

Andrzej Romanowski*, Krzysztof Grudziń*

Probabilistyczne algorytmy estymacji parametrów wybranych procesów przemysłowych

1. Wstęp

Ze względu na zastosowanie tomografii procesowej jako narzędzia pomocnego w badaniu lub sterowaniu procesami przemysłowymi, wyniki pomiarów, jakie otrzymuje się przy jej użyciu, nastawione są zwykle na szybkość ich uzyskiwania (dostosowaną do dynamiki danego procesu) i ogólną charakterystykę samej dynamiki procesu. Nie są one natomiast w pierwszym rzędzie nastawione na bezwzględną wierność czy ścisłość pod względem formalnym. Ukierunkowane są one raczej na przybliżenie inżynierskie niż matematyczną precyzję. Z drugiej strony jednak od tomografii stosowanej w medycynie wymaga się, aby informacja o stanie pacjenta w formie wizualizacji jego organów wewnętrznych była jak najdokładniejsza i właśnie to jest jej podstawową zaletą i przewagą nad innymi metodami w procesie diagnostycznym.

Z powodu tej zwyczajowej, pochodzącej z medycyny, roli tomografii jako techniki dostarczającej obrazów, także w zastosowaniach przemysłowych zaadoptowano ten schemat postępowania, czyli funkcję pomiarową tomografii sprowadzono do tworzenia obrazów. Jednak jak się można spodziewać, często tam, gdzie mamy do czynienia z kontrolą procesów przemysłowych, ważniejsza od samej wizualizacji stanu procesu bywa ilościowa informacja o procesie, np. w formie danych liczbowych określających jego krytyczne parametry. Stąd też z jednej strony kompromis pomiędzy dążeniem do precyzji, zastąpiony poprzez uproszczenia prowadzące do szybkich wyników, oraz z drugiej strony usilne dążenie do tworzenia obrazów nawet tam, gdzie nie są one wymagane, stworzyły sytuację, w której istnieją dwa pola działań, w których nasuwa się możliwość dokonania postępu. Pierwszym z nich może być opracowanie algorytmów przetwarzania pomiarowych danych tomograficznych, które pozwolą na precyzyjne określenie stanu badanych zjawisk. Algorytmy spełniające powyższe założenie zbudowane mogą być na twierdzeniu Bayesa oraz metodach Monte Carlo i zostały przedstawione w niniejszym artykule. Drugie pole działań zagospodarowane przez autorów tego artykułu zakłada rozwinięcie takich technik przetwarzania danych, aby informacja otrzymywana dzięki tomografii procesowej była dla kontroli i ste-

* Katedra Informatyki Stosowanej, Politechnika Łódzka

rowania procesem w jak najodpowiedniejszej postaci. Opisane poniżej prace przedstawiają algorytmy generujące jako dane wyjściowe wartości parametrów określające kluczowe cechy procesów przemysłowych.

2. Przetwarzanie tomograficznych danych pomiarowych

2.1. Tomografia ECT

Autorzy wykorzystali w przedstawionych badaniach odmianę elektrycznej tomografii procesowej, a mianowicie pojemnościową tomografię procesową ECT (*Electrical Capacitance Tomography*). ECT jest powszechnie znaną techniką pomiarową i była już wielokrotnie opisywana, np. w [1, 2, 3]. Dane pomiarowe w ECT stanowi wektor mierzonych pojemności, którego długość zależna jest od liczby elektrod w użytych czujniku. Dla czujnika o N elektrodach wektor ten posiada $N(N-1)/2$ elementów (niezależnych pomiarów), przypadających na jedną ramkę pomiarową, z której otrzymywany jest obraz tomograficzny (przy użyciu algorytmów rekonstrukcji obrazu). W przeprowadzonych badaniach używano tomografów umożliwiających zbieranie w jednej płaszczyźnie pomiarowej od 30 do 200 ramek na sekundę, przy czym typowe wyniki przedstawione są dla prędkości akwizycji równej 50 ramek na sekundę.

2.2. Przetwarzanie danych pomiarowych

Metody przetwarzania danych pomiarowych z tomografu zwykle zakładają następujące etapy [4]:

1. pomiar,
2. rekonstrukcję obrazu (w tym etapie zawierają się takie fazy jak rozwiązanie problemu prostego i odwrotnego [5, 6],
3. klasyczne metody przetwarzania obrazów tomograficznych (np.: metody korelacyjne [2, 7].

W literaturze odnotowano także następujące możliwe scenariusze:

- bezpośrednie wyświetlanie lub przetwarzanie „surowych” (*raw data*) danych pomiarowych [8],
- parametryzacja procesów [9, 10].

Ze wspomnianych powyżej metod praktycznie wszystkie, poza obróbką nieprzetworzonych danych pomiarowych, wymagają rozwiązania dwóch podstawowych zagadnień w tomografii – problemu prostego i odwrotnego. O ile to pierwsze zagadnienie można rozwiązać z akceptowalną dokładnością przy użyciu powszechnie stosowanych metod numerycznych takich, jak np. metoda elementów skończonych (MES), to rozwiązanie problemu odwrotnego powoduje często wiele trudnych do oszacowania błędów, wynikających z zastosowanego aparatu matematycznego uproszczającego rozwiązanie [5, 6]. Najbliższe matematycznej ścisłości są próby parametryzacji problemu [9, 10]. Natomiast autorzy zapro-

ponowali jeszcze dalej idące rozwiązanie – po pierwsze zbudowany zostaje model badanego zjawiska, a po drugie zaimplementowany jest algorytm estymujący parametry powstałego modelu w oparciu o probabilistyczne metody statystyczne, które rozwiązują zagadnienie odwrotne w tomografii w sposób z definicji poprawny.

3. Modele geometryczne

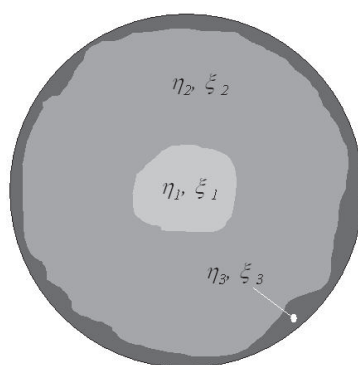
Zaproponowane modelowanie geometryczne procesu przemysłowego polega na podziale przekroju poprzecznego na regiony, które odzwierciedlają faktyczne zjawiska w procesie przemysłowym. W przeprowadzonych przez autorów badaniach zaproponowane zostały modele geometryczne dla transportu pneumatycznego oraz dla przepływu grawitacyjnego materiałów sypkich.

3.1. Geometryczny model podziału stref przepływu grawitacyjnego

Opracowany model przepływu grawitacyjnego w zbiorniku na materiał sypki polega na podziale przekroju poprzecznego zbiornika na trzy strefy (rys. 1).

- obszar komina w centrum przekroju poprzecznego (1),
- obszar pośredni pomiędzy wyżej wymienionymi obszarami (2),
- obszar sąsiadujący ze ścianą zbiornika (3).

Każdy z nich jest określony za pomocą dwóch parametrów: rozmiaru η oraz koncentracji materiału ξ . Stan przepływu grawitacyjnego został więc opisany za pomocą sześciu parametrów $\chi = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3\}$. Wyznaczenie tego zbioru parametrów z danych pomiarowych pozwala określić stan procesu przemysłowego bez konieczności przeprowadzania rekonstrukcji i przetwarzania obrazów tomograficznych. W przypadku obszaru przekroju poprzecznego należącego do tzw. komina przepływu (strefa 1) może on zostać opisany przez promień koła o przybliżonym do komina kształcie. Pole tego koła wyznaczone jest przez parametr rozmiaru η_1 , natomiast koncentracja komina przepływu przez ξ_1 .



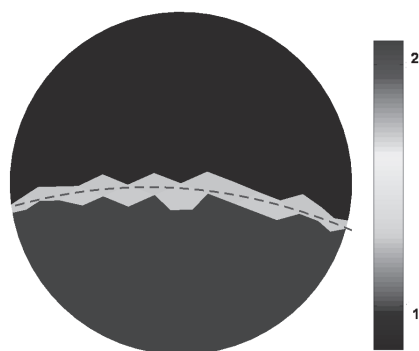
Rys. 1. Model geometryczny przepływu grawitacyjnego ze wskazanymi parametrami opisującymi charakter procesu dla trzech wyodrębnionych obszarów pola przekroju w płaszczyźnie pomiarowej

W celu implementacji zaproponowanego modelu w metodzie obliczeniowej opartej na teorii Bayesa przedstawionej w rozdziale 5, należy wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzeń sprzyjających. Zbiór parametrów χ zostaje przekształcony w rozkład przenikalności w postaci zbioru pikseli, dla którego obliczane są pojemności między elektrodowe za pomocą np. metody elementów skończonych.

Więcej szczegółów na temat statystyki Bayesa w ECT oraz modelowania geometrycznego można znaleźć w [11].

3.2. Geometryczny model przepływu pneumatycznego w sekcji poziomej

W przypadku modelu wysokiego poziomu, zastosowanego do przepływu pneumatycznego w sekcji poziomej rurociągu, do określenia parametrów kontrolnych przepływu autorzy posłużyli się wielomianem drugiego stopnia $P(x) = c + bx + ax^2$ (rys. 2). Estymacja parametrów krzywej $\eta = \{a, b, c\}$ pozwala na podział obszaru przekroju poprzecznego na pięć regionów $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5\}$. Każdy z nich posiada dwie charakterystyczne cechy rozmiar oraz koncentrację materiału.



Rys. 2. Model geometryczny przepływu pneumatycznego w sekcji poziomej rurociągu z zaznaczonym linią przerywaną wykresem funkcji kwadratowej, na której opiera się model. Skala przedstawia zakres przenikalności elektrycznej

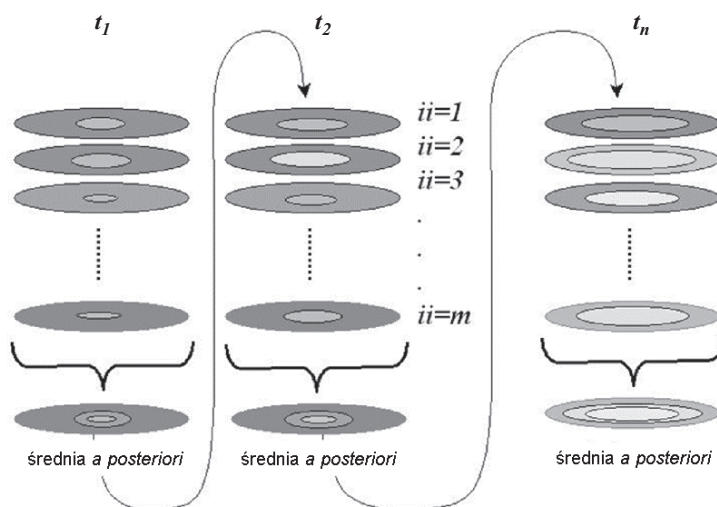
4. Algorytm estymacji parametrów geometrycznego modelu podziału stref przepływu grawitacyjnego

Na podstawie modelowania geometrycznego wysokiego poziomu opisanego w podrozdziale 3.1, opracowano algorytm numeryczny pozwalający na estymację zbioru szukanych parametrów. Algorytm opiera się na statystyce Bayesa oraz metodach Monte Carlo [12, 13]. Zaimplementowana wiedza *a priori* opisuje informację na temat powiązań czasowych pomiędzy kolejnymi ramkami pomiarowymi, a w konsekwencji pomiędzy wartościami parametrów modelu geometrycznego w kolejnych chwilach czasowych.

Procedura działania algorytmu jest następująca:

1. W pierwszym kroku algorytmu dla pierwszej ramki $k=1$ proponowany jest dowolny zestaw parametrów $\eta^{t_1} = \{\xi_1^{t_1}, \varepsilon_1^{t_1}, \xi_2^{t_1}, \varepsilon_2^{t_1}, \xi_3^{t_1}\}$. Dla kolejnych ramek $k > 1$ początkowy zestaw parametrów η^{t_k} jest równy wyznaczonemu zbiorowi parametrów dla ramki $k-1 - \eta^{t_{k-1}}$.
2. Wygenerowany rozkład parametrów jest porównywany z pomiarami pojemności poprzez rozwiązanie problemu prostego, tworząc tzw. czynnik energii. Dodatkowo dla $k > 1$ aktualny zbiór parametrów η^{t_k} porównany jest z poprzednim zaakceptowanym zbiorem $\eta^{t_{k-1}}$ i na podstawie tych porównań aktualny zbiór jest losowo akceptowany lub odrzucany z określonym prawdopodobieństwem.
3. Następnie brane są pod uwagę tylko wszystkie te zbiory parametrów, które były zaakceptowane. Wszystkie zaakceptowane rozkłady zbioru parametrów są uśredniane.
4. W kolejnym kroku $k+1$ średnia parametrów dla chwili czasowej k jest podawana jako wstępny symulowany rozkład dla następnej ramki pomiarowej w następnej chwili czasowej $k+1$.

W ten sposób algorytm przebiega w każdej kolejnej chwili, co zostało zilustrowane na rysunku 3.



Rys. 3. Schemat działania algorytmu estymacji parametrów geometrycznego modelu podziału stref przepływu grawitacyjnego. Kolejne chwile czasowe są opisane jako t z indeksami t_k , gdzie k oznacza numer ramki w rozważanej sekwencji pomiarowej, a ii oznacza numer iteracji algorytmu

Dzięki takiemu rozwiązaniu zachowana zostaje zależność czasowa pomiędzy bieżącą chwilą czasową i poprzedzającym ją punktem pomiarowym. W ten sposób ustanowiony zostaje łańcuch Markowa. Więcej szczegółów na temat symulacji i podstaw tego algorytmu można znaleźć w [14].

5. Algorytm estymacji parametrów geometrycznego modelu przepływu pneumatycznego w sekcji poziomej

Podobnie jak dla przepływu grawitacyjnego parametryzacja oparta na opracowanym modelu przepływu w sekcji poziomej rurociągu opisana w podrozdziale 3.2 pozwoliła zaimplementować metodę szacowania wybranych parametrów z wykorzystaniem teorii Bayesa i probabilistycznych metodach obliczeniowych Monte Carlo. W odróżnieniu od estymowania parametrów modelu przepływu grawitacyjnego, w tym przypadku mamy do czynienia z bardzo dynamicznym procesem. Ta cecha pociąga za sobą zupełnie inną charakterystykę zmian kluczowych parametrów w domenie czasu (podobieństwo pomiędzy kolejnymi chwilami czasu w tym przypadku musi być zdecydowanie większe). Jest to też dodatkowym uzasadnieniem dla zastosowania modelowania czasowego wysokiego poziomu.

Natomiast, jeśli chodzi o samo działanie algorytmu, to w tym przypadku kolejną różnicą jest to, że wszystkie ramki były przetwarzane jednocześnie, a nie jedna po drugiej, jak w poprzednim przykładzie.

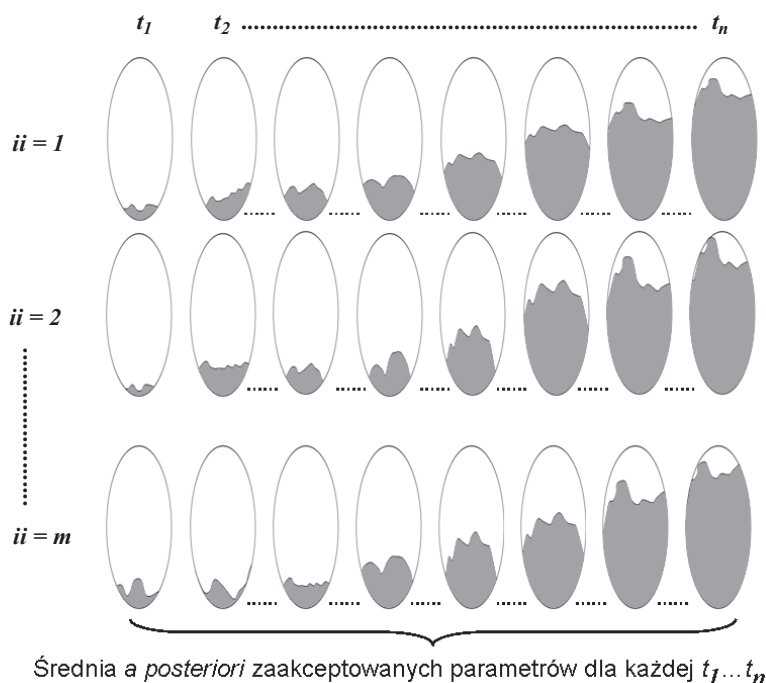
Kolejne kroki algorytmu przedstawiają się w związku z tym następująco:

1. W pierwszym kroku proponowany zostaje zestaw zbiorów parametrów η^{tk} dla wszystkich rozważanych chwil czasowych ($k = 1 \dots n$), $t_1 \dots t_n$ (rys. 4).
2. Decyzja o akceptacji lub odrzuceniu tego zestawu zbioru parametrów podejmowana zostaje w oparciu o porównanie z rozwiązaniem problemu prostego z pomiarami (czynnik energii) oraz podobieństwa pomiędzy estymowanymi parametrami w kolejnych chwilach czasowych.
3. W kolejnych krokach algorytmu podawane zostają następne wygenerowane losowo zestawy zbiorów parametrów dla wszystkich rozważanych chwil czasowych ten krok powtarzany jest m razy zgodnie z schematem na rysunku 4.
4. Na koniec następuje uśrednienie wszystkich zaakceptowanych ramek.

Estymowanymi parametrami w opisanym algorytmie były współczynniki wielomianu drugiego stopnia $P(x) = c + bx + ax^2$, dzielące przekrój poprzeczny obszaru czujnika na pięć regionów. Znajomość zbioru $\{a, b, c\}$ pozwala na wyznaczenie charakterystycznych parametrów procesu przepływu jakimi są:

- rozmiar obszaru części przekroju poprzecznego zajmowanego przez materiał stały oznaczony jako ξ ,
- indyktor wskazujący regiony (piksele) przekroju poprzecznego należące do obszaru materiału stałego oznaczony jako κ .

Dla uproszczenia obliczeń przenikalność względna przypisana obszarom zajmowanym przez materiał stały oraz powietrze jest z założenia stała w trakcie działania algorytmu. Jej wartość wynosi odpowiednio 2 dla materiału stałego i 1 dla gazu.

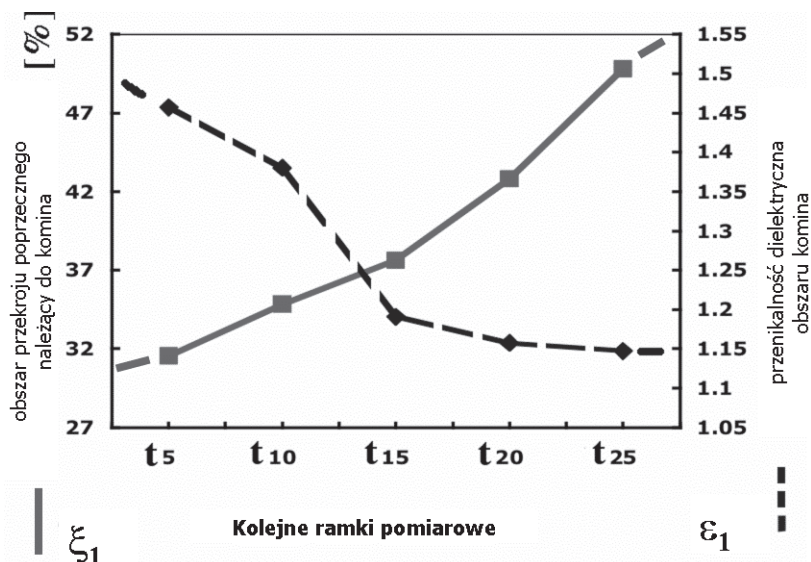


Rys. 4. Graficzna reprezentacja działania algorytmu estymacji parametrów geometrycznego modelu przepływu pneumatycznego w sekcji poziomej. Kolejne chwile czasowe są opisane jako t z indeksami t_n , gdzie n oznacza numer ramki w rozważanej sekwencji pomiarowej, a ii oznacza numer iteracji algorytmu

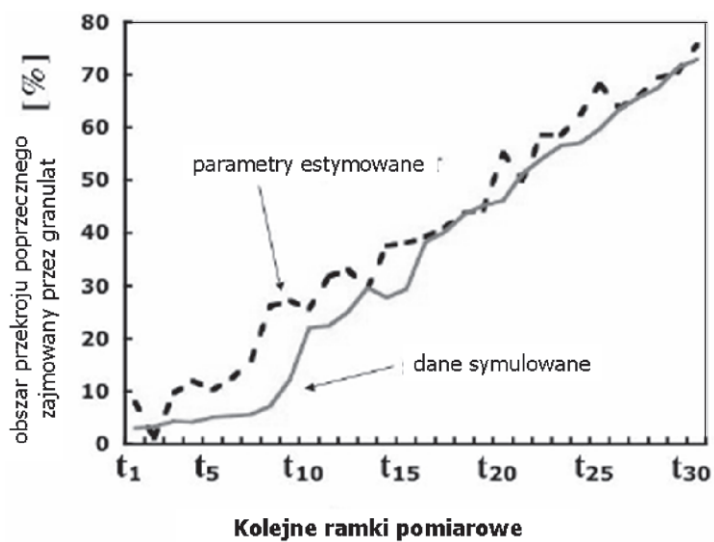
6. Bezpośrednia estymacja parametrów

Zastosowanie teorii Bayesa wraz z metodą Monte Carlo łańcuchów Markowa umożliwia bezpośrednio znalezienie charakterystycznych parametrów procesów przemysłowych bez konieczności rekonstrukcji obrazów z danych pomiarowych i ich przetworzenia. W niniejszym artykule były to parametry związane z rozmiarem i gęstością upakowania materiału komina dla przepływu grawitacyjnego oraz rozmiar przekroju poprzecznego zajętego przez materiał podczas transportu pneumatycznego.

Na rysunku 5 przedstawiony został wynik estymacji parametru rozmiaru (związanego z postępowaniem opróżniania zbiornika) oraz przenikalności dielektrycznej (związanej z gęstością upakowania granulatu) obszaru komina podczas przepływu grawitacyjnego. Na rysunku 6 pokazane zostały natomiast zmiany zajętości obszaru pomiarowego przez materiał podczas transportu pneumatycznego. Analizowane dane pochodziły z przeprowadzonej symulacji. Dokładny opis symulacji można znaleźć w [15].



Rys. 5. Wynik działania algorytmu bezpośredniej estymacji parametrów opróżniania zbiornika. Linia przerywana symbolizuje charakter zmian wielkości badanego obszaru w płaszczyźnie pomiarowej natomiast linia ciągła reprezentuje zmiany gęstości upakowania materiału

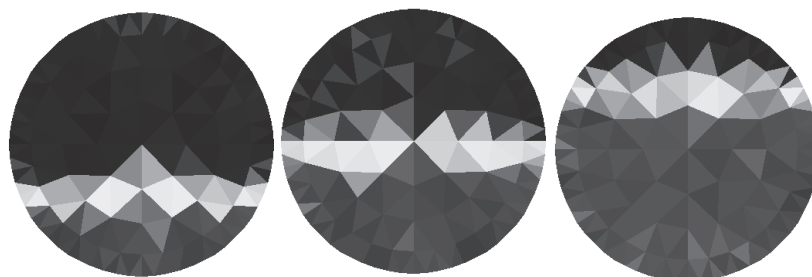


Rys. 6. Wynik działania algorytmu bezpośredniej estymacji parametrów wybranego fragmentu przepływu pneumatycznego. Symulacja (linia ciągła) pokazuje charakter zmian wielkości badanego obszaru w płaszczyźnie pomiarowej w porównaniu do wartości oszacowanych (linia przerywana) z wykorzystaniem modelowania wysokiego poziomu dla przepływu pneumatycznego

7. Tomogramy modelowania przestrzennego

Przedstawione w poprzednim rozdziale wyniki dotyczyły zastosowania teorii Bayesa przy modelowaniu wysokiego poziomu, kiedy interesuje nas tylko nieliczny zbiór charakterystycznych parametrów badanego procesu przemysłowego. Możliwe jest również zastosowanie tej techniki przy modelowaniu niskiego poziomu [9, 12], kiedy interesują nas wartości poszczególnych pikseli, na które zostaje podzielony obszar pomiarowy czujnika. W tym wypadku oprócz określenia korelacji czasowej pomiędzy poszczególnymi ramkami pomiarowymi dodatkowo należy określić podobieństwo przestrzenne między pikselami sąsiadującymi ze sobą. W wyniku zastosowania takiego podejścia możemy przedstawić graficznie wartości pikseli (jako szukanych parametrów) w formie zbliżonej do zrekonstruowanego obrazu. Na rysunku 7 zostały przedstawione przykładowe rezultaty modelowania przestrzennego niskiego poziomu przy użyciu losowego pola Markowa (*Markov random field – Mrf*) [15].

W przypadku dwuwymiarowego modelowania przestrzennego przekroju poprzecznego tomogramów istnieje możliwość określenia przedziałów pewności wyników. Można np. stwierdzić, że w danym obszarze mamy 100% pewności, że rzeczony obszar jest zajęty przez powietrze (lub materiał sypki), a pozostały pomiędzy nimi graniczny pas określa obszar, gdzie odpowiednią gradacją kolorów lub odcieni szarości możemy określić przynależność do jednego z tych obszarów z odpowiednim prawdopodobieństwem.



Rys. 7. Przykładowe rezultaty modelowania niskiego poziomu (*Mrf*) dla przepływu pneumatycznego

8. Zasoby i obliczenia numeryczne

Probabilistyczne metody numeryczne Monte Carlo, zwłaszcza te zastosowane tutaj, opierające się na dużej liczbie iteracji, wymagają zwykle znacznych nakładów obliczeniowych. Obliczenia zostały wykonane na dwuprocesorowej stacji roboczej w architekturze Power PC-Power Mac G5 2×2GHz z 512MB RAM.

Główna trudność w odpowiednim dostrojeniu implementacji algorytmu polega na wyznaczeniu długości początkowej łańcucha Markowa, gdy nie jest on jeszcze w stanie równowagi. Ten początkowy przejściowy okres nazywa się czasem stanem „rozgrzewania” lub „wypalania” (*burn-in*). Ta część obliczeń musi być z założenia bezwzględnie odrzucona.

Kolejnym istotnym elementem jest decyzja, jak wiele iteracji należy wykonać, aby z jednej strony wyniki stanowiły próbkę reprezentatywną wystarczającą do wiarygodnej estymacji, a z drugiej strony – by ograniczyć do minimum czas niezbędnych, acz długotrwałych obliczeń. Na zaprezentowane w tym artykule wyniki zwykle składało się około 1200 iteracji, przy czym pierwsze 200 było odrzucanych. Najdłuższy czas obliczeń zanotowany został dla modelowania przestrzennego, gdzie zestawem niezależnie szacowanych wartości parametrów było 176 pikseli. Głównym powodem dużego zaabsorbowania zasobów obliczeniowych jest w tym przypadku rozwiązywanie problemu prostego dokonywane w każdej iteracji.

9. Wnioski

Przedstawione wyniki jednoznacznie pokazują skuteczność zastosowania zaawansowanych metod statystycznych do przetwarzania danych tomograficznych. Przewaga zastosowanych narzędzi nad standardowymi metodami stosowanymi w tomografii polega na ich matematycznej poprawności i braku uproszczenia rozwiązywania problemu odwrotnego w tomografii procesowej. W razie potrzeby można także szacować przy użyciu przedstawionych algorytmów probabilistycznych przedziały pewności wyników, co nie jest możliwe przy zastosowaniu klasycznych metod rekonstrukcji obrazów. Dzięki zaimplementowanym metodom istnieje możliwość zarówno bezpośredniej estymacji wartości parametrów procesów przemysłowych, jak i graficznego ich przedstawienia w postaci wykresów oraz w formie zbliżonej do rekonstrukcji obrazu.

Jakkolwiek przedstawione metody są uzasadnione z teoretycznego punktu widzenia, to jednak nie wolno zapominać, że wymagają one nadal dużych zasobów obliczeniowych i są czasochłonne. W związku z tym nasuwają się wnioski co do pewnych modyfikacji tych algorytmów w przyszłości. Podstawową kwestią jest rozważenie linearyzacji rozwiązania problemu prostego, który musi być rozwiązywany w każdej iteracji algorytmów. Inne pomysły do zaimplementowania w dalszych pracach dotyczą optymalizacji algorytmu pod kątem konkretnej platformy włączając w to obliczenia równoległe.

Podziękowania

Autorzy dziękują brytyjskiej organizacji EPSRC za możliwość wykonania badań w ramach grantu nr. Ref. GR/R22148/01 „Spatial and temporal modelling for ECT”. Prace prowadzone przez Andrzeja Romanowskiego są także współfinansowane ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego oraz Budżetu Państwa w ramach programu Mechanizm WIDDOK (numer umowy Z/2.10/II/2.6/04/05/U/2/06).

Literatura

- [1] Williams R.A., Beck M.S. (ed): *Process Tomography: Principles, Techniques and Applications*. Oxford, Butterworth-Heinemann, 1995, 581
- [2] Plaskowski A., Beck MS., Thorn R., Dyakowski T.: *Imaging Industrial Flows*. Institute of Physics Publishing Ltd, 1995, 214

- [3] Dyakowski T., Edwards R.B., Xie C.G., Williams R.A.: *Application of capacitance tomography to gas-flow solids*. Chem Eng Sci, 52, 13, 1997, 2099–2110
- [4] Romanowski A., Grudzien K., Williams R.A., West R.: *A review of data analysis methods for electrical industrial process tomography applications*. 4th Congress on Industrial Process Tomography, Japan, 2005, 916–921
- [5] Yang W.Q., Peng L.: *Image reconstruction algorithms for electrical capacitance tomography*. Meas. Sci. Technol. 14, 2003, R1–R13
- [6] Lionheart W.R.B.: *Review: Developments in EIT reconstruction algorithms: pitfalls, challenges and recent developments*. Physiol. Meas., 25, 2004, 125–142
- [7] Mosorov V., Sankowski D., Mazurkiewicz Ł., Dyakowski T.: *The application of electrical capacitance tomography for solids mass flow measurements*. Measurement Science and Technology, 12, 2002, 1810–1814
- [8] Jeanmeure L.F.C., Dyakowski T., Zimmerman W.B.J., Wayne C.: *Direct flow-pattern identification using electrical capacitance tomography*. Experimental Thermal and Fluid Science, 26, 2002, 763–773
- [9] West R.M., Aykroyd R.G., Meng S., Williams R.A.: *Markov Chain Monte Carlo Techniques and Spatial-Temporal Modelling for Medical EIT*. Physiological Measurements, 25, 2004, 181–194
- [10] Isaksen Ø., Nordtvedt J.E.: *A new reconstruction algorithm for process tomography*. Meas. Sci. Technol., Vol. 4, 1993, 1464–75
- [11] Romanowski A., Grudzien K., Aykroyd R., Williams R., West R., Meng S.: *Introduction to the Bayesian approach as a recently developed methodology for tomographic data analysis*. 3rd International Symposium on Process Tomography in Poland, Lodz, 2004, 134–138
- [12] Winkler G.: *Image Analysis, Random Fields and Markov Chain Monte Carlo: A Mathematical Introduction*. (2nd Ed.). Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2003
- [13] Kaipio J.P., Kolehmainen V., Somersalo E., Vauhkonen M.: *Statistical Inversion and Monte Carlo Sampling Methods in Electrical Impedance Tomography*. Inverse Problems, 16, 2000, 1487–1522
- [14] Grudzien K., Romanowski A., Williams R.A.: *Application of a Bayesian approach to the tomographic analysis of hopper flow*. Volume 22, Issue 4, 2005, 246–253
- [15] Romanowski A., Grudzień K., Aykroyd R.G, Sankowski D.: *Application of the Bayesian/MCMC approach to investigation of the phenomena present in multiphase processes*. Bulletin DE LA SOCIETE DES SCIENCES ET DES LETTERS DE ŁÓDŹ, Vol. LIV, 2004, 31–44

