



Andrzej ROGOWSKI

GRANICZNE WŁASNOŚCI PROCESÓW MARKOWA A SYMULACJA

Streszczenie

W pracy przeanalizowano własności prostych jednorodnych stacjonarnych ergodycznych procesów Markowa o skończonej przestrzeni stanów dla granicznych wartości intensywności przejść. Zwrócono uwagę na pułapki interpretacyjne uzyskanych prawdopodobieństw granicznych i wyników symulacji takich systemów.

WSTĘP

W wielu dziedzinach nauki i techniki, np. w teorii niezawodności i bezpieczeństwa, wykorzystuje się stacjonarne jednorodne ergodyczne procesy Markowa ze skończoną przestrzenią stanów¹. Przy czym schemat badań (często stosowany w pracach doktorskich) jest następujący:

- a) analiza badanego systemu, zdefiniowanie przestrzeni stanów i budowa grafu,
- b) wyznaczenie granicznych prawdopodobieństw przebywania systemu w poszczególnych stanach,
- c) budowa modelu symulacyjnego i przeprowadzenie eksperymentów symulacyjnych zakończonych stwierdzeniem, że „wyniki symulacji potwierdzają obliczenia analityczne”,
- d) „manipulowanie” intensywnościami przejść tak, by uzyskać możliwie małe prawdopodobieństwo przebywania systemu w stanach niepożądanych i duży czas T_{MTF} (Mean Time to Failure) – średni czas przebywania w stanach pożądanym (średni czas do wystąpienia awarii, średni czas poprawnej pracy systemu) co ma dowodzić słuszności przyjętych założeń i skuteczności proponowanych rozwiązań.

Przeanalizujmy tok takiego postępowania. Dwa pierwsze punkty nie budzą raczej wątpliwości. Zwróćmy tylko uwagę, że po zbudowaniu grafu systemu, graf ten może „żyć własnym życiem” w tym sensie, że może być grafem wielu (praktycznie nieskończenie wielu) systemów. Graf analizować można w oderwaniu od fizycznego systemu – jako model czysto abstrakcyjny. Jest to niewątpliwą zaletą ale jednocześnie rodzi wiele pułapek zastawionych na niedoświadczonego badacza. Wątpliwości narzucają się przy pkt. c). Modele te wyglądają na ogół w sposób następujący: wykorzystując dostępne programy symulacyjne „odtwarza się” graf systemu i dla z góry założonych **wszystkich** intensywności przejść symuluje się pracę systemu wyznaczając prawdopodobieństwa przebywania w poszczególnych stanach i czasy przebywania w stanie awarii i do wystąpienia awarii (co jest równoznaczne z czasem

¹ Nie interesuje nas tutaj dopuszczalność stosowania tak silnych założeń.

poprawnej pracy systemu). Jeżeli dysponujemy rozwiązaniami układu równań Kołmogorowa i prawdopodobieństwami granicznymi – a to wynika ze stwierdzenia „wyniki symulacji potwierdzają obliczenia analityczne”) – to do czego potrzebny nam jest taki model symulacyjny i co ma oznaczać to stwierdzenie – chyba tylko to, że model został poprawnie zbudowany. Budowa modeli symulacyjnych ma sens, gdy nie jesteśmy w stanie wyznaczyć rozwiązań analitycznych, nie możemy dokonać analizy rozwiązań ze względu na zbyt dużą liczbę zmiennych (informacji), gdy posiadamy tylko częściowe informacje i chcemy aproksymować wartości nieznane. W przypadku d) jest chyba najwięcej kontrowersji „interpretacyjnych” związanych z oderwaniem analizy formalnej grafu, prawdopodobieństw granicznych i czasu T_{MTF} od konkretnego rzeczywistego (fizycznego) systemu i niepełnym zrozumieniu istoty prawdopodobieństwa. Dość często przyjmuje się, że z faktu iż prawdopodobieństwo przebywania w stanie krytycznym jest równe 0, wynika brak występowania w systemie awarii i przyjmowanie, że system jest w 100% bezpieczny. Jest to poniekąd pokłosie klasycznej definicji prawdopodobieństwa, w której zachodziła równoważność zdań: „prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia jest A równe zero” i „zdarzenie A jest zdarzeniem niemożliwym”. Jak w takim razie zrozumieć (zinterpretować) odnowę z zerowym czasem odnowy stanowiącym jeden z podstawowych modeli teorii niezawodności [1, 2, 3, 4]. Przecież czas przebywania w stanie awarii jest równy zero ale liczba awarii w odcinku czasu $(0,t)$ rośnie do nieskończoności wraz z t (dla uproszczenia załóżmy, że odnawiane elementy są jednorodne) i nie ma znaczenia fakt, że jednocześnie prawdopodobieństwo wystąpienia dokładnie k awarii ($k = 0, 1, \dots$) maleje do zera wraz z t , bo jednocześnie prawdopodobieństwo wystąpienia awarii (co najmniej jednej) rośnie wraz z t do jedności. Dopiero gdy uwzględnimy skończony niezerowy czas odnowy (co możemy nazwać czasem usuwania skutków katastrofy) prawdopodobieństwo przebywania w stanie krytycznym (katastrofy) będzie niezerowe – ale dalej liczba awarii w odcinku czasu $(0,t)$ rośnie do nieskończoności wraz z t . Model odnowy z zerowym czasem odnowy (jako model graniczny) możemy zrealizować zwiększając do nieskończoności intensywność powrotu ze stanu katastroficznego, więc zawsze możemy „pokazać”, że uzyskaliśmy system, w którym współczynnik gotowości B (prawdopodobieństwo przebywania w stanach „bezpiecznych”) jest dowolnie bliskie 1 (ale nie zawsze da się „uzyskać” dowolnie duży czas T_{MTF}). Podobnie zmniejszając intensywność powrotu ze stanu katastroficznego do zera możemy uzyskać system o dowolnie małym współczynniku gotowości (ale nie zawsze da się „uzyskać” dowolnie mały czas T_{MTF}). Ale wtedy uzyskujemy (jako model graniczny) system nienaprawialny (brak odnowy). W systemach wielostanowych, poprzez dobór intensywności, możemy dowolnie zwiększyć lub zmniejszyć prawdopodobieństwo przebywania w wybranym stanie. Podstawowym pozostanie jednak pytanie, czy przy takim doborze intensywności, system będzie wypełniał swoje funkcje (i nie chodzi tutaj o sytuację, gdy system uległ losowej awarii), czy model odpowiada systemowi rzeczywistemu, czy nie doprowadzimy sytuacji do absurdu. Np. zamykając rogatki przejazdu kolejowego na stałe lub nie usuwając skutków katastrofy na przejeździe kolejowym (staje się on nieprzejezdny) „uzyskujemy” system bardzo bezpieczny, ale czy mamy jeszcze przejazd kolejowy. Nie da się więc dokonać sensownej analizy modelu abstrakcyjnego (grafu) bez odniesienia do rzeczywistego badanego systemu, nie da się zinterpretować prawdopodobieństw B , $P_k = 1 - B$ i czasu T_{MTF} bez analizy tego, co było przyczyną takiego a nie innego ukształtowania się tych wielkości.

W dalszej części przeanalizujemy zachowanie się prostych systemów w zależności od doboru granicznych intensywności wskazując pułapki interpretacyjne uzyskanych wyników.

1. ZAŁOŻENIA

Zakładamy, że rozpatrywać będziemy jednorodnie stacjonarne ergodyczne procesy Markowa o skończonej przestrzeni stanów. W przestrzeni stanów wyróżnione zostały dwa stany: stan podstawowy „0” i stan katastrofy (krytyczny, awarii) „k” – w systemie jest tylko jeden stan katastrofy. Ze stanu „k” system powraca tylko do stanu podstawowego „0”. System w pełni opisany będzie grafem, przy czym λ_i intensywność przejścia do stanu i (zgodnie z rysunkiem grafu), μ_i intensywność powrotu ze stanu i (zgodnie z rysunkiem grafu). Będziemy również zakładali, że w chwili $t = 0$ system znajduje się w stanie „0” (dla prawdopodobieństw granicznych nie ma to przy naszych założeniach znaczenia).

Prawdopodobieństwa graniczne $P_k, P_0, P_1, \dots, P_n$ wyznaczmy z równań Kołmogorowa postaci [4] („suma wejść równa się sumie wyjść”):

$$\sum_{i \in E_j^+} P_j \lambda_i = \sum_{i \in E_j^-} P_i \mu_i, \quad j = k, 0, 1, \dots, n \quad (1)$$

gdzie E_j^+ zbiór stanów do których możliwe jest przejście ze stanu j , E_j^- zbiór stanów z których możliwy jest powrót do stanu j i równania:

$$\sum_{i=k,0,1,\dots,n} P_i = 1 \quad (2)$$

Prawdopodobieństwo nieprzebywania w stanie katastroficznym nazywane również współczynnikiem gotowości systemu [1, 4]:

$$B = 1 - P_k \quad (3)$$

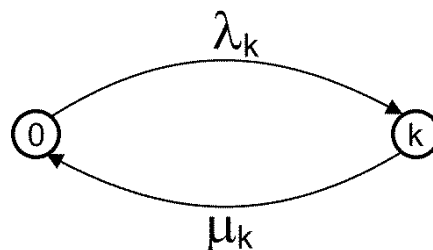
gdzie P_k – prawdopodobieństwo przebywania w stanie katastrofy (krytycznym, awarii).

T_{MTF} (*Mean Time to Failure*) – średni czas do katastrofy (awarii; średni czas poprawnej pracy systemu) [4]:

$$T_{MTF} = \frac{B}{(1 - B)\mu_k} \quad (4)$$

2. WYNIKI ANALIZY

2.1. Model I



Rys. 1. Graf procesu dwustanowego z jednym stanem krytycznym

Równania Kołmogorowa:

$$P_0 \lambda_k = P_k \mu_k$$

$$P_k \mu_k = P_0 \lambda_k$$

Równanie dodatkowe:

$$P_0 + P_k = 1$$

Rozwiązując równania Kołmogorowa i wyznaczając B i T_{MTF} otrzymujemy:

$$P_0 = \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k} = \frac{1}{\frac{\lambda_k}{\mu_k} + 1}$$

$$P_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \mu_k} = \frac{\frac{\lambda_k}{\mu_k}}{\frac{\lambda_k}{\mu_k} + 1}$$

$$B = \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k} = \frac{1}{\frac{\lambda_k}{\mu_k} + 1}$$

$$T_{MTF} = \frac{1}{\lambda_k}$$

Graf ten odpowiada modelowi z odnową z niezerowym czasem odnowy (szerzej modelowi Palma [2, 3]).

Zauważmy, że:

- a) przy ustalonym λ_k jeśli $\mu_k \rightarrow +\infty$, to $B = P_0 \rightarrow 1$, $P_k \rightarrow 0$ a $T_{MTF} = \frac{1}{\lambda_k}$ jest stałe.

Oznacza to, że zmniejszając dostatecznie czas usunięcia skutków katastrofy (powrotu do stanu podstawowego „0”) możemy uczynić współczynnik bezpieczeństwa dowolnie bliskim 1 (uczynić system dowolnie „bezpiecznym”) ale to nie oznacza, że prawdopodobieństwo wystąpienia katastrofy w odcinku $(0,t)$ uległo zmniejszeniu. Wzrasta natomiast prawdopodobieństwo wystąpienia więcej niż jednej katastrofy. Rozpatrywany system jest klasycznym modelem odnowy z niezerowym czasem odnowy (musimy więc uwzględnić zarówno czas poprawnej pracy jak i czas potrzebny „na naprawę”). Jeśli $\mu_k \rightarrow +\infty$, tzn. czas potrzebny na naprawę dąży do 0, to uzyskujemy jako model graniczny model odnowy z zerowym czasem odnowy (uwzględniamy tylko czas poprawnej pracy). Czas przebywania w stanie katastrofy dąży do zera, stan „0” można w pewnym sensie uważać za stan pochłaniający (graniczny; ze względu na to iż $P_0 = 1$), po przejściu do stanu „k” system „natychmiast” wraca do stanu „0”;

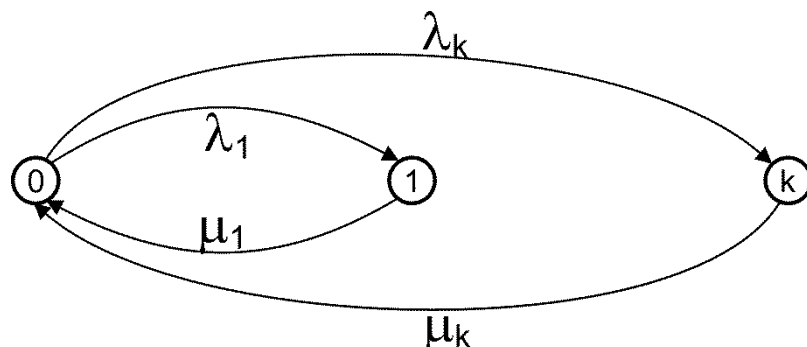
- b) przy ustalonym λ_k jeśli $\mu_k \rightarrow 0$, to $B = P_0 \rightarrow 0$, $P_k \rightarrow 1$ a $T_{MTF} = \frac{1}{\lambda_k}$ jest stałe. Oznacza to, że zwiększając dostatecznie czas usunięcia skutków katastrofy (powrotu do stanu podstawowego „0”) możemy uczynić współczynnik bezpieczeństwa dowolnie bliskim 0 (uczynić system dowolnie „niebezpiecznym”) ale to nie oznacza, że prawdopodobieństwo wystąpienia katastrofy w odcinku $(0,t)$ uległo zwiększeniu. Natomiast ulega zmniejszeniu prawdopodobieństwo wystąpienia więcej niż jednej katastrofy. Czas przebywania w stanie katastrofy dąży do nieskończoności, stan „k” można uważać za stan pochłaniający (graniczny), system dąży do systemu nienaprawialnego;

- c) przy ustalonym μ_k jeśli $\lambda_k \rightarrow +\infty$, to $B = P_0 \rightarrow 0$, $P_k \rightarrow 1$ a $T_{MTF} = \frac{1}{\lambda_k} \rightarrow 0$. W tym przypadku rzeczywiście zwiększa się prawdopodobieństwo wystąpienia katastrofy w odcinku $(0,t)$ (dąży do 1 wraz ze wzrostem λ_k) i wzrasta prawdopodobieństwo wystąpienia więcej niż jednej katastrofy, a czas przebywania w stanie katastrofy dąży do t (zakładamy, że czas t jest wielokrotnie większy niż czas potrzebny na usunięcie skutków katastrofy (jednej), gdyż rozpatrujemy własności graniczne systemu) – czas przebywania w stanie katastrofy w tym przypadku rozumiemy jako sumę czasów potrzebny na usunięcie skutków katastrof (wielu) powstałych w przedziale $(0,t)$. Stan „k” można w pewnym sensie uważać za stan pochłaniający (graniczny), system po powrocie do stanu „0” „natychmiast” przechodzi w stan „k”;

- d) przy ustalonym μ_k jeśli $\lambda_k \rightarrow 0$, to $B = P_0 \rightarrow 1$, $P_k \rightarrow 0$ a $T_{MTF} = \frac{1}{\lambda_k} \rightarrow +\infty$. W tym przypadku rzeczywiście zmniejsza się prawdopodobieństwo wystąpienia katastrofy w odcinku $(0,t)$ (dąży do 0 wraz ze zbieganiem λ_k do 0) i maleje prawdopodobieństwo wystąpienia więcej niż jednej katastrofy, a czas (średni, rozumiany jak w pkt. c)) przebywania w stanie katastrofy w odcinku $(0,t)$ dąży do 0;
- e) jeśli jednocześnie λ_k i μ_k zmieniają swoją wartość, to istotny jest stosunek $c = \frac{\lambda_k}{\mu_k}$. Jeśli c dąży do 0, to $B = P_0 \rightarrow 1$, $P_k \rightarrow 0$. Jeśli c dąży do $+\infty$, to $B = P_0 \rightarrow 0$, $P_k \rightarrow 1$. Jeśli c dąży do c_0 , $0 < c_0 < +\infty$, to $P_0 \rightarrow \frac{1}{c_0+1}$, $P_k \rightarrow \frac{c_0}{c_0+1}$. Wartość T_{MTF} w każdym przypadku opisana jest wzorem $T_{MTF} = \frac{1}{\lambda_k}$ i zależy od zmian (granicy) λ_k .

Jak widać T_{MTF} zależy tylko od wartości λ_k i zmiany wartości μ_k są nieistotne, a P_0 i P_1 można wyznaczyć analitycznie. Jaki jest więc symulacji w której z góry zakłada się wartości μ_k i λ_k .

2.2. Model II



Rys. 2. Graf procesu trzystanowego z jednym stanem krytycznym w układzie równoległym

Równania Kołmogorowa:

$$P_0\lambda_1 + P_0\lambda_k = P_1\mu_1 + P_k\mu_k$$

$$P_1\mu_1 = P_0\lambda_1$$

$$P_k\mu_k = P_0\lambda_k$$

Równanie dodatkowe:

$$P_0 + P_1 + P_k = 1$$

Rozwiązując równania Kołmogorowa i wyznaczając B i T_{MTF} otrzymujemy:

$$P_0 = \frac{\mu_1\mu_k}{\lambda_k\mu_1 + \mu_k(\lambda_1 + \mu_1)} = \frac{1}{\frac{\lambda_k}{\mu_k} + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + 1}$$

$$P_1 = \frac{\lambda_1\mu_k}{\lambda_k\mu_1 + \mu_k(\lambda_1 + \mu_1)} = \frac{\frac{\lambda_1}{\mu_1}}{\frac{\lambda_k}{\mu_k} + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + 1}$$

$$P_k = \frac{\lambda_k\mu_1}{\lambda_k\mu_1 + \mu_k(\lambda_1 + \mu_1)} = \frac{\frac{\lambda_k}{\mu_k}}{\frac{\lambda_k}{\mu_k} + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + 1}$$

$$B = \frac{\mu_k(\lambda_1 + \mu_1)}{\lambda_k\mu_1 + \mu_k(\lambda_1 + \mu_1)} = \frac{1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1}}{\frac{\lambda_k}{\mu_k} + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + 1}$$

$$T_{MTF} = \frac{\lambda_1 + \mu_1}{\lambda_k\mu_1} = \frac{1}{\lambda_k} + \frac{\lambda_1}{\lambda_k\mu_1}$$

Zauważmy, że:

a) przy ustalonych $\lambda_1, \lambda_k, \mu_k$ jeśli $\mu_1 \rightarrow +\infty$, to

$$P_0 \rightarrow \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k} = \frac{1}{\frac{\lambda_k}{\mu_k} + 1}, \quad P_1 \rightarrow 0, \quad P_k \rightarrow \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \mu_k} = \frac{\frac{\lambda_k}{\mu_k}}{\frac{\lambda_k}{\mu_k} + 1}$$

$$B \rightarrow \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k} = \frac{1}{\frac{\lambda_k}{\mu_k} + 1}, \quad T_{MTF} > \frac{1}{\lambda_k}, \quad T_{MTF} \rightarrow \frac{1}{\lambda_k}$$

Dla granicznej struktury prawdopodobieństwa P_0, P_k i B oraz czas T_{MTF} są takie same jak dla struktury z modelu I. Nie jest to jednak ten sam model, gdyż choć prawdopodobieństwo (graniczne) przebywania w stanie „1” jest równe 0, to nie jest to zdarzenie niemożliwe. System „natychmiast” po przejściu do stanu „1” wraca do stanu „0”. Prawdopodobieństwo przejścia w przedziale $(0,t)$ do stanu „1” (ze stanu „0”) jest stałe lecz rośnie prawdopodobieństwo więcej niż jednego takiego przejścia. Uwzględniając ten fakt możemy wykorzystać analizę z modelu I do analizy modelu granicznego przy zmianach wartości λ_k, μ_k ;

b) przy ustalonych $\lambda_1, \lambda_k, \mu_k$ jeśli $\mu_1 \rightarrow 0$, to

$$P_0 \rightarrow 0, \quad P_1 \rightarrow 1, \quad P_k \rightarrow 0, \quad B \rightarrow 1, \quad T_{MTF} > \frac{1}{\lambda_k}, \quad T_{MTF} \rightarrow +\infty$$

Zwiększanie czasu powrotu ze stanu „1” do stanu „0” (czyli zmniejszanie μ_1) powoduje, że system staje się coraz bardziej bezpieczny (założyliśmy, że wszystkie stany poza stanem „k” są stanami bezpiecznymi). Stan „1” staje się jakby stanem (granicznym) pochłaniającym. Po przejściu do stanu „1” czas opuszczenia stanu rośnie nieograniczenie, czas przebywania w stanie „0” relatywnie maleje do zera (wraz z t) więc „brak jest czasu” by system przeszedł w stan „k”. Nie jest to jednak zdarzenie niemożliwe. Ale czy nadal system jest funkcjonalny?

c) przy ustalonych λ_k, μ_1, μ_k jeśli $\lambda_1 \rightarrow 0$, to

$$P_0 \rightarrow \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k} = \frac{1}{\frac{\lambda_k}{\mu_k} + 1}, \quad P_1 \rightarrow 0, \quad P_k \rightarrow \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \mu_k} = \frac{\frac{\lambda_k}{\mu_k}}{\frac{\lambda_k}{\mu_k} + 1}$$

$$B \rightarrow \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k} = \frac{1}{\frac{\lambda_k}{\mu_k} + 1}, \quad T_{MTF} > \frac{1}{\lambda_k}, \quad T_{MTF} \rightarrow \frac{1}{\lambda_k}$$

Dla granicznej struktury prawdopodobieństwa P_0, P_k i B oraz czas T_{MTF} są takie same jak dla struktury z modelu I. W granicy stan „1” staje się stanem niemożliwym. Struktura graniczna jest więc strukturą jak w modelu I. Należy przeanalizować, czy „wyeliminowanie” stanu „1” nie pozbawia systemu funkcjonalności. Choć prawdopodobieństwa graniczne i czas T_{MTF} są takie same jak w pkt. a), to są to różne systemy. W pkt. a) system „natychmiast” wraca ze stanu „1” do stanu „0”, w pkt. c) system „nigdy” nie przechodzi do stanu „1”;

d) przy ustalonych λ_k, μ_1, μ_k jeśli $\lambda_1 \rightarrow +\infty$, to

$$P_0 \rightarrow 0, P_1 \rightarrow 1, P_k \rightarrow 0, B \rightarrow 1, T_{MTF} > \frac{1}{\lambda_k}, T_{MTF} \rightarrow +\infty$$

W tym przypadku stan „1” w granicy staje się stanem podstawowym, przejmującym rolę stanu „0”. Gdyby utożsamić (dla dostatecznie dużych λ_1) stany „0” i „1” dochodzimy do modelu I, gdzie „połączony” stan jest granicznym stanem pochłaniającym. Zwróćmy uwagę, że prawdopodobieństwa i czas T_{MTF} są takie jak w przypadku d) modelu I przy czym fakt, że $\lambda_1 \rightarrow +\infty$, odgrywa taką samą rolę jak (powoduje takie samo zachowanie systemu z modelu II) jak $\lambda_k \rightarrow 0$ w modelu I. Prawdopodobieństwa te są również takie same jak w przypadku b) modelu II. Zasadniczo graniczne systemy można utożsamiać pamiętając jednak, że w pkt. b) „nie można” opuścić stanu, w pkt. d) „natychmiast” przechodzimy ze stanu „0” do stanu „1”;

e) przy ustalonych λ_k, μ_k jeśli $\frac{\lambda_1}{\mu_1} \rightarrow c$, to

- jeśli $0 < c < +\infty$, to

$$P_0 \rightarrow \frac{1}{\frac{\lambda_k}{\mu_k} + c + 1} = \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k(1+c)}, P_1 \rightarrow \frac{c}{\frac{\lambda_k}{\mu_k} + c + 1} = \frac{\mu_k c}{\lambda_k + \mu_k(1+c)}$$

$$P_k \rightarrow \frac{\frac{\lambda_k}{\mu_k}}{\frac{\lambda_k}{\mu_k} + c + 1} = \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \mu_k(1+c)}, B \rightarrow \frac{1+c}{\frac{\lambda_k}{\mu_k} + c + 1} = \frac{\mu_k(1+c)}{\lambda_k + \mu_k(1+c)}$$

$$T_{MTF} > \frac{1}{\lambda_k}, T_{MTF} \rightarrow \frac{1+c}{\lambda_k}$$

Zwróćmy uwagę, że dopuszczalne tutaj są również sytuacje, gdy zarówno $\lambda_1 \rightarrow 0$ i $\mu_1 \rightarrow 0$, jak i $\lambda_1 \rightarrow +\infty$ i $\mu_1 \rightarrow +\infty$, więc w pierwszym przypadku czas przejścia ze stanu „0” do stanu „1” jaki i powrotu dąży do nieskończoności, a w przypadku drugim do zera – przejścia są „natychmiastowe”. Jeśli granice stosunków intensywności przejść są takie same, to efekt końcowy w sensie prawdopodobieństw granicznych i T_{MTF} jest taki sam. Jednak w pierwszym przypadku prawdopodobieństwo warunkowe pozostawania w stanie „a” ($a = 0, 1$) przez czas Δt jest równe 0 (dla dostatecznie dużych Δt), a w drugim równe prawdopodobieństwo pozostawania w stanie „1” równe 1 (dla dostatecznie małych Δt);

- jeśli $c = 0$, to

$$P_0 \rightarrow \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k}, P_1 \rightarrow 0, P_k \rightarrow \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \mu_k}, B \rightarrow \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k}$$

$$T_{MTF} > \frac{1}{\lambda_k}, T_{MTF} \rightarrow \frac{1}{\lambda_k}$$

Odpowiada to przypadkowi c). Prawdopodobieństwa graniczne są takie jak w modelu I. Wartość $c = 0$ w przypadkach, gdy $\mu_1 \rightarrow +\infty$ („natychmiastowy” powrót do stanu „0”) a λ_1 dowolne (przy ograniczeniach szybkości zbiegania dla $\lambda_1 \rightarrow +\infty$), $\lambda_1 \rightarrow 0$ a $\mu_1 \rightarrow +\infty$, μ_1 skończone lub $\mu_1 \rightarrow 0$ (przy ograniczeniach szybkości zbiegania dla $\mu_1 \rightarrow 0$);

- jeśli $c = +\infty$, to

$$P_0 \rightarrow 0, P_1 \rightarrow 1, P_k \rightarrow 0, B \rightarrow 1, T_{MTF} > \frac{1}{\lambda_k}, T_{MTF} \rightarrow +\infty$$

Odpowiada to przypadkowi d). Podobnie jak wyżej dopuszczalne są różne warianty „zbiegania” intensywności;

f) przy ustalonych λ_1, μ_1, μ_k jeśli $\lambda_k \rightarrow 0$, to

$$P_0 \rightarrow \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1}, \quad P_1 \rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1}, \quad P_k \rightarrow 0$$

$$B \rightarrow 1, \quad T_{MTF} > \frac{1}{\lambda_k}, \quad T_{MTF} \rightarrow +\infty$$

Ponieważ średni czas do wystąpienia awarii dąży do $+\infty$, więc w tym przypadku maleje (do 0) prawdopodobieństwo wystąpienia katastrofy. Stan „k” staje się granicznym stanem niemożliwym;

g) przy ustalonych λ_1, μ_1, μ_k jeśli $\lambda_k \rightarrow +\infty$, to

$$P_0 \rightarrow 0, \quad P_1 \rightarrow 0, \quad P_k \rightarrow 1, \quad B \rightarrow 0, \quad T_{MTF} > \frac{1}{\lambda_k}, \quad T_{MTF} \rightarrow 0$$

Stan „k” staje się granicznym stanem pochłaniającym. Ze stanu „0” następują „natychmiastowe” przejścia do stanu „k”;

h) przy ustalonych $\lambda_1, \lambda_k, \mu_1$, jeśli $\mu_k \rightarrow +\infty$, to

$$P_0 \rightarrow \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1}, \quad P_1 \rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1}, \quad P_k \rightarrow 0, \quad B \rightarrow 1, \quad T_{MTF} = \frac{1}{\lambda_k} + \frac{\lambda_1}{\lambda_k \mu_1} > \frac{1}{\lambda_k}$$

Zauważmy, że średni czas do wystąpienia awarii nie zależy od μ_k , a jednocześnie μ_k , ma istotny wpływ na P_0, P_1, P_k, B . Współczynnik B rośnie do 1 nie dlatego, że maleje prawdopodobieństwo wystąpienia awarii w odcinku czasu $(0,t)$, ale dlatego, że czas usuwania skutków awarii maleje do 0. Konsekwencją tego jest wzrost prawdopodobieństwa wystąpienia więcej niż jednej awarii w odcinku czasu $(0,t)$.

i) przy ustalonych $\lambda_1, \lambda_k, \mu_1$, jeśli $\mu_k \rightarrow 0$, to

$$P_0 \rightarrow 0, \quad P_1 \rightarrow 0, \quad P_k \rightarrow 1, \quad B \rightarrow 0, \quad T_{MTF} = \frac{1}{\lambda_k} + \frac{\lambda_1}{\lambda_k \mu_1} > \frac{1}{\lambda_k}$$

Współczynnik B maleje do 0 nie dlatego, że rośnie prawdopodobieństwo wystąpienia awarii w odcinku czasu $(0,t)$, ale dlatego, że czas usuwania skutków awarii rośnie do nieskończoności. Konsekwencją tego jest, że maleje do 0 prawdopodobieństwa wystąpienia więcej niż 1 awarii w odcinku czasu $(0,t)$ – stan „k” staje się granicznym stanem pochłaniającym. Można powiedzieć, że system staje się systemem pracującym do pierwszego uszkodzenia (nienaprawialnym).

j) przy ustalonych λ_1, μ_1 jeśli $\frac{\lambda_k}{\mu_k} \rightarrow c$, to

- jeśli $0 < c < +\infty$, to

$$P_0 \rightarrow \frac{1}{\frac{\lambda_1}{\mu_1} + c + 1} = \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1(1+c)}, \quad P_1 \rightarrow \frac{\frac{\lambda_1}{\mu_1}}{\frac{\lambda_1}{\mu_1} + c + 1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1(1+c)}$$

$$P_k \rightarrow \frac{c}{\frac{\lambda_1}{\mu_1} + c + 1} = \frac{\mu_1 c}{\lambda_1 + \mu_1(1+c)}, \quad B \rightarrow \frac{1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1}}{\frac{\lambda_1}{\mu_1} + c + 1} = \frac{\lambda_1 + \mu_1}{\lambda_1 + \mu_1(1+c)}$$

$$T_{MTF} > \frac{1}{\lambda_k}, \quad T_{MTF} = \frac{1}{\lambda_k} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)$$

- jeśli $c = 0$, to

$$P_0 \rightarrow \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1}, \quad P_1 \rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1}, \quad P_k \rightarrow 0, \quad B \rightarrow 1,$$

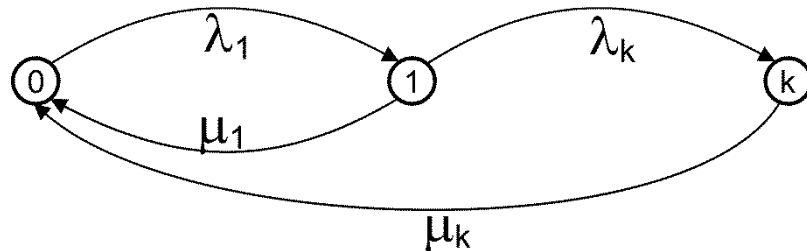
$$T_{MTF} > \frac{1}{\lambda_k}, \quad T_{MTF} = \frac{1}{\lambda_k} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)$$

- jeśli $c = +\infty$, to

$$P_0 \rightarrow 0, \quad P_1 \rightarrow 0, \quad P_k \rightarrow 1, \quad B \rightarrow 0, \quad T_{MTF} > \frac{1}{\lambda_k}, \quad T_{MTF} = \frac{1}{\lambda_k} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)$$

Zwróćmy uwagę, że we wszystkich trzech przypadkach wariantu j) czas T_{MTF} jest taki sam i zależy tylko od λ_k (przy ustalonych λ_1 i μ_1) jednak prawdopodobieństwa B i P_k w każdym przypadku są inne. Należy jednak przypomnieć, że jest to czas poprawnej pracy systemu do wystąpienia katastrofy – nie jest wliczony czas usuwania skutków katastrofy. Należy również zaznaczyć, że podobnie jak dla przypadku e) możliwe są różne warianty zbiegania intensywności.

2.3. Model III



Rys. 3. Graf procesu trzystanowego z jednym stanem krytycznym w układzie szeregowym

Równania Kołmogorowa:

$$P_0 \lambda_1 = P_1 \mu_1 + P_k \mu_k$$

$$P_1 \lambda_k + P_1 \mu_1 = P_0 \lambda_1$$

$$P_k \mu_k = P_1 \lambda_k$$

Równanie dodatkowe:

$$P_0 + P_1 + P_k = 1$$

Rozwiązując równania Kołmogorowa i wyznaczając B i T_{MTF} otrzymujemy:

$$P_0 = \frac{\mu_k(\lambda_k + \mu_1)}{\lambda_1 \lambda_k + \mu_k(\lambda_1 + \lambda_k + \mu_1)}$$

$$P_1 = \frac{\lambda_1 \mu_k}{\lambda_1 \lambda_k + \mu_k(\lambda_1 + \lambda_k + \mu_1)}$$

$$P_k = \frac{\lambda_1 \lambda_k}{\lambda_1 \lambda_k + \mu_k(\lambda_1 + \lambda_k + \mu_1)}$$

$$B = \frac{\mu_k(\lambda_1 + \lambda_k + \mu_1)}{\lambda_1 \lambda_k + \mu_k(\lambda_1 + \lambda_k + \mu_1)}$$

$$T_{MTF} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_k + \mu_1)}{\lambda_1 \lambda_k} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_k} + \frac{\mu_1}{\lambda_1 \lambda_k}$$

Zauważmy, że:

- a) przy ustalonych $\lambda_1, \lambda_k, \mu_k$ jeśli $\mu_1 \rightarrow +\infty$, to

$$P_0 \rightarrow 1, \quad P_1 \rightarrow 0, \quad P_k \rightarrow 0, \quad B \rightarrow 1, \quad T_{MTF} > \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_k} > \frac{1}{\lambda_k}, \quad T_{MTF} \rightarrow +\infty$$

Stan „0” staje się granicznym stanem pochłaniającym, średni czas do wystąpienia katastrofy dąży do nieskończoności – to oznacza, że i prawdopodobieństwo wystąpienia więcej niż 1 jednej katastrofy w odcinku czasu (0,t) dąży do 0.

b) przy ustalonych $\lambda_1, \lambda_k, \mu_k$ jeśli $\mu_1 \rightarrow 0$, to

$$P_0 \rightarrow \frac{\lambda_k \mu_k}{\lambda_1 \lambda_k + \mu_k (\lambda_1 + \lambda_k)}, \quad P_1 \rightarrow \frac{\lambda_1 \mu_k}{\lambda_1 \lambda_k + \mu_k (\lambda_1 + \lambda_k)}, \quad P_k \rightarrow \frac{\lambda_1 \lambda_k}{\lambda_1 \lambda_k + \mu_k (\lambda_1 + \lambda_k)},$$

$$B \rightarrow \frac{\mu_k (\lambda_1 + \lambda_k)}{\lambda_1 \lambda_k + \mu_k (\lambda_1 + \lambda_k)}, \quad T_{MTF} > \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_k} > \frac{1}{\lambda_k}, \quad T_{MTF} \rightarrow \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_k}$$

Zwróćmy uwagę, że jako strukturę graniczną otrzymujemy model I w której stan „0” jest „połączonymi” stanami „0” i „1” modelu III a intensywność λ_k z modelu I zastąpiono sumą $\lambda_1^{-1} + \lambda_k^{-1} = \frac{\lambda_1 \lambda_k}{\lambda_1 + \lambda_k}$ odwrotności intensywności z modelu III. Jest to konsekwencją tego, że skoro czas przebywania w stanie „1” jest równy 0 (w granicy), to można rozpatrywać ten system tak jak system bez stanu „1” ale ze średnim czasem przejścia ze stanu „0” do stanu katastroficznego (w modelu I) równym sumie średnich czasów przejścia ze stanu „0” do stanu „1” i ze stanu „1” do stanu „k” (w modelu III);

c) przy ustalonych λ_k, μ_k jeśli $\frac{\lambda_1}{\mu_1} \rightarrow c$, to

- jeśli $0 < c < +\infty$, to

$$P_0 \rightarrow \frac{\mu_k (1 + \frac{\lambda_k}{\mu_1})}{c(\lambda_k + \mu_k) + \mu_k (1 + \frac{\lambda_k}{\mu_1})}, \quad P_1 \rightarrow \frac{\mu_k c}{c(\lambda_k + \mu_k) + \mu_k (1 + \frac{\lambda_k}{\mu_1})}$$

$$P_k \rightarrow \frac{\lambda_k c}{c(\lambda_k + \mu_k) + \mu_k (1 + \frac{\lambda_k}{\mu_1})}, \quad B \rightarrow \frac{\mu_k (1 + c) + \frac{\lambda_k \mu_k}{\mu_1}}{c(\lambda_k + \mu_k) + \mu_k (1 + \frac{\lambda_k}{\mu_1})}$$

$$T_{MTF} > \frac{1}{\lambda_k}, \quad T_{MTF} \rightarrow \frac{1}{\lambda_k} \left(1 + \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{\lambda_1}$$

Jeśli ponadto:

- $\mu_1 \rightarrow 0$ (wtedy $\lambda_1 \rightarrow 0$), to

$$P_0 \rightarrow 1, \quad P_1 \rightarrow 0, \quad P_k \rightarrow 0, \quad B \rightarrow 1, \quad T_{MTF} \rightarrow +\infty$$

- $\mu_1 \rightarrow +\infty$ (wtedy $\lambda_1 \rightarrow +\infty$), to

$$P_0 \rightarrow 0, \quad P_1 \rightarrow \frac{\mu_k c}{c(\lambda_k + \mu_k) + \mu_k}, \quad P_k \rightarrow \frac{\lambda_k c}{c(\lambda_k + \mu_k) + \mu_k},$$

$$B \rightarrow \frac{\mu_k (1 + c)}{c(\lambda_k + \mu_k) + \mu_k}, \quad T_{MTF} \rightarrow \frac{1}{\lambda_k} \left(1 + \frac{1}{c}\right)$$

- jeśli $c = 0$, to

$$P_0 \rightarrow 1, \quad P_1 \rightarrow 0, \quad P_k \rightarrow 0, \quad B \rightarrow 1, \quad T_{MTF} > \frac{1}{\lambda_k}, \quad T_{MTF} \rightarrow +\infty$$

- jeśli $c = +\infty$, to

$$P_0 \rightarrow 0, \quad P_1 \rightarrow \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k}, \quad P_k \rightarrow \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \mu_k}, \quad B \rightarrow \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k}$$

$$T_{MTF} > \frac{1}{\lambda_k}, \quad T_{MTF} \rightarrow \frac{1}{\lambda_k} + \frac{1}{\lambda_1}$$

Jeśli dodatkowo $\lambda_1 \rightarrow +\infty$, to graniczna struktura może być – ze względu na graniczne prawdopodobieństwa i średni czas do wystąpienia katastrofy – traktowana jak struktura z modelu I. Stan „1” przejmuje rolę stanu „0”. Choć stan „0” istnieje – przez niego „realizowane” są powroty ze stanu „k” i powroty ze stanu „1” – to czas przebywania w stanie „0” (graniczny) jest równy 0. Natychmiast system przechodzi do stanu „1”. Zwróćmy uwagę, że intensywność przejść ze stanu „1” do stanu „0” jest nieistotna – może być stała lub zmienna, w szczególności dążyć do 0 lub do nieskończoności (w tym przypadku przy zachowaniu warunku $c = +\infty$);

d) przy ustalonych $\lambda_1, \lambda_k, \mu_1$ jeśli $\mu_k \rightarrow +\infty$, to

$$P_0 \rightarrow \frac{\lambda_k + \mu_1}{\lambda_1 + \lambda_k + \mu_1}, P_1 \rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_k + \mu_1}, P_k \rightarrow 0, B \rightarrow 1,$$

$$T_{MTF} > \frac{1}{\lambda_k}, T_{MTF} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_k} + \frac{\mu_1}{\lambda_1 \lambda_k}$$

Choć prawdopodobieństwo przebywania w stanie „k” (graniczne) wynosi 0, to katastrofy występują i to z taką samą intensywnością, w dodatku prawdopodobieństwo wystąpienia więcej niż 1 katastrofy w odcinku (0,t) jest większe niż przy każdym ustalonym skończonym μ_k – bo czas usuwania skutków katastrofy jest równy 0;

e) przy ustalonych $\lambda_1, \lambda_k, \mu_1$ jeśli $\mu_k \rightarrow 0$, to

$$P_0 \rightarrow 0, P_1 \rightarrow 0, P_k \rightarrow 1, B \rightarrow 0, T_{MTF} > \frac{1}{\lambda_k}, T_{MTF} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_k} + \frac{\mu_1}{\lambda_1 \lambda_k}$$

Prawdopodobieństwo przebywania w stanie katastroficznym dąży do 1, stan „k” staje się granicznym stanem pochłaniającym, ale przyczyną jest nie wzrost prawdopodobieństwa wystąpienia awarii (prawdopodobieństwo wystąpienia więcej niż jednej awarii dąży do zera) tylko rosnący do nieskończoności czas usunięcia skutków awarii. System „przechodzi” w system nienaprawialny;

f) przy ustalonych λ_1, μ_1 jeśli $\frac{\lambda_k}{\mu_k} \rightarrow c$, to

- jeśli $0 < c < +\infty$ i $\lambda_k \rightarrow 0$, to

$$P_0 \rightarrow \frac{\mu_1}{\lambda_1(c+1) + \mu_1}, P_1 \rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_1(c+1) + \mu_1}, P_k \rightarrow \frac{\lambda_1 c}{\lambda_1(c+1) + \mu_1}$$

$$B \rightarrow \frac{\lambda_1 + \mu_1}{\lambda_1(c+1) + \mu_1}, T_{MTF} > \frac{1}{\lambda_k}, T_{MTF} \rightarrow +\infty$$

Mamy tutaj sytuację, gdzie średni czas do wystąpienia awarii rośnie do nieskończoności (prawdopodobieństwo wystąpienia awarii maleje do zera) ale jednocześnie czas usuwania skutków awarii rośnie do nieskończoności (w stosunku $1:c^{-1}$). Stąd i prawdopodobieństwo przebywania w stanie katastroficznym jest dodatnie;

- jeśli $0 < c < +\infty$ i $0 < \lambda_k < +\infty$, to

$$P_0 \rightarrow \frac{\lambda_k + \mu_1}{\lambda_1(c+1) + \lambda_k + \mu_1}, P_1 \rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_1(c+1) + \lambda_k + \mu_1},$$

$$P_k \rightarrow \frac{\lambda_1 c}{\lambda_1(c+1) + \lambda_k + \mu_1}, B \rightarrow \frac{\lambda_1 + \lambda_k + \mu_1}{\lambda_1(c+1) + \lambda_k + \mu_1},$$

$$T_{MTF} > \frac{1}{\lambda_k}, T_{MTF} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_k} + \frac{\mu_1}{\lambda_1 \lambda_k}$$

- jeśli $0 < c < +\infty$ i $\lambda_k \rightarrow +\infty$, to

$$P_0 \rightarrow 1, P_1 \rightarrow 0, P_k \rightarrow 0, B \rightarrow 1, T_{MTF} > \frac{1}{\lambda_k}, T_{MTF} \rightarrow \frac{1}{\lambda_1}$$

W tym układzie jeśli tylko system znajdzie się w stanie „1” natychmiast przechodzi w stan „k” a ze stanu „k” natychmiast w stan „0”. Można powiedzieć, że system „nie zdążył pobyc” w stanach „1” i „k”. Jednak z intensywnością λ_1 (w granicy) przechodzi w stan „1”, więc i z taką intensywnością przechodzi w stan katastroficzny. Nie można wnioskować, że w systemie nie występują katastrofy.

- jeśli $c = 0$ i $\lambda_k \rightarrow 0$, to

$$P_0 \rightarrow \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \mu_1}, P_1 \rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_1}, P_k \rightarrow 0, B \rightarrow 1,$$

$$T_{MTF} > \frac{1}{\lambda_k}, T_{MTF} \rightarrow +\infty$$

Mamy tutaj sytuację, gdzie średni czas do wystąpienia awarii rośnie do nieskończoności (prawdopodobieństwo wystąpienia awarii maleje do zera) a jednocześnie o czasie usuwania skutków awarii wiemy, że jeśli rośnie do nieskończoności to na tyle wolno, że $c = 0$. Stąd i prawdopodobieństwo przebywania w stanie katastroficznym dąży do zera. W granicy stan „k” można traktować jak stan nieosiągalny (z prawdopodobieństwem 1; przejście ze stanu „1” do stanu „k” ma prawdopodobieństwo 0 ale nie jest zdarzeniem niemożliwym) i system redukuje się do modelu I;

- jeśli $c = 0$ i $0 < \lambda_k < +\infty$, to

$$P_0 \rightarrow \frac{\lambda_k + \mu_1}{\lambda_1 + \lambda_k + \mu_1}, P_1 \rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_k + \mu_1}, P_k \rightarrow 0, B \rightarrow 1,$$

$$T_{MTF} > \frac{1}{\lambda_k}, T_{MTF} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_k} + \frac{\mu_1}{\lambda_1 \lambda_k}$$

By założone warunki były spełnione średni czas usuwania awarii musi dążyć do zera ($\mu_k \rightarrow +\infty$). System „dąży” do sytemu z zerowym czasem odnowy, stąd prawdopodobieństwo przebywania w stanie katastroficznym dąży do zera;

- jeśli $c = 0$ i $\lambda_k \rightarrow +\infty$, to

$$P_0 \rightarrow 1, P_1 \rightarrow 0, P_k \rightarrow 0, B \rightarrow 1, T_{MTF} > \frac{1}{\lambda_k}, T_{MTF} \rightarrow \frac{1}{\lambda_1}$$

By założone warunki były spełnione średni czas usuwania awarii musi dążyć do zera ($\mu_k \rightarrow +\infty$) dużo szybciej niż średni czas przechodzenia ze stanu „1” do stanu „k”. Jeśli tylko system znajdzie się w stanie „1” natychmiast przechodzi w stan „k” a ze stanu „k” natychmiast w stan „0”. Można powiedzieć, że system „nie zdążył pobyc” w stanach „1” i „k”. Jednak z intensywnością λ_1 (w granicy) przechodzi w stan „1”, więc i z taką intensywnością przechodzi w stan katastroficzny. Nie można wnioskować, że w systemie nie występują katastrofy;

- jeśli $c = +\infty$ i $\lambda_k \rightarrow 0$, to

$$P_0 \rightarrow 0, P_1 \rightarrow 0, P_k \rightarrow 1, B \rightarrow 0, T_{MTF} > \frac{1}{\lambda_k}, T_{MTF} \rightarrow +\infty$$

Mamy tutaj sytuację, gdzie średni czas przejścia między stanem „1” a stanem „k” rośnie do nieskończoności (prawdopodobieństwo wystąpienia awarii maleje do zera) a jednocześnie o czasie usuwania skutków awarii wiemy, że rośnie do nieskończoności i to na tyle szybko, że $c = +\infty$. Stąd, jeśli system znajdzie się

w stanie „k”, to z prawdopodobieństwem 1 (w granicy) nie może go opuścić. W granicy system można traktować jako nienaprawialny;

- jeśli $c = +\infty$ i $0 < \lambda_k < +\infty$, to

$$P_0 \rightarrow 0, \quad P_1 \rightarrow 0, \quad P_k \rightarrow 1, \quad B \rightarrow 0,$$

$$T_{MTF} > \frac{1}{\lambda_k}, \quad T_{MTF} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_k} + \frac{\mu_1}{\lambda_1 \lambda_k}$$

By założone warunki były spełnione średni czas usuwania awarii musi dążyć do nieskończoności ($\mu_k \rightarrow 0$). System „dąży” do sytemu nienaprawialnego. Zwróćmy uwagę, że uzyskany czas należy zasadniczo traktować jako średni czas do wystąpienia pierwszej katastrofy – następnych katastrof nie będzie, bo system (w granicy) nie opuści stanu „k” („katastrofa ciągła”);

- jeśli $c = +\infty$ i $\lambda_k \rightarrow +\infty$, to

- jeśli $\mu_k \rightarrow 0$, to

$$P_0 \rightarrow 0, \quad P_1 \rightarrow 0, \quad P_k \rightarrow 1, \quad B \rightarrow 0, \quad T_{MTF} > \frac{1}{\lambda_k}, \quad T_{MTF} \rightarrow \frac{1}{\lambda_1}$$

Ze stanu „1” system „natychmiast” przechodzi w stan „k” (średni czas oczekiwania na przejście do stanu „k” dąży do 0) i już w nim pozostaje (średni czas usunięcia skutków katastrofy dąży do nieskończoności). Stąd stan „k” jest granicznym stanem pochłaniającym. Czas T_{MTF} należy w tym przypadku rozumieć jako czas do pierwszego przejścia ze stanu „0” do stanu „k” (poprzez stan „1”);

- jeśli $0 < \mu_k < +\infty$, to

$$P_0 \rightarrow \frac{\mu_k}{\lambda_1 + \mu_k}, \quad P_1 \rightarrow 0, \quad P_k \rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \mu_k}, \quad B \rightarrow \frac{\mu_k}{\lambda_1 + \mu_k},$$

$$T_{MTF} > \frac{1}{\lambda_k}, \quad T_{MTF} \rightarrow \frac{1}{\lambda_1}$$

Ze stanu „1” system „natychmiast” przechodzi w stan „k” (średni czas oczekiwania na przejście do stanu „k” dąży do 0). System zachowuje się tak jakby stanu „1” nie było. Jest więc (w granicy) systemem z modelu I z intensywnościami przejścia i powrotu do stanu „k” odpowiednio λ_1 i μ_k ;

- jeśli $\mu_k \rightarrow +\infty$, to

$$P_0 \rightarrow 1, \quad P_1 \rightarrow 0, \quad P_k \rightarrow 0, \quad B \rightarrow 1, \quad T_{MTF} > \frac{1}{\lambda_k}, \quad T_{MTF} \rightarrow \frac{1}{\lambda_1}$$

Ze stanu „1” system „natychmiast” przechodzi w stan „k” (średni czas oczekiwania na przejście do stanu „k” dąży do 0) i „natychmiast” przechodzi w stan „0” (średni czas usunięcia skutków katastrofy dąży do zera). System zachowuje się tak jakby stanu „1” nie było. Jest więc (w granicy) systemem z modelu I z intensywnościami przejścia i powrotu do stanu „k” odpowiednio λ_1 i $\mu_k = +\infty$, czyli systemu z zerowym czasem odnowy – katastrofy występują z intensywnością λ_1 .

PODSUMOWANIE

Badania symulacyjne, w sytuacji gdy można wyznaczyć prawdopodobieństwa przebywania w poszczególnych stanach (nie tylko graniczne) nie do końca mają sens, szczególnie w sytuacjach, gdy zakłada się wielkości wartości intensywności przejść. Prawdą jest, że uzyskanie rozwiązań równań Kołmogorowa dla systemów z dużą liczbą stanów może być bardzo trudne, również szczegółowa analiza „zachowania się” systemu przy zmianach

wartości intensywności przejść – szczególnie przy jednoczesnych zmianach dla wszystkich (wielu) przejść może być praktycznie niewykonalna (w modelach II i III również nie analizowaliśmy jednoczesnej zmiany wszystkich intensywności przejść) choćby z tego powodu, że liczba kombinacji parametrów jednocześnie zmienianych rośnie lawinowo z liczbą dopuszczalnych przejść (jest równa $2^n - 1$, gdzie n liczba dopuszczalnych przejść). Ale takie same problemy wystąpią również przy analizie symulacyjnej. Zwróćmy uwagę, że dla prawdopodobieństw granicznych, przy ustalonych wartościach liczbowych intensywności przejść, możemy uzyskać dokładne rozwiązanie układu równań Kołmogorowa numerycznie. I to mniejszym nakładem środków niż za pomocą modelu symulacyjnego – napisanie układu równań (a w zasadzie macierzy intensywności przejść) dla dowolnego systemu o skończonej przestrzeni stanów nie jest zbyt trudne. Świadomy dobór wartości intensywności, wobec dobrej znajomości struktury systemu (aby napisać równania Kołmogorowa trzeba wszak zidentyfikować strukturę systemu) pozwoli uniknąć wątpliwych interpretacji uzyskanych wyników liczbowych. Modele symulacyjne mają sens, gdy chcemy ustalić (obliczyć a nie założyć) intensywności niektórych przejść – w modelu analizujemy sytuacje „konfliktowe” obliczając szukane intensywności (prawdopodobieństwa) przy znanych strumieniach „dopływu do sytuacji potencjalnie konfliktowych” (ale tego nie da się uzyskać stosując klasyczne programy do symulacji sieci masowej obsługi, trzeba stworzyć własne programy). Zwróćmy ponadto uwagę, że średni czas do wystąpienia katastrofy T_{MTF} nie może być mniejszy niż λ_k . Natomiast jest sens tworzyć modele symulacyjne – i być może jest to jedyna droga – w przypadku systemów niejednorodnych, niestacjonarnych, semi-markowowskich, gdy obliczenie prawdopodobieństw jest praktycznie niemożliwe.

PROPERTIES LIMIT OF MARKOV PROCESSES AND SIMULATION

Abstract

This paper examines the properties of simple homogeneous stationary ergodic Markov processes with finite space of states to limit the intensity of transitions. Highlighted the pitfalls of interpretation obtained limit probabilities and simulation results of such systems.

BIBLIOGRAFIA

1. Bobrowski D.: *Modele i metody matematyczne teorii niezawodności*, WNT Warszawa 1985.
2. Kopociński B.: *Zarys teorii odnowy i niezawodności*, PWN Warszawa 1973.
3. Koźniewska I., Włodarczyk M.: *Modele odnowy, niezawodności i masowej obsługi*, PWN Warszawa 1978.
4. Sołowjew A. D.: *Analityczne metody w teorii niezawodności*, WNT Warszawa 1983.

Autor:

dr inż. Andrzej ROGOWSKI – Uniwersytet Technologiczno-Humanistyczny
im. Kazimierza Pułaskiego w Radomiu