MINUT 2021 (3), s. 42–51
ISSN 2719-3063

Marek BALCER[1]

[1]Katedra Zastosowań Matematyki i Metod Sztucznej Inteligencji, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

# Zasada odbicia w zadaniach geometrii analitycznej

**Streszczenie**. Artykuł zawiera trzy zadania z geometrii analitycznej wraz z ich rozwiązaniami związane z rozchodzeniem się fali świetlnej. Całość poprzedzona jest niezbędnym wstępem opisującym reguły rządzące zjawiskiem odbicia światła od płaskich powierzchni oraz przypomnieniem podstawowych obiektów geometrii analitycznej przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Materiał jest przeznaczony dla studentów posiadających niezbędną wiedzę z zakresu geometrii analitycznej i rachunku wektorowego.

**Słowa kluczowe:** geometria analityczna, zasada odbicia.

## 1. Wstęp

Zasada odbicia jest jednym z najstarszych praw fizyki opisanym już w czasach starożytnych. Prawo odbicia można uznać za najwcześniej poznane prawo fizyki. Prawdopodobnie znali je Platon i Arystoteles, lecz dopiero Euklides systematycznie je stosował. Heron z Aleksandrii uzasadnił to prawo, zauważając, że prowadzi ono do najkrótszej drogi światła. W ten sposób odkrył szczególny przypadek zasady Fermata [7].

Wspomniany wyżej Pierre de Fermat oraz równolegle Kartezjusz, zwani są ojcami geometrii analitycznej — geometrii, której obiekty można opisać równaniami w przyjętym przez nich prostokątnym układzie współrzędnych. Obecną postać geometrii analitycznej zawdzięczamy Leonardowi Eulerowi, który wprowadził jednolity język opisu obiektów. Geometria analityczna pozwala na odejście od klasycznej geometrii euklidesowej, wymagającej stosownych ilustracji graficznych rozważanych wywodów.

Autor niniejszego artykułu, z pełną świadomością nie umieszczając rysunków, odwołuje się do wyobraźni czytelnika, którego zmusza do należytego odczytania problemu ze zawartego, wystarczającego jego zdaniem, literackiego opisu. Ma to stanowić dodatkowo odpowiednie ćwiczenie, gdyż każdy może dokonać własnego indywidualnego autorskiego szkicu. Główny problem zadań z geometrii analitycznej właśnie polega na umiejętności zobrazowania sobie zadania. Dalsze etapy rozwiązania to tylko pokazanie biegłości w posługiwaniu się odpowiednim rzemiosłem obliczeniowym.

Autor korespondencyjny: M. Balcer (Marek.Balcer@polsl.pl).
Data wpłynięcia: 18.02.2021.

# 2. Zasada odbicia

W celu zobrazowania zasady odbicia koniecznym jest wprowadzenie poniższych definicji. Można je znaleźć np. w [1], [6].

*Normalna padania to prosta prostopadła do powierzchni odbijającej w punkcie padania promienia.*

*Kąt padania to kąt między promieniem padającym a normalną do powierzchni w punkcie padania.*

*Kąt odbicia to kąt między promieniem odbitym a normalną do powierzchni w punkcie padania.*

Zasadę odbicia można rozdzielić na dwie proste reguły.

**Zasada 1.**

*Kąt odbicia jest równy kątowi padania.*

**Zasada 2.**

*Promień światła padający, jak i promień odbity oraz normalna padania leżą w jednej płaszczyźnie.*

Do rozwiązywania zadań cytowanych w dalszej części artykułu bardziej przydatne jednak będą następujące własności wynikające z podanych zasad.

**Własność 1.**

*Płaszczyzna, w której leżą promień padania i promień odbity, jest prostopadła do płaszczyzny odbicia.*

**Własność 2.**

*Promień świetlny skierowany z punktu **P** w stronę płaszczyzny, odbijając się w punkcie **O** zwanym punktem odbicia, biegnie dalej wzdłuż prostej do której należą punkt **O** oraz punkt **P**', który jest punktem symetrycznym do **P** względem płaszczyzny odbicia (leżącym po drugiej stronie „lustra").*

# 3. Podstawowe obiekty geometrii analitycznej w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

## Obiekty pierwotne

Podstawowym obiektem geometrii analitycznej w $\mathbb{R}^3$ jest punkt $\mathbf{P}(x, y, z)$, gdzie $x, y, z$ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi nazywane jego współrzędnymi. Drugim pierwotnym obiektem, który w „dzisiejszych czasach" możemy nazwać obiektem wirtualnym, jest wektor swobodny oznaczony jako

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} = [u_x, u_y, u_z],$$

gdzie $u_x$, $u_y$, $u_z$ są współrzędnymi wektora.

Autor zakłada, iż czytelnik zna podstawowe pojęcia i własności rządzące algebrą wektorów, stąd dla przejrzystości opracowania są one tutaj pominięte. Zalecane jest korzystanie z wielu opracowań zawierających powyższy temat, jak np. prace [5], [4], [2], [3]. Skupimy się jednak na przypomnieniu podstawowych obiektów geometrii analitycznej, które są wykorzystywane przy rozwiązywaniu interesujących nas zadań.

## Obiekty złożone

Obiektem $\mathbf{O}_\varphi$ nazywamy zbiór punktów

$$\mathbf{O}_\varphi = \{\mathbf{P}\colon \varphi(\mathbf{P})\},$$

gdzie $\varphi$ jest dowolną formą zdaniową o dziedzinie należącej do $\mathbb{R}^3$.

### Prosta

Niech dane będą: punkt $\mathbf{P}_0(x_0, y_0, z_0)$ oraz niezerowy wektor $\overrightarrow{\mathbf{k}} = [a, b, c]$, zwany wektorem kierunkowym. Zbiór

$$\mathbf{l} \overset{def}{=} \{\mathbf{P}\colon (\overrightarrow{\mathbf{P_0P}}) || \overrightarrow{\mathbf{k}}) \vee (\mathbf{P} = \mathbf{P_0})\}$$

nazywamy prostą. Wykorzystując warunek równoległości wektorów, otrzymujemy:

$$\overrightarrow{\mathbf{P_0P}} = t \cdot \overrightarrow{\mathbf{k}}, \text{czyli } [x - x_0, y - y_0, z - z_0] = t \cdot [a, b, c], \text{dla } t \in \mathbb{R},$$

a stąd

$$\mathbf{l} = \{\mathbf{P}(x, y, z)\colon x = at + x_0, y = bt + y_0, z = ct + z_0,\ \ t \in \mathbb{R}\}.$$

Postać tę nazywamy **postacią parametryczną prostej**.
W przypadku, gdy $a$, $b$, $c$ są niezerowe, prostą możemy przedstawić w postaci proporcji

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c},$$

zwanej **postacią kanoniczną prostej**.

### Odcinek

Część prostej, leżącą pomiędzy dwoma różnymi punktami nazywamy odcinkiem. Jeżeli dane są dwa punkty $\mathbf{P_1}(x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{P_2}(x_2, y_2, z_2)$, to odcinek możemy zdefiniować następująco:

$$\overrightarrow{\mathbf{P_1P_2}} \overset{def}{=} \{P\colon \overrightarrow{\mathbf{P_1P}} = t\overrightarrow{\mathbf{P_1P_2}}, 0 \leqslant t \leqslant 1\}.$$

### Płaszczyzna

Niech dane będą: punkt $\mathbf{P}_0(x_0, y_0, z_0)$ oraz niezerowy wektor $\overrightarrow{\mathbf{n}} = [A, B, C]$, zwany wektorem normalnym. Zbiór

$$\boldsymbol{\pi} \overset{def}{=} \{\mathbf{P}\colon (\overrightarrow{\mathbf{P_0P}} \perp \overrightarrow{\mathbf{n}}) \vee (\mathbf{P} = \mathbf{P_0})\}$$

nazywamy płaszczyzną. Wykorzystując warunek prostopadłości wektorów, otrzymujemy

$$\overrightarrow{\mathbf{n}} \circ \overrightarrow{\mathbf{P_0P}} = [A, B, C] \circ [x - x_0, y - y_0, z - z_0] = 0,$$

czyli równanie

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

zwane **równaniem kanonicznym płaszczyzny**.

Przyjmując $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$, otrzymujemy równanie

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

zwane **równaniem ogólnym płaszczyzny**.

### Strona płaszczyzny

Płaszczyzna dzieli nam przestrzeń $\mathbb{R}^3$ na trzy rozłączne zbiory. Niech dane będą dwa punkty, $\mathbf{P_1}(x_1, y_1, z_1)$ i $\mathbf{P_2}(x_2, y_2, z_2)$, nienależące do płaszczyzny $\boldsymbol{\pi}$. Punkty te należą do tej samej strony płaszczyzny wtedy, gdy odcinek $\overline{\mathbf{P_1P_2}}$ łączący te punkty nie przecina płaszczyzny, tzn.

$$\overline{\mathbf{P_1P_2}} \cap \boldsymbol{\pi} = \emptyset.$$

**Twierdzenie 1.** *Niech dana będzie płaszczyzna* $\boldsymbol{\pi} : Ax + By + Cz + D = 0$. *Dwa punkty* $\mathbf{P_1}(x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{P_2}(x_2, y_2, z_2)$ *należą do tej samej strony płaszczyzny, gdy*

$$F_\pi(\mathbf{P_1})F_\pi(\mathbf{P_2}) > 0,$$

*gdzie* $F_\pi(\mathbf{P}) = F_\pi(x, y, z) = Ax + By + Cz + D$.

### Postać krawędziowa prostej

Dwie nierównoległe płaszczyzny posiadają część wspólną zwaną krawędzią. Krawędź ta jest prostą, czyli zbiór wszystkich punktów będących rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi_1} : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \boldsymbol{\pi_2} : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

jest zbiorem punktów tworzących prostą $\mathbf{l} = \boldsymbol{\pi_1} \cap \boldsymbol{\pi_2}$.

### Pęk płaszczyzn

Niech dana będzie prosta $\mathbf{l}$ zadana krawędziowo przez dwie nierównoległe płaszczyzny $\boldsymbol{\pi_1}$ i $\boldsymbol{\pi_2}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi_1} &: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \boldsymbol{\pi_2} &: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{aligned}$$

Niech $\alpha$ i $\beta$ będą dwoma liczbami rzeczywistymi. Utwórzmy nowe równanie postaci

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

Przekształcając, otrzymujemy

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)x + (\alpha B_1 + \beta B_2)y + (\alpha C_1 + \beta C_2)z + (\alpha D_1 + \beta D_2) = 0.$$

Jest to równanie nowej płaszczyzny

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

gdzie $A = (\alpha A_1 + \beta A_2),\ B = (\alpha B_1 + \beta B_2),\ C = (\alpha C_1 + \beta C_2),\ D = (\alpha D_1 + \beta D_2)$.

Każda płaszczyzna pęku zawiera prostą **l**, będącą częścią wspólną płaszczyzn $\boldsymbol{\pi_1}$ i $\boldsymbol{\pi_2}$. W przypadku gdy $\alpha \neq 0$, podstawiając $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$, otrzymujemy prostszą wersję równania pęku

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

Równanie to opisuje (generuje) wszystkie płaszczyzny pęku za wyjątkiem płaszczyzny $\boldsymbol{\pi_2}$.

# 4. Zasada odbicia w zadaniach

**Zadanie 1.** Dane są dwa punkty $\mathbf{A}(3, 2, 4)$ i $\mathbf{B}(1, 3, 2)$ oraz płaszczyzna

$$\boldsymbol{\pi} : 2x + y - 10 = 0.$$

Wyznacz wektor kierunku, wzdłuż którego należy skierować strumień światła z punktu **A** tak, aby po odbiciu od płaszczyzny $\boldsymbol{\pi}$ trafił do punktu **B**.
Jako pierwsze sprawdź, jakie warunki związane z położeniem zadanych obiektów powinny być spełnione, aby zadanie to posiadało rozwiązanie.

R o z w i ą z a n i e

Łatwo zauważyć, że oba punkty **A** i **B** powinny znajdować się po jednej stronie płaszczyzny. Zgodnie z twierdzeniem dotyczącym stron płaszczyzny (patrz wyżej) wartości funkcji $F(x, y, z) = 2x + y - 10$ w punktach **A** i **B** muszą spełniać warunek

$$F(\mathbf{A})F(\mathbf{B}) > \mathbf{0}.$$

Dla danych naszego zadania $F(\mathbf{A}) = -2$ oraz $F(\mathbf{B}) = -5$, a więc punkty leżą po tej samej stronie płaszczyzny $\boldsymbol{\pi}$.

Oznaczmy przez **O** punkt płaszczyzny $\boldsymbol{\pi}$, w którym promień światła skierowany z punktu **A** powinien się odbić od niej, aby trafić do punktu **B**. Zgodnie z zasadą odbicia kąty zawarte pomiędzy odcinkiem **OA** i prostą prostopadłą do płaszczyzny w punkcie **O** oraz odcinkiem **OB** i tą prostą muszą być równe, a cała płaszczyzna trójkąta **AOB** utworzonego przez promień świetlny musi być prostopadła do płaszczyzny $\boldsymbol{\pi}$.

Zauważmy jeszcze jedną ciekawą własność wynikającą z codziennych obserwacji. Jeżeli dwie osoby staną przed lustrem jedna w punkcie **A**, a druga w punkcie **B**, to osoba **A** widzi siebie w lustrze prostopadle w punkcie $\mathbf{A}'$, pozornie za płaszczyzną lustra w tej samej odległości w jakiej stoi przed lustrem, a także widzi osobę **B** za płaszczyzną lustra w punkcie $\mathbf{B}'$ symetrycznym do **B** względem lustra. Aby ją zobaczyć, musi skierować wzrok w kierunku pozornego punktu $\mathbf{B}'$. Tę obserwację potwierdza **własność 2** cytowana we wstępie.

Wykorzystując te obserwacje, stwierdzamy, że kierunek $\overrightarrow{\mathbf{AB}'}$ jest szukanym kierunkiem, w jakim należy skierować promień świetlny, by z punktu **A** trafił do punktu **B**, gdyż prosta wyznaczona przez niego, przecinając płaszczyznę $\boldsymbol{\pi}$, wyznacza jednoznacznie punkt odbicia **O**, dla którego wszystkie kąty pomiędzy prostymi **OA**, **OB** i $\mathbf{OB}'$ a prostą prostopadłą do płaszczyzny $\boldsymbol{\pi}$ w punkcie **O** są takie same.

Dokonajmy obliczeń. Szukamy współrzędnych punktu $\mathbf{B}'$. Ponieważ jest on punktem symetrycznym do **B** względem $\boldsymbol{\pi}$ musi należeć do prostej prostopadłej do $\boldsymbol{\pi}$, czyli do prostej o wektorze kierunkowym równym wektorowi normalnemu płaszczyzny, który wynosi $[2, 1, 0]$ oraz zawierającej punkt $\mathbf{B}(1, 3, 2)$.

Stąd $\mathbf{B}'$ jest postaci $(2t+1, t+3, 2)$, gdzie $t$ jest pewnym parametrem. Ponieważ jest on symetryczny do $\mathbf{B}(1,3,2)$ względem $\boldsymbol{\pi}$, środek odcinka $\mathbf{BB}' \in \boldsymbol{\pi}$. Współrzędne środka tego odcinka wynoszą $(\frac{2t+2}{2}, \frac{t+6}{2}, 2)$. Wstawiając je do równania naszej płaszczyzny, otrzymujemy równanie

$$2\Big(\frac{2t+2}{2}\Big) + \Big(\frac{t+6}{2}\Big) - 10 = 0,$$

a stąd otrzymujemy $t = 2$, czyli $\mathbf{B}'(5,5,2)$.

O d p o w i e d ź

Szukanym kierunkiem, w jakim z punktu $\mathbf{A}$ powinien zostać skierowany promień świetlny, jest kierunek wektora $\overrightarrow{\mathbf{AB}'}$, czyli wektor $[2,3,-2]$.

**Zadanie 2.** Dane są dwie nierównoległe płaszczyzny

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi_1}: &\quad 3x + y - 2z - 18 &= 0 \\ \boldsymbol{\pi_2}: &\quad -2x + 2y + z - 6 &= 0 \end{aligned}$$

oraz punkt $\mathbf{P}(2,0,1)$.

Znajdź wektor, wzdłuż jakiego należy skierować promień świetlny z punktu $\mathbf{P}$ w stronę płaszczyzny $\boldsymbol{\pi_1}$, aby po odbiciu od niej, a dalej od płaszczyzny $\boldsymbol{\pi_2}$ powrócił on do punktu $\mathbf{P}$.

Określ warunki, jakie muszą być spełnione, aby zadanie to było wykonalne.

R o z w i ą z a n i e

Załóżmy wstępnie, że zadanie to przy naszych danych jest rozwiązywalne. Oznacza to, że istnieją dwa punkty $\mathbf{O_1} \in \boldsymbol{\pi_1}$ oraz $\mathbf{O_2} \in \boldsymbol{\pi_2}$, które są punktami odbicia naszego promienia na odpowiednich płaszczyznach. Wraz z punktem $\mathbf{P}$ tworzą one trójkąt $\mathbf{PO_1O_2}$, który musi leżeć w płaszczyźnie prostopadłej do obydwu płaszczyzn $\boldsymbol{\pi_1}$ i $\boldsymbol{\pi_2}$. W przeciwnym przypadku promień świetlny nie powróciłby do punktu wyjścia.

Możemy zauważyć, że zadanie jest „tak jakby” symetryczne, tzn. promień świetlny musi przebyć tę samą drogę, gdy skierujemy go wpierw w kierunku płaszczyzny $\boldsymbol{\pi_1}$, a potem $\boldsymbol{\pi_2}$, jak i odwrotnie, tzn. wpierw w stronę $\boldsymbol{\pi_2}$, a potem w stronę $\boldsymbol{\pi_1}$, by powrócił do punktu $\mathbf{P}$.

Wektor kierunku, wyznaczający prostą wzdłuż której należy skierować promień świetlny jest zgodny z wektorem $\mathbf{PO_1}$, gdzie punkt $\mathbf{O_1}$ jest punktem wspólnym tej prostej i płaszczyzny $\boldsymbol{\pi_1}$. Zauważmy ponadto, że punkty odbicia $\mathbf{O_1}$ i $\mathbf{O_2}$ oraz punkty $\mathbf{P_1}'$ i $\mathbf{P_2}'$, symetryczne do punktu $\mathbf{P}$ odpowiednio względem płaszczyzn $\boldsymbol{\pi_1}$ i $\boldsymbol{\pi_2}$, muszą leżeć na jednej prostej.

Zatem nasze zadanie sprowadza się do znalezienia punktów symetrycznych do $\mathbf{P}$ względem zadanych płaszczyzn, które tworzą prostą (nazwijmy ją $\mathbf{l}$), a następnie punktu przebicia tej prostej przez płaszczyznę $\boldsymbol{\pi_1}$, co pozwala obliczyć poszukiwany wektor.

Przystąpmy do obliczeń. Wektor normalny $\overrightarrow{\mathbf{n_1}}$ płaszczyzny $\boldsymbol{\pi_1}$ to $[3,1,-2]$. Stąd punkt symetryczny względem punktu $P(2,0,1)$ musi mieć postać

$$\mathbf{P_1}'(x,y,z) = (3t+2, t, -2t+1), \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R}.$$

Środkiem odcinka $\mathbf{PP_1}'$ jest więc punkt

$$\Big(\frac{3t+4}{2}, \frac{t}{2}, \frac{-2t+2}{2}\Big)$$

należący do płaszczyzny $\boldsymbol{\pi_1}$, czyli

$$3\Big(\frac{3t+4}{2}\Big) + \Big(\frac{t}{2}\Big) - 2\Big(\frac{-2t+2}{2}\Big) - 18 = 0,$$

co daje $t = 2$, dalej $\mathbf{P_1}'(8, 2, -3)$.
Podobnie obliczamy $\mathbf{P_2}'(x, y, z) = (-2t + 2, 2t, t + 1)$ jako punkt symetryczny do $\mathbf{P}$ względem płaszczyzny $\boldsymbol{\pi_2}$, otrzymując równanie

$$-2\Big(\frac{-2t+4}{2}\Big) + 2\Big(\frac{2t}{2}\Big) + \Big(\frac{t+2}{2}\Big) - 6 = 0,$$

z którego otrzymujemy $t = 2$, czyli $\mathbf{P_2}'(-2, 4, 3)$.

Wektor $\overrightarrow{\mathbf{P_1}'\mathbf{P_2}'} = [-10, 2, 6]$ jest wektorem kierunkowym szukanej prostej, która przecinając się z płaszczyznami, wyznacza punkty odbicia. Punkty odcinka $\mathbf{P_1}'\mathbf{P_2}'$ dają się więc opisać jako punkty postaci

$$\mathbf{S_t} = \overrightarrow{\mathbf{P_1}'\mathbf{P_2}'}t + \mathbf{P_1}' = (-10t + 8, 2t + 2, 6t - 3),\ \text{gdzie } t \in \langle 0, 1\rangle.$$

Łatwo zauważyć, że $\mathbf{S_0} = \mathbf{P_1}'$ i $\mathbf{S_1} = \mathbf{P_2}'$, natomiast szukane punkty $\mathbf{O_1}$ i $\mathbf{O_2}$ leżące pomiędzy nimi muszą odpowiadać parametrom należącym do $(0, 1)$.
Rozwiązując nasze zadanie, poszukujemy punktu $\mathbf{O_1}$, aby znaleźć kierunek $\mathbf{PO_1}$, będący poszukiwanym kierunkiem strumienia światła. Podstawiając $\mathbf{S_t}$ do równania płaszczyzny $\boldsymbol{\pi_1}$, otrzymujemy współrzędne punktu $\mathbf{O_1}$, czyli

$$3(-10t + 8) + (2t + 2) - 2(6t - 3) - 18 = 0,$$

co daje $t = \frac{7}{20}$ i dalej $\mathbf{O_1}(\frac{45}{10}, \frac{27}{10}, -\frac{9}{10})$.
Wektor $\mathbf{PO_1}$ ma więc współrzędne

$$\Big[\frac{45}{10} - 2, \frac{27}{10}, -\frac{9}{10} - 1\Big] = \Big[\frac{25}{10}, \frac{27}{10}, -\frac{19}{10}\Big].$$

Pozbywając się ułamków, w odpowiedzi możemy umieścić, iż wektor zgodnie z którym należy skierować promień świetlny wymagany warunkami zadania jest równy $[25, 27, -19]$.

W zadaniu zostało zawarte dodatkowe pytanie dotyczące warunków, jakie muszą być spełnione, aby promień powrócił do punktu $\mathbf{P}$, czyli aby zadanie było wykonalne.
Analiza odcinka $\mathbf{P_1}'\mathbf{P_2}'$ wskazuje, iż punkty odbicia $\mathbf{O_1}$ i $\mathbf{O_2}$ muszą występować w odpowiedniej hierarchii, tzn. punkt $\mathbf{O_1}$ musi leżeć bliżej punktu $\mathbf{P_1}'$ niż punkt $\mathbf{O_2}$. Oznacza to, że parametry $t_1$, $t_2$ odpowiadające odpowiednio punktom $\mathbf{O_1}$ i $\mathbf{O_2}$ parametryzowanego odcinka $\mathbf{P_1}'\mathbf{P_2}'$ muszą spełniać warunek $t_1 < t_2$.

Powyżej obliczyliśmy parametr odpowiadający punktowi $\mathbf{O_1}$, otrzymując $t_1 = \frac{7}{20}$. Poszukując parametru odpowiadającemu punktowi $\mathbf{O_2}$ (co pozostawiam czytelnikowi), uzyskujemy $t_2 = \frac{14}{20}$, czyli żądana hierarchia punktów $\mathbf{O_1}$ i $\mathbf{O_2}$ jest zachowana, potwierdzając wykonywalność zadania.

O d p o w i e d ź
Zadanie jest wykonalne, a kierunek biegu promienia świetlnego wyznacza wektor $[25, 27, -19]$.

**Zadanie 3.** Niech dane będą dwa punkty $\mathbf{A}(1,-1,2)$ i $\mathbf{B}(1,0,5)$. Z punktu $\mathbf{A}$ promień świetlny podąża zgodnie z wektorem $[1,2,1]$. W punkcie $\mathbf{P}(1,0,-2)$ zaczepiono płaskie lustro. Jakie powinno być równanie płaszczyzny lustra, by promień świetlny odbity od niego trafił do punktu $\mathbf{B}$.

*Większość z nas pamięta, jak w dzieciństwie puszczało się „zajączki", czyli jak ustawić lusterko trzymane w dłoni, by skierować odbite od niego promienie słoneczne w upatrzone miejsce. Powyższe zadanie nawiązuje do tej zabawy.*

R o z w i ą z a n i e

Zauważmy, że zgodnie z zasadami odbicia wektor kierunku promienia padającego jak i odbitego leży w płaszczyźnie zwanej płaszczyzną rozchodzenia się światła, która jest prostopadła do płaszczyzny lustra. Ponieważ szukana płaszczyzna lustra zawiera punkt $\mathbf{P}$, musi ona należeć do pęku płaszczyzn tworzonych przez prostą $\mathbf{l}$ prostopadłą do płaszczyzny rozchodzenia światła i zawierającą ten punkt.
Wektor kierunkowy $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ tworzymy mnożąc wektorowo wektor kierunku padania $[1,2,1]$ i wektor $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = [1-1, 0-(-1), 5-2] = [0,1,3]$:

$$\overrightarrow{\mathbf{k}} = [1,2,1] \times [0,1,3] = [5,-3,1]$$

Równanie kanoniczne prostej $\mathbf{l}$ ma postać

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y}{-3} = \frac{z+2}{1},$$

co pozwala nam utworzyć postać krawędziową

$$\begin{cases} \frac{x-1}{5} = z+2 \\ \frac{y}{-3} = z+2 \end{cases}$$

i dalej

$$\begin{cases} x-5z-11=0 \\ y+3z+6=0. \end{cases}$$

Stąd pęk płaszczyzn prostej $\mathbf{l}$ może mieć postać

$$\boldsymbol{\pi}_\lambda : (x-5z-11) + \lambda(y+3z+6) = 0, \text{ gdzie } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Spośród płaszczyzn tego pęku należy wybrać te, które będą odbijać promień z punktu $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$.

Podobnie jak w zadaniu nr 1 zauważamy, że prosta, wzdłuż której podążać musi promień z punktu $\mathbf{A}$, musi przechodzić przez punkt $\mathbf{B}'$ symetryczny do punktu $\mathbf{B}$ względem płaszczyzny zawierającej lustro. Znajdźmy więc punkt $\mathbf{B}'_\lambda$ symetryczny do $\mathbf{B}$ względem płaszczyzny $\boldsymbol{\pi}_\lambda$ w zależności od parametru $\lambda$.
Płaszczyzna $\boldsymbol{\pi}_\lambda$ ma postać ogólną

$$\boldsymbol{\pi}_\lambda : x + \lambda y + (3\lambda-5)z + (6\lambda-11) = 0,$$

stąd wektorem normalnym tej płaszczyzny jest wektor

$$\overrightarrow{\mathbf{n}}_\lambda = [1, \lambda, 3\lambda-5].$$

Punkt $\mathbf{B'}_\lambda$, symetryczny do $\mathbf{B}$, należy więc do prostej o równaniu parametrycznym

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = \lambda t \\ z = (3\lambda - 5)t + 5, \ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Jednocześnie punkt ten musi należeć do prostej wyznaczającej bieg promienia z punktu $\mathbf{A}$, czyli wektor $\overrightarrow{\mathbf{AB'}_\lambda}$ musi być równoległy do zadanego kierunku wektora promienia światła.
Ponieważ $\overrightarrow{\mathbf{AB'}_\lambda} = [t, \lambda t + 1, (3\lambda - 5)t + 3]$ i $\overrightarrow{\mathbf{s}} = [1, 2, 1]$, zachodzić musi proporcja

$$\frac{t}{1} = \frac{\lambda t + 1}{2} = \frac{(3\lambda - 5) + 3}{1},$$

skąd otrzymujemy zależność pomiędzy $t$ i $\lambda$

$$t = \frac{1}{2 - \lambda},$$

którą podstawiamy do wzoru na $\mathbf{B'}_\lambda$ i otrzymujemy, że

$$\mathbf{B'}_\lambda = \Big(\frac{3-\lambda}{2-\lambda}, \frac{\lambda}{2-\lambda}, \frac{5-2\lambda}{2-\lambda}\Big).$$

Środek $\mathbf{O}$ odcinka $\mathbf{BB'}_\lambda$

$$\mathbf{O} = \frac{1}{2}\left(\frac{3-\lambda}{2-\lambda} + 1, \frac{\lambda}{2-\lambda}, \frac{5-2\lambda}{2-\lambda} + 5\right) = \left(\frac{5-2\lambda}{2(2-\lambda)}, \frac{\lambda}{2(2-\lambda)}, \frac{15-7\lambda}{2(2-\lambda)}\right)$$

musi należeć do płaszczyzny $\boldsymbol{\pi}_\lambda$, czyli

$$\frac{5-2\lambda}{2(2-\lambda)} + \lambda\frac{\lambda}{2(2-\lambda)} + (3\lambda - 5)\frac{15-7\lambda}{2(2-\lambda)} + (6\lambda - 11) = 0.$$

Sprowadzając ułamki do wspólnego mianownika, otrzymujemy równanie

$$\frac{-32\lambda^2 + 124\lambda - 114}{2(2-\lambda)} = 0,$$

którego rozwiązaniami są $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ oraz $\lambda_2 = \frac{19}{8}$, a więc dwie płaszczyzny analizowanego pęku spełniają kryteria zadania. Są nimi:

- płaszczyzna $2x + 3y - z - 4 = 0$ (dla $\lambda_1 = \frac{3}{2}$),
- płaszczyzna $8x + 19y + 17z + 26 = 0$ (dla $\lambda_2 = \frac{19}{8}$).

Czytelnik zapewne zapyta: dlaczego otrzymujemy dwa wyniki? Wynika to z tego, iż nie określiliśmy, która strona płaszczyzny jest stroną lustrzaną, a która jest tyłem lustra. W naszym zadaniu przyjęliśmy, że obie strony płaszczyzny są lustrzane, stąd dwie możliwości ustawienia.

O d p o w i e d ź
Aby skierować promień światła z punktu $\mathbf{A}$ do $\mathbf{B}$, nasze lustro należy ustawić w płaszczyźnie o wzorze $2x + 3y - z - 4 = 0$ lub $8x + 19y + 17z + 26 = 0$, stroną lustrzaną skierowaną w kierunku zadanych punktów.

## 5. Zakończenie

Powyżej rozwiązywane zadania są oryginalnymi zadaniami ułożonymi przez autora artykułu. Zachęcam wszystkich zainteresowanych do konstrukcji podobnych zadań wykorzystujących aparat geometrii analitycznej do rozwiązywania problemów z różnych innych dziedzin.

## Literatura

1. R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, *Feynmana wykłady z fizyki*, tom I, część 2, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1974, str. 11–36.
2. R. Grzymkowski, *MATEMATYKA zadania i odpowiedzi*, Wydawnictwo Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, Gliwice 2002, str. 175–203.
3. M. Lassak, *Matematyka dla studiów technicznych*, Wydawnictwo Supremum, Bydgoszcz 2014, str. 149–171.
4. K. Sieklucki, *Geometria i topologia*, część I, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1979.
5. K. Szałajko, *Wykłady matematyki*, tom I, część II, skrypt uczelniany nr 505, Politechnika Śląska, Gliwice 1974.
6. S. Szczeniowski, *Fizyka doświadczalna, część IV. Optyka*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1971, str. 15–89.
7. A.K. Wróblewski, *Historia fizyki. Od czasów najdawniejszych do współczesności*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006.