie różniczkowe cząstkowe, typu parabolicznego o następującej postaci

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Theta(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \Theta(x, t)}{\partial x^2} - R_a \Theta(x, t) + b(x)u(t), 0 \leq x \leq 1, t \geq 0 \\ \frac{\partial \Theta(0, t)}{\partial x} = 0, t \geq 0 \\ \frac{\partial \Theta(1, t)}{\partial x} = 0, t \geq 0 \\ y(t) = y_0 \int_0^1 \Theta(x, t) c(x) dx \end{array} \right. \quad (1)$$

gdzie:

- $\Theta(x, t)$  – temperatura pręta w chwili  $t > 0$  i w punkcie  $x \in [0, 1]$ ,
- $R_a, a > 0$  – współczynnik przewodnictwa cieplnego oraz wymiany ciepła,
- $b(x)$  – funkcja sterowania, opisująca element grzejny,
- $c(x)$  – funkcja wyjścia, opisująca czujnik pomiarowy.

Wartości współczynników  $R_a$  i  $a$  nie są dokładnie znane i mogą one być zapisane jako liczby przedziałowe:  $a = [a, \bar{a}]$ ,  $R_a = [\underline{R}_a, \overline{R}_a]$ , które budują przestrzeń niepewnych parametrów obiektu  $Q$ , która może być zapisana następująco

$$Q = \left\{ q \in I(\mathfrak{R}^2) : q = [a, R_a], \underline{a} \leq a \leq \bar{a}, \underline{R}_a \leq R_a \leq \overline{R}_a \right\} \quad (2)$$

Wierzchołki obszaru niepewnych parametrów  $Q$  są zdefiniowane następująco:

$$\begin{aligned} q_{ll} &= [a, \underline{R}_a] \\ q_{lh} &= [a, \overline{R}_a] \\ q_{hl} &= [\bar{a}, \underline{R}_a] \\ q_{hh} &= [\bar{a}, \overline{R}_a] \end{aligned} \quad (2a)$$

Powyższe równanie ciepłoprzewodnictwa może być zapisane w postaci abstrakcyjnego problemu początkowego w przestrzeni Hilberta  $X = L^2(0, 1)$  ze standardowym iloczynem skalarnym. W rozważanym przypadku równanie abstrakcyjne może być zapisane następująco (zob. [5]):

$$\begin{cases} \dot{\Theta}(t) = A(q)\Theta(t) + Bu(t), \Theta(0) = 0 \\ y(t) = C\Theta(t) \end{cases} \quad (3)$$

gdzie:

$$A(q)\Theta = a\Theta'' - R_a Q,$$

$$D(A) = \{u \in H^2(0,1) : \Theta'(0) = 0, \Theta'(1) = 0\},$$

$$H^2(0,1) = \{u \in L^2(0,1) : u', u'' \in L^2(0,1)\},$$

$$C\Theta(t) = \langle c, \Theta(t) \rangle,$$

$$Bu(t) = \langle bu(t) \rangle,$$

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 u(x)v(x)dx \quad (4)$$

Baza ortonormalna przestrzeni stanu budowana jest przez następujący zestaw wektorów własnych macierzy stanu  $A$

$$h_i = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ \sqrt{2} \cos(i\pi x), & i = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (5)$$

Widmo systemu jest zbiorem pojedynczych, przedziałowych wartości własnych, które mogą być zapisane następująco

$$\Lambda(q) = \{ \Lambda_i(q) \in I(\mathfrak{R}^2) : \Lambda_i(q) = -\pi^2 i^2 a - R_a \} \quad (6)$$

Geometryczna interpretacja widma systemu (6) jest taka, że poszczególne wartości własne są powierzchniami w przestrzeni  $\mathfrak{R}^3$  (zob. [5]).

Przedziałowy operator stanu  $A(q)$  jest także funkcją niepewnych parametrów obiektu i ma on następującą postać

$$A(q) = \text{diag} \{ \Lambda_0(q), \Lambda_1(q), \Lambda_2(q), \dots \} \quad (7)$$

Ponieważ parametry geometryczne grzejnika i czujnika temperatury są dokładnie znane, to operatory sterowania i wyjścia są liczbami rzeczywistymi

$$B = \{b_0, b_1, b_2, \dots\}^T \quad (8)$$

Gdzie:  $b_i = \langle b, h_i \rangle$ ,  $b(x)$  jest funkcją elementu grzejnego:

$$b(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, x_0] \\ 0, & x \notin [0, x_0] \end{cases} \quad (9)$$

$$C = \{c_0, c_1, c_2, \dots\} \quad (10)$$

gdzie  $c_i = \langle c, h_i \rangle$ ,  $c(x)$  jest funkcją czujnika temperatury:

$$c(x) = \begin{cases} y_0, & x \in [x_1, x_2] \\ 0, & x \notin [x_1, x_2] \end{cases} \quad (11)$$

Przez odcięcie dalszych wyrazów operatorów  $A$ ,  $B$  i  $C$  otrzymujemy skończenie wymiarową aproksymację modelu (3)–(11), która także dobrze opisuje rozważany system. Wtedy operatory  $A(q)$ ,  $B$  oraz  $C$  mogą być interpretowane jako macierze.

Analiza podstawowych własności systemu o niepewnych parametrach (3)–(11) została dokładnie omówiona w pracach [5–9]. System ten jest uogólnieniem systemu parabolicznego o znanych dokładnie parametrach i zachowuje większość jego zasadniczych cech.

W wyniku dyskretyzacji modelu ciągłego (3)–(11) otrzymujemy model w postaci dyskretnego równania stanu o postaci następującej

$$\begin{cases} \Theta^+(k+1) = A^+(q)\Theta(k) + B^+(q)(k) \\ y^+(k) = C^+\Theta(k) \end{cases} \quad (12)$$

gdzie:

$k$  – dyskretna chwila czasu,

$\Theta^+(k)$  – temperatura w  $k$ -tym momencie,

$A^+(q)$ ,  $B^+(q)$ ,  $C^+$  – operatory systemu dyskretnego, przy czym operator wyjścia  $C^+$  jest operatorem rzeczywistym

$$C^+ = [c_0^+, c_1^+, c_2^+, \dots] \quad (13)$$

a operatory  $A^+(q)$  oraz  $B^+(q)$  są operatorami przedziałowymi, opisanymi następująco (zob. [7]):

$$A^+(q) = \text{diag} \{ \Lambda_0^+(q), \Lambda_1^+(q), \Lambda_2^+(q), \dots \} \quad (14)$$

gdzie:

$$A^+(q) = e^{A(q)T_s}, \quad B^+(q) = \int_0^{T_s} e^{A(q)t} B dt, \quad C^+ = C \quad (15)$$

W relacji (15)  $T_s$  oznacza okres próbkowania,  $q \in Q$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  oznacza dyskretne chwile czasu. Elementy operatora sterowania  $B^+$  są funkcjami niepewnych parametrów i mogą być zapisane następująco

$$B^+(q) = [b_0^+(q), b_1^+(q), b_2^+(q), \dots]^T \quad (16)$$

gdzie

$$b_i(q) = [b_i, \bar{b}_i] \quad (17)$$

Wartości wierzchołkowe (17) są wyrażone następująco:

$$\begin{aligned} \underline{b}_i^+(q) &= \frac{-b_i}{i^2 \pi^2 \underline{a} + R_a} \left( e^{-T_s(i^2 \pi^2 \underline{a} + R_a)} - 1 \right) \\ \bar{b}_i^+(q) &= \frac{-b_i}{i^2 \pi^2 \bar{a} + R_a} \left( e^{-T_s(i^2 \pi^2 \bar{a} + R_a)} - 1 \right) \end{aligned} \quad (18)$$

Widmo systemu dyskretnego jest opisane analogicznie jak systemu ciągłego (6):

$$\Lambda^+(q) = \left\{ \Lambda_i^+(q) \in I(\mathfrak{R}^2) : q \in Q, \Lambda_i^+ = e^{-T_s(i^2 \pi^2 a + R_a)} \right\} \quad (19)$$

## 2. Dyskretny kompensator skończenie wymiarowy

Dyskretne dynamiczne sprzężenie zwrotne dla systemu parabolicznego o znanych parametrach zostało omówione m.in. w pracy [1]. Podejście opisane w tych pracach może być też uogólnione na rozważany system o niepewnych parametrach pod warunkiem, że system spełnia warunki o dekompozycji widma, które są podane w pracy [5].

Najogólniej, warunki o dekompozycji widma dla rozważanego systemu są spełnione, jeśli dekompozycja jest jednoznaczna w całym obszarze niepewnych parametrów (zob. [5]). W przypadku, gdy warunki te są spełnione, system może być zdekomponowany na trzy podsystemy, analogicznie jak system o znanych parametrach:

$$\begin{bmatrix} \Theta_1^+(k+1) \\ \Theta_2^+(k+1) \\ \Theta_3^+(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^+(q) & 0 & 0 \\ 0 & A_2^+(q) & 0 \\ 0 & 0 & A_3^+(q) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Theta_1^+(k) \\ \Theta_2^+(k) \\ \Theta_3^+(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1^+(q) \\ B_2^+(q) \\ B_3^+(q) \end{bmatrix} \cdot u^+(i) \quad (20)$$

$$y^+(k) = C_1^+ \Theta_1^+(k) + C_2^+ \Theta_2^+(k) + C_3^+ \Theta_3^+(k)$$

gdzie:

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

$A_1^+(q)$  i  $A_2^+(q)$  – operatory skończenie wymiarowe,

$A_3^+(q)$  – operator nieskończenie wymiarowy.

Operator  $A_1^+(q)$  reprezentuje słabo tłumioną (wykładniczo niestabilną) część systemu, operatory  $A_2^+(q)$  i  $A_3^+(q)$  są wykładniczo stabilne.

Kompensator skończenie wymiarowy dla systemu o znanych dokładnie parametrach lub dla jednej, ustalonej wartości wektora niepewnych parametrów  $q$  ma postać następującą: (zob [1]):

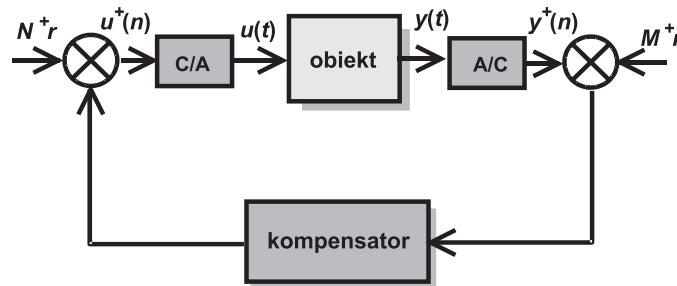
$$\begin{bmatrix} w_1^+(i+1) \\ w_2^+(i+1) \end{bmatrix} = A_k^+ \cdot \begin{bmatrix} w_1^+(i) \\ w_2^+(i) \end{bmatrix} + B_k^+ [y^+(i) + M^+ r]$$

$$u^+(i) = K_1^+ w_1^+(i) + N^+ r \quad (21)$$

gdzie:

$$A_k^+ = \begin{bmatrix} A_1^+ - G_1^+ C_1^+ + B_1^+ K_1^+ & -G_1^+ C_2^+ \\ B_2^+ K_1^+ & A_2^+ \end{bmatrix}, \quad B_k^+ = \begin{bmatrix} G_1^+ \\ 0 \end{bmatrix}$$

Układ sterowania z kompensatorem pokazany jest na rysunku 2.



Rys. 2. Układ sterowania z kompensatorem

W układzie z rysunku 2 blok przetwornika A/C realizuje funkcję impulsatora idealnego opisanego następująco:  $y^+(n) = y(nT_s)$ , a blok przetwornika C/A realizuje funkcję ekstrapolatora zerowego rzędu opisanego następująco:  $u(t) = u^+(n)$ ,  $t \in [nT_s, (n+1)T_s)$ . Macierze  $G_1^+$  oraz  $K_1^+$  dobiera się tak, aby wartości własne  $A_1^+ - G_1^+ C_1^+$  oraz  $A_1^+ + B_1^+ K_1^+$  leżały wewnątrz koła jednostkowego. Takie macierze istnieją, jeśli para  $(A_1^+; B_1^+)$  jest sterowalna

oraz para  $(C_1^+; A_1^+)$  jest obserwowalna. Dodatkowo, wartości własne operatora  $A_1(q)$  muszą spełniać warunek (dla  $n$ ):

$$T_s \operatorname{Im}(\lambda_s - \lambda_i) \neq 2\pi n \text{ dla } \operatorname{Re}(\lambda_s - \lambda_i) = 0 \quad (22)$$

Dobór macierzy kompensatora może być dokonany na podstawie następującego warunku (zob. [1]):

$$\begin{aligned} & \textit{Jeżeli para } (A_1^+; B_1^+) \textit{ jest sterowalna} \\ & \textit{oraz para } (C_1^+; A_1^+) \textit{ jest obserwowalna,} \\ & \textit{to macierze } G_1^+ \textit{ oraz } K_1^+ \textit{ można dobrać tak,} \\ & \textit{aby wartości własne } A_1^+ - G_1^+ C_1^+ \textit{ oraz } A_1^+ + B_1^+ K_1^+ \textit{ były równe zero.} \end{aligned} \quad (23)$$

Z powyższych rozważań wynika, że kompensator dyskretny jest opisany dwójką macierzy  $(G_1^+(q); K_1^+(q))$ . Jeżeli założymy, że spełniony jest warunek (23), dla ustalonej wartości  $q$  opis ten jest jednoznaczny. Formalnie można to zapisać następująco

$$s^+(q) = (G_1^+(q); K_1^+(q)) \quad (24)$$

Kompensator dynamiczny w postaci (21) i zapisany w postaci (24) może być wyznaczony na podstawie wartości parametrów macierzy  $A^+(q)$  oraz  $B^+(q)$  dla ustalonej wartości wektora niepewnych parametrów  $q$ .

W przypadku gdy ich wartości nie są dokładnie znane, należy zastosować inne podejścia. Jednym z nich jest konstrukcja kompensatora odpornego, której propozycja zostanie przedstawiona poniżej.

### 3. Kompensator odporny dla rozważanego systemu

Kompensator  $s^+(q)$  opisany przez (23) jest zdefiniowany dla pojedynczej, ustalonej wartości wektora niepewnych parametrów  $q$  i dla tej wartości zapewnia kompensację wykładniczo niestabilnej części widma systemu. Należy zwrócić uwagę, że kompensator zbudowany na podstawie jednej, konkretnej wartości wektora  $q$  zapewnia kompensację niestabilnej części widma **tylko** dla tej wartości, a dla innych wartości wektora  $q$  może nie zapewnić tej kompensacji, a w skrajnym wypadku może nie zapewnić nawet stabilności układu zamkniętego.

W przypadku całej przestrzeni niepewnych parametrów  $Q$  można określić nieskończony zbiór kompensatorów  $S^+$

$$S^+ = \{s^+(q) = (G_1^+(q); K_1^+(q)) : q \in Q\} \quad (25)$$

Dla zbioru kompensatorów  $S^+$  można zdefiniować cztery kompensatory wierzchołkowe:

$$\begin{aligned} s_{ll}^+(q) &= s^+(q_{ll}) \\ s_{lh}^+(q) &= s^+(q_{lh}) \\ s_{hl}^+(q) &= s^+(q_{hl}) \\ s_{hh}^+(q) &= s^+(q_{hh}) \end{aligned} \quad (25a)$$

Widmo układu zamkniętego, zawierającego obiekt o niepewnych parametrach i kompensator, jest również widmem przedziałowym, którego interpretacja geometryczna jest analogiczna jak widma systemu przedziałowego o niepewnych parametrach. Oznaczmy to widmo poprzez  $\Lambda_z^+(q)$ . Jest ono zdefiniowane następująco

$$\Lambda_z^+(q) = \{ \Lambda_{0z}^+(q), \Lambda_{1z}^+(q), \Lambda_{2z}^+(q) \dots \} \quad (26)$$

Zauważmy, że ustalona wartość wektora niepewnych parametrów  $q$  generuje określony kompensator  $s^+(q)$  oraz w konsekwencji, określone widmo  $\Lambda_z^+(q)$ . Widmo to może być wykładniczo stabilne w całym obszarze niepewnych parametrów, w części tego obszaru lub też może być w całym obszarze niestabilne. Oznaczmy stabilną część widma układu zamkniętego przez  $\Lambda_{zs}^+(q)$ , a część wykładniczo niestabilną poprzez  $\Lambda_{zns}^+(q)$ . Z kolei oznaczmy zadany współczynnik tłumienia układu zamkniętego przez  $\eta^+$ , przy czym  $0 \leq \eta^+ < 1$ . Wtedy obie części widma mogą być zdefiniowane następująco:

**Definicja 1.** (Wykładniczo stabilna część widma układu zamkniętego)

$$\Lambda_{zs}^+(q) = \{ \lambda_{zi}^+(q) \in \Lambda_z^+(q) : |\lambda_{zi}^+(q)| < \eta^+ \} \quad (27)$$

Wykładniczo niestabilna część widma może być zdefiniowana analogicznie:

**Definicja 2.** (Wykładniczo niestabilna część widma układu zamkniętego)

$$\Lambda_{zns}^+(q) = \{ \lambda_{zi}^+(q) \in \Lambda_z^+(q) : |\lambda_{zi}^+(q)| \geq \eta^+ \} \quad (28)$$

Obie części widma układu zamkniętego mają następujące podstawowe własności:

$$\begin{aligned} \Lambda_{zs}^+(q) \cup \Lambda_{zns}^+(q) &= \Lambda_z^+(q) \\ \Lambda_{zs}^+(q) \cap \Lambda_{zns}^+(q) &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$



Na podstawie powyższych rozważań problem syntezy kompensatora odpornego można sformułować następująco:

*Dla danego obszaru niepewnych parametrów  $Q$  należy wybrać taki kompensator  $s^+_s(q)$  ze zbioru wszystkich kompensatorów  $S^+(q)$ , który zapewni wykładniczą stabilność widma układu zamkniętego z danym współczynnikiem tłumienia  $\eta^+$  dla dowolnej wartości wektora niepewnych parametrów  $q \in Q$ .*

Dla danego systemu o niepewnych parametrach można sformułować warunki istnienia kompensatora  $s^+_s(q)$ , bazujące na geometrycznej interpretacji widma systemu zamkniętego i podejściu omówionym w pracach [5–7]. Mogą one być zapisane jako następująca uwaga:

**Uwaga 1.** (*WK i D wykładniczej stabilności układu zamkniętego w całym obszarze niepewnych parametrów obiektu  $Q$* )

*Założenia:*

1. *Rozważmy układ o niepewnych parametrach opisany przez (1)–(19).*
2. *Załóżmy, że system spełnia warunki o dekompozycji widma podane w pracy [5].*
3. *Dla obszaru niepewnych parametrów jest zdefiniowany zbiór kompensatorów dynamicznych  $S^+$ , określony przez (25) i posiadający cztery elementy wierzchołkowe, zdefiniowane przez (25a).*
4. *Załóżmy, że wymagany współczynnik tłumienia układu zamkniętego jest równy  $\eta^+$ .*
5. *Każda z wartości własnych układu zamkniętego generowana przez każdy z kompensatorów posiada ekstremum wyłącznie na narożnikach obszaru niepewnych parametrów.*

*Następujące sformułowania są sobie równoważne:*

1. *Rozważany układ o niepewnych parametrach jest wykładniczo stabilny ze współczynnikiem tłumienia  $\eta^+$  w całym obszarze niepewnych parametrów  $Q$ .*
2. *Każdy z kompensatorów wierzchołkowych, zdefiniowanych przez (25a) generuje widmo układu zamkniętego stabilne wykładniczo w całym obszarze  $Q$  z współczynnikiem tłumienia  $\eta^+$ .*
3.  $\Lambda^+_{zs}(q) = \Lambda^+_z(q)$ ,  $\Lambda^+_{zns}(q) = 0$ .

Należy zwrócić uwagę, że w rozważanym wypadku zbiór  $\Lambda^+_{zs}(q)$  nigdy nie jest zbiorem pustym, ponieważ istnieje co najmniej 1 kompensator w zbiorze  $S^+$  generujący stabilne widmo układu zamkniętego. Jest to kompensator skonstruowany w oparciu o założenie (23).

W rozważanym wypadku należy podać także warunek, jaki musi być spełniony, aby określony kompensator  $s^+(q)$  generował widmo wykładniczo stabilne w całym obszarze niepewnych parametrów  $Q$ . Warunek ten może być zapisany jako następująca uwaga:

**Uwaga 2.** (*WK i D generowania wykładniczo stabilnego widma w całym obszarze niepewnych parametrów  $Q$* )

*Założenia:*

1. Rozważmy układ o niepewnych parametrach opisany przez (1)–(19), dla którego przestrzeń niepewnych parametrów jest określona przez zbiór  $Q$ .
2. Załóżmy, że system spełnia warunki o dekompozycji widma podane w pracy [5].
3. rozważmy kompensator  $s^+_r(q_r) \in S^+$  wygenerowany przez określony wektor  $q_r \in Q$  ( $q_r$  nie musi być narożnikiem obszaru  $Q$ ).
4. Załóżmy, że wymagany współczynnik tłumienia układu zamkniętego jest równy  $\eta^+$ .
5. Każda z wartości własnych układu zamkniętego posiada ekstremum wyłącznie na narożnikach obszaru niepewnych parametrów.

*Następujące warunki są sobie równoważne:*

1. Rozważany kompensator  $s^+_r(q_r)$  generuje widmo wykładniczo stabilne w całym obszarze niepewnych parametrów  $Q$ .
2. Kompensator  $s^+_r$  dla każdej z wartości wierzchołkowych  $q_{ll}$ ,  $q_{lh}$ ,  $q_{hl}$ ,  $q_{hh}$  obszaru  $Q$  generuje widmo stabilne wykładniczo.

W przypadku gdy warunek 2 z **Uwagi 1** nie jest spełniony, należy oczekiwać, że część kompensatorów ze zbioru  $S^+$  będzie generowała widmo wykładniczo stabilne, a część widmo wykładniczo niestabilne. W takiej sytuacji można stabilizować rozważany system o niepewnych parametrach poprzez odpowiedni dobór macierzy  $G_1^+$  oraz  $K_1^+$ . Sformułowanie warunków doboru tych macierzy będzie przedmiotem dalszych prac autorów.

#### 4. Przykład

Dla przykładu rozważmy system paraboliczny o niepewnych parametrach, opisany równaniem stanu (3) z przestrzenią niepewnych parametrów  $Q$  zdefiniowaną przez (2) i (2a), dla której:

$$q_{ll} = [0, 0005; 0, 022],$$

$$q_{lh} = [0, 0005; 0, 032],$$

$$q_{hl} = [0, 0012; 0, 022],$$

$$q_{hh} = [0, 0012; 0, 032].$$

Założmy, że chcemy zbudować dla rozważanego systemu kompensator dyskretny zapewniający kompensację pierwszej wartości własnej układu w całym obszarze niepewnych parametrów  $Q$ . Załóżmy, że okres próbkowania podczas działania kompensatora dyskretnego jest równy 1 s.

Widmo systemu przedziałowego po dyskretyzacji jest widmem przedziałowym, którego wierzchołki są określone następująco:

$$\Lambda^+_{ll} = \{0,9782, 0,9734, 0,9591, 0,9357, 0,9040, 0,8647, 0,8190 \dots\},$$

$$\Lambda^+_{lh} = \{0,9685, 0,9637, 0,9496, 0,9264, 0,8950, 0,8561, 0,8109 \dots\},$$

$$\Lambda^+_{hl} = \{0,9782, 0,9667, 0,9330, 0,8793, 0,8094, 0,7275, 0,6387 \dots\},$$

$$\Lambda^+_{hh} = \{0,9685, 0,9571, 0,9237, 0,8706, 0,8013, 0,7203, 0,6323 \dots\}.$$

Z postaci powyższych systemów wierzchołkowych widać, że współczynnik tłumienia układu zamkniętego  $\eta^+$  powinien być mniejszy od 0,9685, gdyż taki jest najmniejszy współczynnik tłumienia samego obiektu, bez kompensacji. Ustalmy wartość  $\eta^+ = 0,96$ . Dalej założmy, że wymiar wykładniczo niestabilnej części systemu opisanej przez macierze  $A_1^+, B_1^+, C_1^+$  jest równy 1, a wymiar części skończenie wymiarowej wykładniczo stabilnej opisanej przez macierze  $A_2^+, B_2^+, C_2^+$  jest równy 2. Wtedy pary macierzy  $(G_1^+, K_1^+)$ , wyznaczone zgodnie z warunkiem (23) dla każdego z kompensatorów wierzchołkowych  $s^+$  oraz macierze stanu  $A^+_k$  kompensatorów wierzchołkowych, wyznaczone zgodnie z (21) są podane w tabeli 1.

**Tabela 1**  
Kompensatory wierzchołkowe dla rozważanego systemu

Kompensator	Macierz $A^+_k$	$G_1^+ = \frac{A_1^+(q)}{C_1^+}$	$K_1^+ = -\frac{A_1^+(q)}{B_1^+(q)}$ Macierz $B^+_k$
$s^+_{ll}$	$\begin{bmatrix} -0,9685 & 0 & 1,3663 \\ -1,3531 & 0,9637 & 0 \\ -1,3041 & 0 & 0,9496 \end{bmatrix}$	0,9618	$\begin{bmatrix} -12,8575 \\ -12,8575 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix}$
$s^+_{lh}$	$\begin{bmatrix} -0,9685 & 0 & 1,3663 \\ -1,3531 & 0,9637 & 0 \\ -1,3041 & 0 & 0,9496 \end{bmatrix}$	0,9523	$\begin{bmatrix} -12,7931 \\ -12,7931 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix}$
$s^+_{hl}$	$\begin{bmatrix} -0,9782 & 0 & 1,3801 \\ -1,3620 & 0,9667 & 0 \\ -1,2993 & 0 & 0,9330 \end{bmatrix}$	0,9618	$\begin{bmatrix} -12,8575 \\ -12,8575 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix}$
$s^+_{hh}$	$\begin{bmatrix} -0,9685 & 0 & 1,3663 \\ -1,3484 & 0,9571 & 0 \\ -1,2864 & 0 & 0,9237 \end{bmatrix}$	0,9523	$\begin{bmatrix} -12,7931 \\ -12,7931 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix}$

Następnie dla każdego z kompensatorów wierzchołkowych wyznaczonych powyżej wyznaczmy współczynniki tłumienia dla czterech widm wierzchołkowych układu zamkniętego, generowanych przez ten kompensator.

**Tabela 2**  
Współczynniki tłumienia układu zamkniętego dla wszystkich kompensatorów wierzchołkowych i wszystkich systemów wierzchołkowych

Kompensator	Wierzchołek	Współczynnik tłumienia układu zamkniętego (moduł części rzeczywistej największej wartości własnej układu zamkniętego) generowany przez
$s^+_{ll}$	$q_{ll}$	0,9571
	$q_{lh}$	0,9537
	$q_{hl}$	0,9567
	$q_{hh}$	0,9571
$s^+_{lh}$	$q_{ll}$	0,9434
	$q_{lh}$	0,9537
	$q_{hl}$	0,9567
	$q_{hh}$	0,9537
$s^+_{hl}$	$q_{ll}$	0,9434
	$q_{lh}$	0,9567
	$q_{hl}$	0,9567
	$q_{hh}$	0,9567
$s^+_{hh}$	$q_{ll}$	0,9434
	$q_{lh}$	0,9537
	$q_{hl}$	0,9567
	$q_{hh}$	0,9571

Na podstawie wyników przedstawionych w tabeli 2 można stwierdzić, że w żadnym z badanych przypadków współczynnik tłumienia układu zamkniętego nie jest większy od wartości 0,9571, co stanowi wartość mniejszą od założonej wartości współczynnika tłumienia układu zamkniętego  $\eta^+ = 0,96$ . Wynika stąd, że zgodnie z uwagami 1 i 2 każdy kompensator dyskretny  $s^+$  ze zbioru  $S^+$  zbudowany na podstawie dowolnego wektora niepewnych parametrów  $q$  stabilizuje wykładniczo rozważany system o niepewnych parametrach.

## 5. Uwagi końcowe

Uwagi końcowe do pracy mogą być sformułowane następująco:

- Metoda syntezy odpornego kompensatora skończenie wymiarowego dla rozważanego systemu o niepewnych parametrach jest prosta, lecz wymaga wykonania dużej ilości obliczeń, co jednak nie stanowi większego problemu podczas użycia MATLAB-a.

- Przedstawione w pracy uwagi stanowią propozycje twierdzeń, do udowodnienia których zachęcają wyniki symulacyjne. Będzie to stanowiło przedmiot dalszych prac autorów.
- Kolejnym zagadnieniem do dalszych badań z zaprezentowanej tematyki jest podanie metody konstrukcji kompensatora odpornego w sytuacji, gdy widmo przedziałowe układu zamkniętego zawiera obszary wykładniczo niestabilne.

### Literatura

- [1] Mitkowski W.: *Stabilizacja systemów dynamicznych*. WNT 1991
- [2] Mitkowski W., Oprzędkiewicz K.: *A sample time assign for a discrete interval parabolic system with the two-dimensional uncertain parameter space*. *Systems Science*, vol. 30, no. 1, 2004, 43–50
- [3] Mitkowski W., Oprzędkiewicz K.: *Problemy sterowania pewnej klasy systemów liniowych o niepewnych parametrach*. *Półrocznik AGH w Krakowie Automatyka*, t. 9, z. 1–2, 2005, 139–153
- [4] Mitkowski W., Oprzędkiewicz K.: *Odporny układ regulacji dla pewnej klasy systemów liniowych o niepewnych parametrach*. *Inżynieria wiedzy i systemy ekspertowe. T. 1* pod red. Adama Grzechy. Wrocław: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 2006 – Książka zawiera teksty prac przedstawionych na VI Krajowej Konferencji Naukowej „Inżynieria Wiedzy i Systemy Ekspertowe” (Wrocław, 21–23 czerwca 2006 roku), 203–212
- [5] Oprzędkiewicz K.: *The interval parabolic system*. *Archives of Control Sciences*, vol. 13, no. 4, 2003, 415–430
- [6] Oprzędkiewicz K.: *A controllability problem for a class of uncertain – parameters linear dynamic systems*. *Archives of Control Sciences*, vol. 14, no. 1, 2004, 85–100
- [7] Oprzędkiewicz K.: *A controllability problem for a class of uncertain – parameters discrete-time linear dynamic systems*. *Archives of Control Sciences*, vol. 14, no. 2, 2004, 161–177
- [8] Oprzędkiewicz K.: *An observability problem for a class of uncertain-parameter linear dynamic systems*. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, vol. 15, no. 3, 2005, 331–338
- [9] Oprzędkiewicz K.: *Stabilizowalność i wykrywalność pewnej klasy systemów parabolicznych o niepewnych parametrach*. *KKA 2005 : XV Krajowa Konferencja Automatyki* : [Warszawa 27–30 czerwca 2005]. T. 1 / red. Zdzisław Bubnicki, Roman Kulikowski, Janusz Kacprzyk. Warszawa: Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk, 2005 205–208

