

PRACE ORYGINALNE ORIGINAL PAPERS

Przegląd Naukowy – Inżynieria i Kształtowanie Środowiska nr 66, 2014: 317–331
(Prz. Nauk. Inż. Kszt. Środ. 66, 2014)

Scientific Review – Engineering and Environmental Sciences No 66, 2014: 317–331
(Sci. Rev. Eng. Env. Sci. 66, 2014)

Marek CHALECKI, Grzegorz JEMIELITA

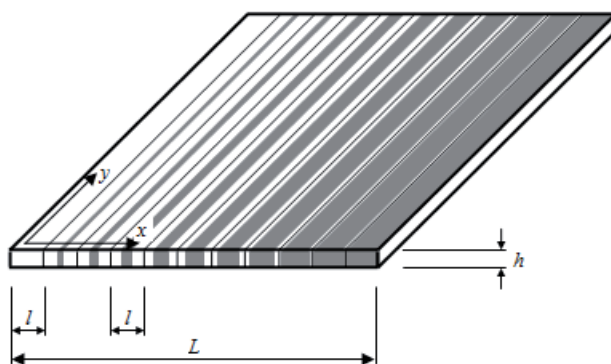
Katedra Inżynierii Budowlanej, Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie
Department of Civil Engineering, Warsaw University of Life Sciences – SGGW

Drgania własne mikroniejednorodnego pasma płytowego* **Free vibrations of micro-non-homogeneous plate band**

Słowa kluczowe: pasmo płytowe, częstość drgań własnych, metoda przemieszczeń
Key words: plate band, natural frequency, displacement method

Wstęp

Jędrysiak (2014) rozpatrzył drgania własne pasma przy zastosowaniu modelowania tolerancyjnego. Założył, że sztywność pasma nie zależy od zmiennej y (rys. 1). Bazując na równaniu różniczkowym pasma płytowego o zmiennej sztywności i masie względem osi x , przy uwzględnieniu wpływu bezwładności obrotowej, wyznaczył częstości drgań własnych.



RYSUNEK 1. Pasma płytowe z mikrostrukturą
FIGURE 1. Plate band with micro-structure

*Z uwagi na rozbudowane wzory artykuł złożono jednołamowo.

Wierzbicki i inni (2014, s. 253) podają następujące stwierdzenie dotyczące modelowania tolerancyjnego: „Ta zaleta modelowania tolerancyjnego zaowocowała opisem i rozwiązaniem wielu problemów mechaniki ośrodków niejednorodnych. Niestety, uzyskujemy tu rozwiązania przybliżone, dla których nie dysponujemy efektywnymi metodami oceny dokładności otrzymywanych rozwiązań”.

W przypadku zagadnienia przedstawionego przez Jędrysiaka (2014) można uzyskać rozwiązanie ściśle bądź formalnie ściśle w ramach teorii płyt cienkich.

Cząstkowe równanie różniczkowe drgań płyty, w przypadku niezależności sztywności, gęstości i warunków brzegowych od zmiennej y i braku sił wymuszających drgania, można przedstawić w postaci (Jemielita, 2001, s. 307).

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) w(x,t) - \frac{h^3}{12} \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho(x) \frac{\partial \dot{w}(x,t)}{\partial x} \right) + h \rho(x) \ddot{w}(x,t) \right] = 0 \quad (1)$$

gdzie:

ρ – gęstość materiału $\left[\frac{kg}{m^3} \right]$,

D – sztywność płyty, $D = \frac{E(x_1)h^3}{12(1-\nu^2(x_1))}$.

Formalnie ściśle rozwiązanie równania różniczkowego (1) o dowolnie zmiennych współczynnikach, opisującego problem drgań własnych pasma, można uzyskać za pomocą szeregów Fouriera funkcji własnych (Jemielita, 2011).

W tej pracy pokażemy możliwość uzyskania ściśłego rozwiązania zagadnienia przedstawionego w pracy Jędrysiaka (2014), korzystając z metod mechaniki budowli. W tym celu zauważmy, że problem drgań własnych takiego pasma sprowadza się do znalezienia drgań własnych belki Bernoullego z poprawką Rayleigh o zmiennych skokowo sztywności i masie.

Celem pracy jest ściśle wyznaczenie drgań własnych cienkiego pasma płytowego o mikrostrukturze pokazanej na rysunku 1.

Podstawowe założenia

Rozpatrzmy pasmo płytowe Kirchhoffa o danej szerokości (L) i stałej grubości (h), o mikrostrukturze pokazanej na rysunku 1.

Pasma wzdłuż zmiennej x_1 składa się z N komórek o stałej długości (l), równej

$$l = \frac{L}{N} \quad (2)$$

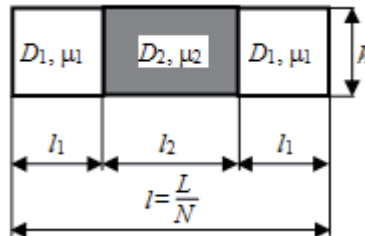
Każda komórka jest złożona z trzech części, dwóch materiałów o sztywnościach D_1, D_2 i masach na jednostkę powierzchni μ_1, μ_2 (rys. 2), przy czym

$$D_1 = D = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1^2)} = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad D_2 = \eta D, \quad D > 0, \quad \eta > 0, \quad \mu_1 = \mu = \rho h$$

$$\mu_2 = r\mu, \quad \mu > 0, \quad r \geq 0$$

gdzie:

η – dowolna dodatnia liczba rzeczywista większa od zera,
 r – dowolna dodatnia liczba rzeczywista większa bądź równa zero,
 μ – masą na jednostkę szerokości pasma [kg/m].



RYSUNEK 2. Wymiary komórki
 FIGURE 2. Dimensions of a cell

Widoczne jest, że przyjmujemy możliwość rozpatrywania bezmasowej części środkowej komórki. Długości części składowych komórki o numerze k wyznaczamy ze wzorów

$$l_1 = \xi_1 l, \quad l_2 = \xi_2 l$$

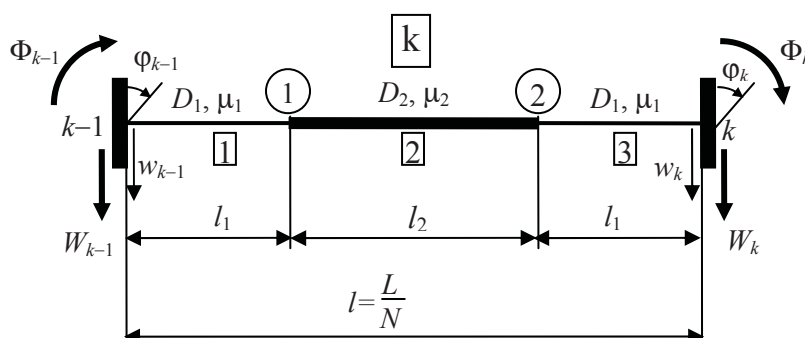
w których oznaczono

$$\xi_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k-1}{N-1} \right), \quad \xi_2 = \frac{k-1}{N-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, N, \quad l = 2l_1 + l_2 = \frac{L}{N}$$

Komórkę pasma można traktować jak element pręta o przekroju $F = h \times b$, $b = 1$ m. W celu uzyskania drgań własnych pasma należy wyznaczyć macierz sztywności (wzory transformacyjne) typowego elementu (komórki) prętowego o długości $l = 2l_1 + l_2$.

Wzory transformacyjne elementu pasma

Komórkę obustronnie utwierdzonego pasma możemy traktować jako utwierdzo-
ny pręt, o kolejnym numerze k , długości $l = \frac{L}{N}$, o zmiennych skokowo sztywności
i masie na jednostkę długości pręta (komórki), którego (której) podpory doznają
amplitud przemieszczeń (obrotów i przesunięć): $\varphi_{k-1}, \varphi_k, w_{k-1}, w_k$ (rys. 3).



RYSUNEK 3. Model komórki periodyczności zgodny z oznaczeniami stosowanymi w metodzie prze-
mieszczeń

FIGURE 3. Model of a periodic cell complying with the denotations used in the displacement method

Rozpatrzmy pręt o zmiennych masie i sztywności (rys. 3). Wzory transforma-
cyjne na amplitudy momentów: $\phi_1^1, \phi_1^2, \phi_2^2, \phi_2^3$, i amplitudy sił przywęzłowych:
 $W_1^1, W_1^2, W_2^2, W_2^3$, zależą od parametrów

$$\lambda_1 = \xi_1 \lambda, \quad \lambda_2 = \xi_2 \lambda \sqrt[4]{\frac{r}{\eta}}$$

gdzie

$$\lambda = l \sqrt[4]{\frac{\mu \omega^2}{D}} \quad (3)$$

a ω jest poszukiwaną częstotliwością drgań własnych.

Układ równań równowagi na amplitudy momentów i sił przywęzłowych zapi-
szemy w postaci

$$\phi_1^1 + \phi_1^2 = 0, \quad \phi_2^2 + \phi_2^3 = 0, \quad W_1^1 + W_1^2 = 0, \quad W_2^2 + W_2^3 = 0 \quad (4)$$

w której

$$\phi_1^1 = \frac{D}{\xi_1 l} \left[\beta_1 \varphi_{k-1} + \alpha_1 \varphi_1 + \delta_1 \frac{\Psi_{k-1}}{\xi_1} - \theta_1 \frac{\Psi_1}{\xi_1} \right]$$

$$\phi_1^2 = \frac{\eta D}{\xi_2 l} \left[\alpha_2 \varphi_1 + \beta_2 \varphi_2 + \theta_2 \frac{\Psi_1}{\xi_2} - \delta_2 \frac{\Psi_2}{\xi_2} \right]$$

$$\phi_2^2 = \frac{\eta D}{\xi_2 l} \left[\beta_2 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \delta_2 \frac{\Psi_1}{\xi_2} - \theta_2 \frac{\Psi_2}{\xi_2} \right]$$

$$\phi_2^3 = \frac{D}{\xi_1 l} \left[\alpha_1 \varphi_2 + \beta_1 \varphi_k + \theta_1 \frac{\Psi_2}{\xi_1} - \delta_1 \frac{\Psi_k}{\xi_1} \right]$$

$$W_1^1 = -\frac{D}{(\xi_1 l)^2} \left[\delta_1 \varphi_{k-1} + \theta_1 \varphi_1 + \varepsilon_1 \frac{\Psi_{k-1}}{\xi_1} - \gamma_1 \frac{\Psi_1}{\xi_1} \right]$$

$$W_1^2 = \frac{\eta D}{(\xi_2 l)^2} \left[\theta_2 \varphi_1 + \delta_2 \varphi_2 + \gamma_2 \frac{\Psi_1}{\xi_2} - \varepsilon_2 \frac{\Psi_2}{\xi_2} \right]$$

$$W_2^2 = -\frac{\eta D}{(\xi_2 l)^2} \left[\delta_2 \varphi_1 + \theta_2 \varphi_2 + \varepsilon_2 \frac{\Psi_1}{\xi_2} - \gamma_2 \frac{\Psi_2}{\xi_2} \right]$$

$$W_2^3 = \frac{D}{(\xi_1 l)^2} \left[\theta_1 \varphi_2 + \delta_1 \varphi_k + \gamma_1 \frac{\Psi_2}{\xi_1} - \varepsilon_1 \frac{\Psi_k}{\xi_1} \right]$$

przy czym kąty obrotu ψ są zdefiniowane następująco

$$\Psi_1 = \frac{w_1}{l}, \Psi_2 = \frac{w_2}{l}, \Psi_{k-1} = \frac{w_{k-1}}{l}, \Psi_k = \frac{w_k}{l}$$

a odpowiednie funkcje określone są wzorami ($i = 1, 2$):

$$\alpha_i = \frac{\lambda_i (\operatorname{ch} \lambda_i \sin \lambda_i - \cos \lambda_i \operatorname{sh} \lambda_i)}{1 - \operatorname{ch} \lambda_i \cos \lambda_i}, \beta_i = \frac{\lambda_i (\operatorname{sh} \lambda_i - \sin \lambda_i)}{1 - \operatorname{ch} \lambda_i \cos \lambda_i}, \theta_i = \frac{\lambda_i^2 (\operatorname{sh} \lambda_i \sin \lambda_i)}{1 - \operatorname{ch} \lambda_i \cos \lambda_i}$$

$$\delta_i = \frac{\lambda_i^2 (\operatorname{ch} \lambda_i - \cos \lambda_i)}{1 - \operatorname{ch} \lambda_i \cos \lambda_i}, \gamma_i = \frac{\lambda_i^3 (\operatorname{ch} \lambda_i \sin \lambda_i + \operatorname{sh} \lambda_i \cos \lambda_i)}{1 - \operatorname{ch} \lambda_i \cos \lambda_i}, \varepsilon_i = \frac{\lambda_i^3 (\operatorname{sh} \lambda_i + \sin \lambda_i)}{1 - \operatorname{ch} \lambda_i \cos \lambda_i}$$

(5)

Podane funkcje dotyczą pręta drgającego z pominięciem poprawki Rayleigh. Dalszy tok rozumowania nie zależy od uwzględnienia czy też pominięcia bezwładności obrotowej. W przypadku uwzględnienia bezwładności obrotowej funkcje (5) będą miały inną postać.

Układ równań (4) zapiszemy w postaci macierzowej

$$\mathbf{R}^k \mathbf{f} + \mathbf{R}_0 = 0$$

w której macierz sztywności i macierz momentów wyjściowych zapisujemy w postaci

$$\mathbf{R}^k = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{12} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & r_{34} \\ r_{14} & r_{24} & r_{34} & r_{44} \end{bmatrix}, \mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\beta_1}{\xi_1} \varphi_{k-1} + \frac{\delta_1}{\xi_1^2} \psi_{k-1} \\ \frac{\beta_1}{\xi_1} \varphi_k - \frac{\delta_1}{\xi_1^2} \psi_k \\ - \left(\frac{\delta_1}{\xi_1^2} \varphi_{k-1} + \frac{\varepsilon_1}{\xi_1^3} \psi_{k-1} \right) \\ \frac{\delta_1}{\xi_1^2} \varphi_k - \frac{\varepsilon_1}{\xi_1^3} \psi_k \end{bmatrix}, \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$$

$$r_{11} = r_{22} = \frac{\alpha_1}{\xi_1} + \frac{\eta \alpha_2}{\xi_2}, r_{12} = \frac{\eta \beta_2}{\xi_2}, r_{13} = \frac{\eta \theta_2}{\xi_2^2} - \frac{\theta_1}{\xi_1^2}, r_{14} = -\frac{\eta \delta_2}{\xi_2^2}$$

$$r_{23} = -r_{14}, r_{24} = -r_{13}, r_{33} = r_{44} = \frac{\gamma_1}{\xi_1^3} + \frac{\eta \gamma_2}{\xi_2^3}, r_{34} = -\frac{\eta \varepsilon_2}{\xi_2^3}$$

Rozwiązaniem układu równań (4) są przemieszczenia $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ zależne od przemieszczeń węzłów $k-1$ i k , tj. od $\varphi_{k-1}, \varphi_k, \psi_{k-1}, \psi_k$ następująco

$$\varphi_1 = A_1 \varphi_{k-1} + (n-1) B_1 \psi_{k-1} + C_1 \varphi_k + (n-1) D_1 \psi_k$$

$$\varphi_2 = C_1 \varphi_{k-1} - (n-1) D_1 \psi_{k-1} + A_1 \varphi_k - (n-1) B_1 \psi_k$$

$$\psi_1 = \frac{A_2}{n-1} \varphi_{k-1} + B_2 \psi_{k-1} + \frac{C_2}{n-1} \varphi_k + D_2 \psi_k$$

$$\psi_2 = -\frac{C_2}{n-1} \varphi_{k-1} + D_2 \psi_{k-1} - \frac{A_2}{n-1} \varphi_k + B_2 \psi_k$$

Współczynniki $A_1 \dots D_2$ macierzy odwrotnej $(\mathbf{K}^k)^{-1}$ dla danego elementu (komórki) o numerze k zależą od parametrów: k, N, η, r . Postać tych współczynników jest dość skomplikowana (każdy z nich zajmuje ok. jednej strony formatu A4) i niezbyt łatwa do wyznaczenia numerycznie, dlatego wzory tych współczynników zostaną w pracy pominięte.

Mając przemieszczenia \mathbf{f} , siły przywęzłowe dowolnego elementu wyznaczmy ze wzorów

$$\begin{aligned}\phi_{k-1}^k &= \frac{D}{\xi_1 l} \left[\alpha_1 \varphi_{k-1} + \beta_1 \varphi_1 + \theta_1 \frac{\Psi_{k-1}}{\xi_1} - \delta_1 \frac{\Psi_1}{\xi_1} \right] \\ \phi_k^k &= \frac{D}{\xi_1 l} \left[\beta_1 \varphi_2 + \alpha_1 \varphi_k + \delta_1 \frac{\Psi_2}{\xi_1} - \theta_1 \frac{\Psi_k}{\xi_1} \right] \\ W_{k-1}^k &= \frac{D}{(\xi_1 l)^2} \left[\theta_1 \varphi_{k-1} + \delta_1 \varphi_1 + \gamma_1 \frac{\Psi_{k-1}}{\xi_1} - \varepsilon_1 \frac{\Psi_1}{\xi_1} \right] \\ W_k^k &= -\frac{D}{(\xi_1 l)^2} \left[\delta_1 \varphi_2 + \theta_1 \varphi_k + \varepsilon_1 \frac{\Psi_2}{\xi_1} - \gamma_1 \frac{\Psi_k}{\xi_1} \right]\end{aligned}\quad (6)$$

Szczególnego potraktowania wymagają pierwszy i ostatni element, tj. dla $k = 1$ i $k = N$. Przy $k = 1$ spełnione są równości $\xi_1 = \frac{1}{2N}$, $\xi_2 = 0$, przy $k = N$ zaś $\xi_2 = 0$, $\xi_1 = \frac{1}{N}$. Pierwsza komórka ma stałą sztywność D i masę μ , ostatnia zaś – stałą sztywność $D_2 = \eta D$ i masę $\mu_2 = r\mu$. W zależności od podparcia pasma wzory transformacyjne dla pierwszej i ostatniej komórki podał Hetmański (2004, s. 84–85).

Macierz sztywności elementu (komórki). Macierz sztywności pasma

Wzory (6), po podstawieniu wyznaczonych przemieszczeń $\varphi_1, \varphi_2, \Psi_1, \Psi_2$ zapiszemy w postaci

$$\begin{aligned}\phi_{k-1}^k &= \frac{D}{l} \left(k_{11} \varphi_{k-1} + k_{12} \varphi_k + k_{13} \frac{\Psi_{k-1}}{2} + k_{14} \frac{\Psi_k}{2} \right) \\ \phi_k^k &= \frac{D}{l} \left(k_{21} \varphi_{k-1} + k_{22} \varphi_k + k_{23} \frac{\Psi_{k-1}}{2} + k_{24} \frac{\Psi_k}{2} \right)\end{aligned}$$

$$W_{k-1}^k l = \frac{D}{l} \left(k_{31} \Phi_{k-1} + k_{32} \Phi_k + k_{33} \frac{\Psi_{k-1}}{2} + k_{34} \frac{\Psi_k}{2} \right)$$

$$W_k^k l = -\frac{D}{l} \left(k_{41} \Phi_{k-1} + k_{42} \Phi_k + k_{43} \frac{\Psi_{k-1}}{2} + k_{44} \frac{\Psi_k}{2} \right)$$

lub w postaci macierzowej

$$\Phi^k = \frac{D}{L} (\mathbf{b}\mathbf{f} + \Phi_0^k) = \mathbf{K}^k \boldsymbol{\varphi}^k$$

w której oznaczono

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & -\frac{\delta_1}{\xi_1} & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 & \frac{\delta_1}{\xi_1} \\ \frac{\delta_1}{\xi_1} & 0 & -\frac{\varepsilon_1}{\xi_1^2} & 0 \\ 0 & -\frac{\delta_1}{\xi_1} & 0 & -\frac{\varepsilon_1}{\xi_1^2} \end{bmatrix}, \Phi_0^k = \begin{bmatrix} \alpha_1 \Phi_{k-1} + \theta_1 \Psi_{k-1} \\ \alpha_1 \Phi_k - \theta_1 \frac{\Psi_k}{\xi_1} \\ \frac{\theta_1 \Phi_{k-1}}{\xi_1} + \gamma_1 \frac{\Psi_{k-1}}{\xi_1^2} \\ -\frac{\theta_1 \Phi_k}{\xi_1} + \gamma_1 \frac{\Psi_k}{\xi_1^2} \end{bmatrix}$$

Ostatecznie możemy zapisać następujący wzór

$$\Phi^k = \mathbf{K}^k \boldsymbol{\varphi}^k$$

gdzie:

\mathbf{K}^k – macierz sztywności k -tego elementu,

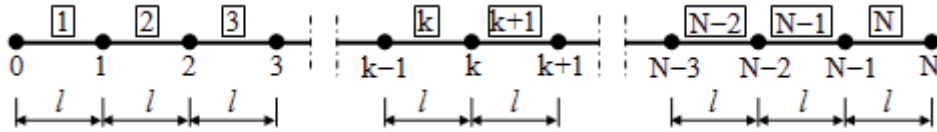
$$\mathbf{K}^k = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}, \Phi^k = \begin{bmatrix} \Phi_{k-1}^k \\ \Phi_k^k \\ W_{k-1}^k \\ W_k^k \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varphi}^k = \begin{bmatrix} \Phi_{k-1}^k \\ \Phi_k^k \\ \Psi_{k-1}^k \\ \Psi_k^k \end{bmatrix}$$

gdzie:

$$k_{11} = \frac{C_1 \beta_1}{2 \xi_1} - \frac{C_2 \delta_1}{n-1} \frac{1}{2 \xi_1^2}, k_{12} = \frac{A_1 \beta_1}{2 \xi_1} + \frac{\alpha_1}{2 \xi_1} - \frac{A_2 \delta_1}{n-1} \frac{1}{2 \xi_1^2}$$

$$\begin{aligned}
k_{13} &= -(n-1) \frac{D_1 \beta_1}{4\xi_1} + \frac{D_2 \delta_1}{(2\xi_1)^2}, \quad k_{14} = -(n-1) \frac{B_1 \beta_1}{4\xi_1} - \frac{\theta_1}{(2\xi_1)^2} + B_2 \delta_1 \frac{1}{(2\xi_1)^2} \\
k_{21} &= k_{12}, \quad k_{22} = k_{11}, \quad k_{23} = -k_{14} \\
k_{24} &= -k_{13}, \quad k_{31} = -\frac{C_1 \delta_1}{(2\xi_1)^2} + \frac{C_2 \varepsilon_1}{n-1} \frac{2}{(2\xi_1)^3}, \quad k_{32} = -\frac{A_1 \delta_1}{(2\xi_1)^2} - \frac{\theta_1}{(2\xi_1)^2} + \frac{A_2 \varepsilon_1}{n-1} \frac{2}{(2\xi_1)^3} \\
k_{33} &= (n-1) \frac{D_1 \delta_1}{2(2\xi_1)^2} - \frac{D_2 \varepsilon_1}{(2\xi_1)^3}, \quad k_{34} = -(n-1) \frac{B_1 \delta_1}{2(2\xi_1)^2} + \frac{\gamma_1}{(2\xi_1)^3} - B_2 \varepsilon_1 \frac{1}{(2\xi_1)^3} \\
k_{41} &= -k_{32}, \quad k_{42} = -k_{31}, \quad k_{43} = k_{34}, \quad k_{44} = k_{33} \tag{7}
\end{aligned}$$

Można łatwo wykazać, że $k_{31} = k_{13}$ i $k_{32} = k_{14}$, a więc macierz sztywności elementu jest symetryczna.



RYSUNEK 4. Schematyczny przekrój pasma płytowego
FIGURE 4. Schematic section of a plate band

Na rysunku 4 schematycznie przedstawiono przekrój pasma z dowolną liczbą komórek (N). Niewiadomymi wielkościami są uogólnione przemieszczenia węzłów (φ_k, w_k lub $\varphi_k, \psi_k = w_k/l$). Dla dowolnego węzła k ($1 \leq k \leq N-1$) możemy ułożyć dwa równania równowagi

$$\phi_k^k + \phi_k^{k+1} = 0, \quad W_k^k + W_k^{k+1} = 0, \quad 1 \leq k \leq N-1$$

które zawierają sześć nieznanymi uogólnionych przemieszczeń: $\varphi_{k-1}, \psi_{k-1}, \varphi_k, \psi_k, \varphi_{k+1}, \psi_{k+1}$. Łącznie otrzymujemy układ $2(N-1)$ równań o $2(N-1)$ niewiadomych. Układ ten zapiszemy w postaci

$$\mathbf{K}\varphi = 0$$

gdzie:

\mathbf{K} – macierz sztywności pasma o elementach będących funkcją poszukiwanej wartości λ , $\dim \mathbf{K} = 2(N-1) \times 2(N-1)$,

φ – jednokolumnowa macierz uogólnionych przemieszczeń, $\dim \varphi = 2(N-1) \times 1$.

Poniżej przedstawiono strukturę macierzy \mathbf{K} i φ (komórki niewypełnione są równe 0).

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|--|
| $\mathbf{K} =$ | a' | b ₂ | | | | | | | | c' | d ₂ | | | | | | | | |
| | b ₁ | a | b ₂ | | | | | | | d ₁ | c | d ₂ | | | | | | | |
| | | b ₁ | a | b ₂ | | | | | | | d ₁ | c | d ₂ | | | | | | |
| | | | b ₁ | ... | ... | | | | | | | d ₁ | ... | ... | | | | | |
| | | | | ... | ... | ... | | | | | | | ... | ... | ... | | | | |
| | | | | | ... | ... | b ₂ | | | | | | | ... | ... | d ₂ | | | |
| | | | | | | | b ₁ | a | b ₂ | | | | | | | d ₁ | c | d ₂ | |
| | | | | | | | b ₁ | a | b ₂ | | | | | | | d ₁ | c | d ₂ | |
| | | | | | | | | | b ₁ | a'' | | | | | | | d ₁ | c'' | |
| | | e' | f ₂ | | | | | | | | g' | h ₂ | | | | | | | |
| | | f ₁ | e | f ₂ | | | | | | | h ₁ | g | h ₂ | | | | | | |
| | | | f ₁ | e | f ₂ | | | | | | | h ₁ | g | h ₂ | | | | | |
| | | | | f ₁ | ... | ... | | | | | | | h ₁ | ... | ... | | | | |
| | | | | | ... | ... | ... | | | | | | | ... | ... | ... | | | |
| | | | | | | ... | ... | f ₂ | | | | | | ... | ... | h ₂ | | | |
| | | | | | | f ₁ | e | f ₂ | | | | | | | h ₁ | g | h ₂ | | |
| | | | | | | f ₁ | e | f ₂ | | | | | | | h ₁ | g | h ₂ | | |
| | | | | | | | f ₁ | e'' | | | | | | | | h ₁ | g'' | | |

| | |
|--------------|-----------------|
| $\varphi =$ | φ_1 |
| | φ_2 |
| | φ_3 |
| | ... |
| | ... |
| | φ_{N-3} |
| | φ_{N-2} |
| | φ_{N-1} |
| | ψ_1 |
| | ψ_2 |
| | ψ_3 |
| | ... |
| | ... |
| | ψ_{N-3} |
| | ψ_{N-2} |
| ψ_{N-1} | |

Macierz \mathbf{K} składa się z czterech podmacierzy o strukturze pasmowej. Poszczególne wyrazy są równe:

$$a^{(i)} = k_{12}^{(i)} + k_{12}^{(i+1)}, \quad a' = \frac{1}{2}\alpha_p(l, \mu, D) + k_{12}^{(2)}, \quad a'' = \frac{1}{2}\eta\alpha_k(l, r, \mu, \eta D) + k_{12}^{(N-1)}$$

$$b_1^{(i)} = k_{11}^{(i)}, \quad b_2^{(i)} = k_{11}^{(i+1)}, \quad c^{(i)} = k_{14}^{(i)} + k_{14}^{(i+1)}, \quad c' = -\frac{1}{4}\theta_p(l, \mu, D) + k_{14}^{(2)}$$

$$c'' = \frac{1}{4}\eta\theta_k(l, r, \mu, \eta D) + k_{14}^{(N-1)}, \quad d_1^{(i)} = -k_{13}^{(i)}, \quad d_2^{(i)} = k_{13}^{(i+1)}, \quad e^{(i)} = k_{32}^{(i)} + k_{32}^{(i+1)}$$

$$e' = -\frac{1}{4}\theta_p(l, \mu, D) + k_{32}^{(2)}, \quad e'' = \frac{1}{4}\eta\theta_k(l, r, \mu, \eta D) + k_{32}^{(N-1)}, \quad f_1^{(i)} = k_{31}^{(i)}$$

$$f_2^{(i)} = -k_{31}^{(i+1)}, g^{(i)} = k_{34}^{(i)} + k_{34}^{(i+1)}, g' = \frac{1}{8}\gamma_p(l, \mu, D) + k_{34}^{(2)}$$

$$g'' = \frac{1}{8}\eta\gamma_k(l, r, \mu, \eta D) + k_{34}^{(N-1)}, h_1^{(i)} = k_{31}^{(i)}, h_2^{(i)} = k_{31}^{(i+1)}$$

gdzie indeks górny w wyrazach $a-h$ oznacza numer wiersza podmacierzy, a w wyrazach k – numer komórki (elementu) pasma (a więc np. wyraz f_1 w trzecim wierszu podmacierzy \mathbf{K} wymaga wzięcia wyrazu k_{31} dla komórki 3, a wyraz f_2 – wyrazu k_{31} dla komórki 4). Wyrazy k dane są wzorami (7).

Ponieważ $k_{31} = k_{13}$ i $k_{32} = k_{14}$, więc $f_1 = d_2$ i $e = c$, a zatem macierz sztywności pasma jest symetryczna.

Wyrazy: $a', a'', c', c'', e', e'', g', g''$, są konsekwencją akapitu zawartego pod wzorami (6). W zależności od sposobu podparcia współczynniki: $\alpha_p, \theta_p, \gamma_p, \alpha_k, \theta_k, \gamma_k$, w nich zawarte mogą być równe α, θ, γ dla utwierdzenia, $\alpha', \theta', \gamma'$ dla podparcia swobodnego, $\alpha'', \theta'', \gamma''$ dla brzegu swobodnego (wzory – patrz Hetmański 2004, s. 84–85).

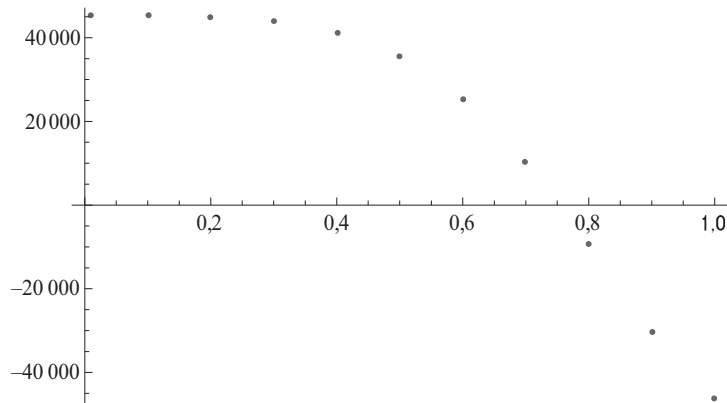
Wyznaczenie przybliżonych wartości częstości

Z warunku $Det\mathbf{K} = 0$ dla danych N, η, r możemy wyznaczyć kolejne wartości λ , a następnie ze wzoru (3) wartości częstości drgań własnych. Polega to oczywiście na przedstawieniu zależności funkcyjnej $Det\mathbf{K}(\lambda)$ i wyznaczeniu jej miejsc zerowych. Ponieważ macierz \mathbf{K} ma ogólnie duże rozmiary, jej wyrazy zależą w bardzo złożony sposób od funkcji danych wzorem (5), a dodatkowo funkcje te – od wielkości λ , więc taka zależność funkcyjna będzie niesłychanie złożona, a jej policzenie może zająć bardzo dużo czasu nawet komputerom z wydajnym procesorem (a prawdopodobnie zostanie przerwane z powodu całkowitego zajęcia pamięci operacyjnej). Dlatego najlepiej jest dla danych parametrów η, r i N przyjąć startową wartość λ_0 i przy danym kroku zwiększania wartości startowej, po zmianie znaku wartości wyznacznika, zastosować metodę bisekcji do znalezienia wartości takiej λ_k , że jest spełniony warunek $Det\mathbf{K}(\lambda_k) \simeq 0$.

Jako przykład wykonano obliczenia dla płyty 6-komórkowej, obustronnie utwierdzonej, dla której wybrano $\eta = 5$ i $r = 4$ (wartości zbliżone dla właściwości dobrego betonu i stali: $E_b \approx 40\,000$ MPa, $E_s \approx 200\,000$ MPa, $\rho_b \approx 2000$ kg/m³, $\rho_s \approx 8000$ kg/m³). Dla kolejnych wartości $\lambda = [0,01; 0,1; 0,2 \dots 0,9; 1]$ otrzymano wartości $Det\mathbf{K}(\lambda)$, pokazane na wykresie (rys. 5).

Na podstawie takiego wykresu można oszacować z dużą dokładnością, że $Det\mathbf{K} = 0$ dla $\lambda = 0,75555$. Należy pamiętać, że dla $\lambda = 0$ w celu policzenia wyznacznika powinno stosować się przejścia graniczne dla funkcji (5).

W podobny sposób można też przeprowadzić kontrolę poprawności przedstawionych w niniejszej pracy obliczeń. Jeśli założymy, że płyta jest jednorodna, czyli



RYSUNEK 5. Wartości wyznacznika $Det\mathbf{K}(\lambda)$
 FIGURE 5. Values of the determinant $Det\mathbf{K}(\lambda)$

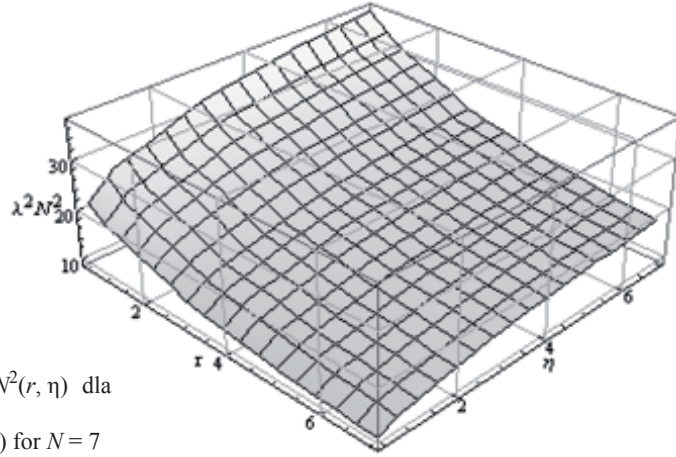
$\eta = 1$ i $r = 1$, to powinniśmy otrzymać wartości λ odpowiadające jednorodnemu pasmu płytowemu. Na przykład, zakładając $N = 8$, otrzymamy wykresy analogiczne do tego z rysunku 5, zależne od podparcia. Otrzymano następujące wartości λ :

- dla pasma płytowego obustronnie utwierdzonego $\lambda_1 = 0,59125$, $\lambda_2 = 0,98165$;
- dla pasma płytowego obustronnie przegubowo podpartego $\lambda_1 = 0,39270$, $\lambda_2 = 0,78540$;
- dla pasma płytowego utwierdzonego z jednej strony, a przegubowo podpartego z drugiej $\lambda_1 = 0,490825$, $\lambda_2 = 0,88357$;
- dla pasma płytowego utwierdzonego z jednej strony, a swobodnego z drugiej $\lambda_1 = 0,23439$, $\lambda_2 = 0,58677$.

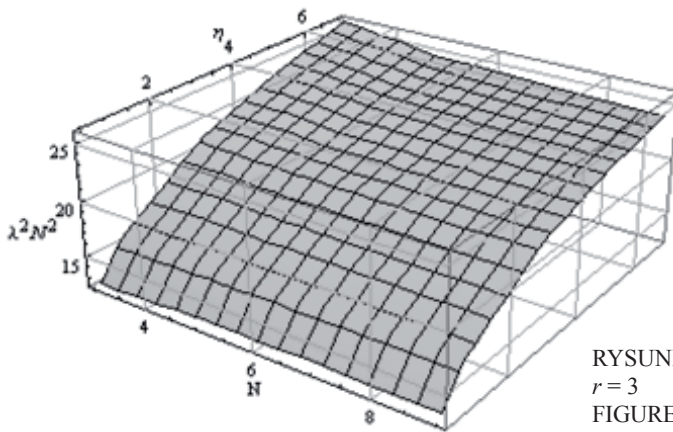
Z teorii drgań układów prętowych wiadomo, że dla belki obustronnie utwierdzonej dwa pierwsze współczynniki λ wynoszą 4,73 i 7,853, dla belki obustronnie podpartej swobodnie – π i 2π , dla belki utwierdzonej z jednej strony, a swobodnie podpartej z drugiej – 3,927 i 7,069, a dla belki wspornikowej – 1,875 i 4,694. Otrzymane wartości λ dla jednorodnych płyt 8-komórkowych są zatem dokładnie 8 razy mniejsze niż wartości dla belek potraktowanych jak struktura złożona z jednej komórki, bo przyjęta we wzorze (3) długość (l) dotyczy pojedynczej komórki. Świadczy to o poprawności opisanego modelu.

Poniżej zbadano zależność pierwszej wartości częstości drgań własnych (ω) od liczby komórek (N), współczynnika zmiany sztywności (η) i współczynnika zmiany masy (r). W każdym przypadku częstość drgań pasma wyznaczamy ze wzoru – patrz wzory (2) i (3).

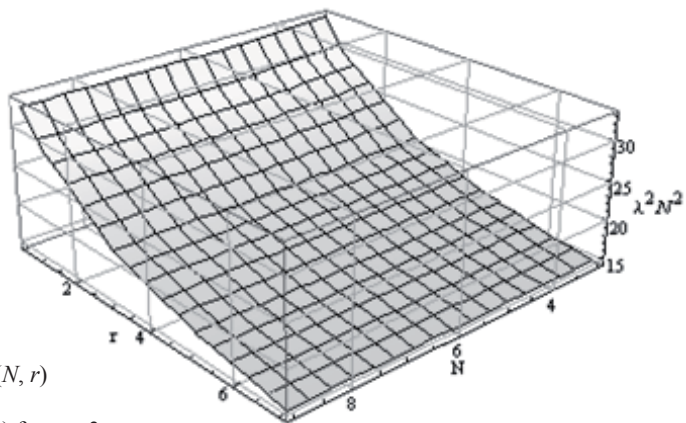
$$\omega = \frac{\lambda^2 N^2}{L^2} \sqrt{\frac{D}{\mu}}$$



RYSUNEK 6. Zależność $\lambda^2 N^2(r, \eta)$ dla $N = 7$
 FIGURE 6. Function $\lambda^2 N^2(r, \eta)$ for $N = 7$



RYSUNEK 7. Zależność $\lambda^2 N^2(N, \eta)$ dla $r = 3$
 FIGURE 7. Function $\lambda^2 N^2(N, \eta)$ for $r = 3$



RYSUNEK 8. Zależność $\lambda^2 N^2(N, r)$ dla $\eta = 3$
 FIGURE 8. Function $\lambda^2 N^2(N, r)$ for $\eta = 3$

Przy danych D , L , μ zmienność pierwszej wartości częstości drgań własnych można badać jako zmienność iloczynu $\lambda^2 N^2$. Rysunek 6 przedstawia zależność $\lambda^2 N^2(r, \eta)$ dla $N = \text{const} = 7$, rysunek 7 – zależność $\lambda^2 N^2(N, \eta)$ dla $r = \text{const} = 3$, zaś rysunek 8 – zależność $\lambda^2 N^2(N, r)$ dla $\eta = \text{const} = 3$.

Wnioski

Przedstawiony sposób rozwiązania zagadnienia drgań mikroniejednorodnego pasma płytowego pozwala na stosunkowo szybkie otrzymanie, z żadaną dokładnością, wartości częstości drgań przy dowolnej zmianie parametrów (r , η) charakteryzujących poszczególne komórki o danej długości (l) każda.

Na rysunku 6 widoczne jest, że wraz ze wzrostem masy jednostkowej wtrącenia w stosunku do masy jednostkowej osnowy (wzrost r) częstość drgań własnych maleje, a wraz ze wzrostem sztywności wtrącenia, w stosunku do sztywności osnowy (wzrost η), częstość drgań własnych rośnie.

W przypadku zmiany liczby komórek (N) i zmiany sztywności wtrącenia (η), przy danym rozkładzie masy (rys. 7), wraz ze wzrostem liczby komórek (N) zmiana wartości częstości jest nieznacząca, zaś rośnie przy wzroście sztywności wtrącenia.

Przy danym rozkładzie sztywności w komórce, a zmianie liczby komórek (N) i zmianie masy jej części środkowej (wtrącenie), można zaobserwować (rys. 8) spadek częstości drgań wraz ze wzrostem masy części środkowej, zaś przy wzroście liczby komórek (N) zmiana wartości częstości jest nieznacząca.

Powyższe wnioski są zgodne z intuicją inżynierską, co świadczy o poprawności ułożonego programu obliczeń.

Literatura

- Hetmański, K. (2004). *Zastosowanie Microsoft Excel w mechanice konstrukcji*. Warszawa: OWPW.
- Jemielita, G. (2001). Teorie płyt sprężystych. W C. Woźniak (red.), *Mechanika sprężystych płyt i powłok. Mechanika techniczna*, 8. (strony 148-330). Warszawa: PWN.
- Jemielita, G. (2011). Solutions to the problems of mechanics of non-homogeneous beams and plates. W K. Wilmański (red.), *Mathematical methods in continuum mechanics*. (strony 383-402). Łódź: Technical University of Łódź.
- Jędrzyński, J. (2014). Drgania swobodne mikroniejednorodnego cienkiego pasma płytowego. W G. Jemielita (red.), *Modelowanie struktur i konstrukcji inżynierskich*. (strony 133-152). Warszawa: Wyd. SGGW.
- Wierzbicki E., Kula D. i Mazewska M. (2014). O fourierowskiej realizacji tolerancyjnego modelowania zagadnień przewodnictwa ciepła prostych kompozytów periodycznych. W G. Jemielita (red.), *Modelowanie struktur i konstrukcji inżynierskich*. (strony 253-266). Warszawa: Wyd. SGGW.

Streszczenie

Drgania własne mikroniejednorodnego pasma płytowego. W pracy przedstawiono sposób obliczania częstości drgań własnych mikroniejednorodnego pasma płytowego. Sposób ten opiera się na metodzie przemieszczeń – jednej z klasycznych metod mechaniki budowli – i jest alternatywny w stosunku do technik homogenizacji. Przedstawiono również wyniki obliczeń uzyskane tym sposobem. Wyniki te są zgodne z intuicją inżynierską, co świadczy o poprawności ułożonego programu obliczeń.

Summary

Free vibrations of micro-non-homogeneous plate band. The paper presents a procedure of calculation of natural frequencies of a micro-non-homogeneous plate band. The procedure bases on the displacement method – one of the classical methods of mechanics of constructions – and is alternative to the homogenization techniques. There were also presented the results of calculation obtained with this procedure. These results are consistent with the engineer's intuition, what confirms that the calculation program is completed properly.

Authors' address:

Marek Chalecki, Grzegorz Jemielita
Katedra Inżynierii Budowlanej SGGW
ul. Nowoursynowska 159, 02-776 Warszawa
Poland
e-mails: marek_chalecki@sggw.pl, g.jemielita@gazeta.pl