MINUT 2020 (2), s. 29–40
ISSN 2719-3063

Witold TOMASZEWSKI

Wydział Matematyki Stosowanej, Politechnika Śląska,
ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

Równania macierzowe I

Streszczenie. Celem tego artykułu jest prezentacja metod rozwiązywania równań wielomianowych postaci $f(X) = A$, gdzie X jest niewiadomą macierzą, A macierzą kwadratową stopnia 2, a $f(x)$ wielomianem o współczynnikach zespolonych.

Słowa kluczowe: macierze, wielomiany, równania macierzowe.

1. Wstęp

Praca została napisana z myślą o studentach kierunku matematyka, ale może być też materiałem uzupełniającym dla studentów innych kierunków. Zaprezentowane zostaną metody znajdowania rozwiązań równań macierzowych postaci $f(X) = A$, gdzie X jest poszukiwaną macierzą kwadratową, A macierzą kwadratową stopnia 2, a $f(x)$ wielomianem o współczynnikach zespolonych. Przez I oznaczamy macierz jednostkową. **Śladem** $\operatorname{tr}(X)$ macierzy X nazywamy sumę współczynników leżących na głównej przekątnej tej macierzy. **Wielomianem charakterystycznym macierzy** A nazywamy wielomian:

$$W_A(x) = \det(A - xI).$$

Wiadomo, że pierwiastki wielomianu charakterystycznego są **wartościami własnymi macierzy** A [2]. Jeśli A ma stopień 2, to $W_A(x) = x^2 - \operatorname{tr}(A)x + \det A$ [2].

Jeśli $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ jest wielomianem o współczynnikach zespolonych, a X jest macierzą kwadratową o współczynnikach zespolonych, to

$$f(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 I.$$

Będziemy korzystać z następujących faktów.

Twierdzenie 1 (Zasadnicze Twierdzenie Algebry, [1]). *Jeśli $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ jest wielomianem o współczynnikach zespolonych stopnia dodatniego, to istnieją liczby zespolone $z_1, \ldots, z_k$*

Autor korespondencyjny: W. Tomaszewski (Witold.Tomaszewski@polsl.pl).
Data wpłyniecia: 26.03.2020.

oraz dodatnie liczby całkowite $d_1, \ldots, d_k$, *że*

$$f(x) = a_n(x - z_1)^{d_1}(x - z_2)^{d_2} \cdots (x - z_k)^{d_k}.$$

Jeśli w powyższym rozkładzie $d_i > 1$, to pierwiastek z_i wielomianu $f(x)$ nazywamy **pierwiastkiem wielokrotnym**.

Twierdzenie 2. *Jeśli* $f(x)$ *jest wielomianem o współczynnikach zespolonych i* z_0 *jest dowolną liczbą zespoloną, to:*

$$f(x) = b_n(x - z_0)^n + b_{n-1}(x - z_0)^{n-1} + \ldots + b_1(x - z_0) + b_0,$$

gdzie $b_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ *dla* $k = 1, \ldots, n$, *a* $f^{(k)}(z_0)$ *jest pochodną* k*-tego rzędu wielomianu* $f(x)$ *w punkcie* z_0.

Dowód. Rozkład ten jest konsekwencją wzoru Taylora zastosowanego do funkcji wielomianowych [3]. $\square$

Twierdzenie 3 (Hamilton-Cayley, [2]). *Jeśli* $W_A(x) = \det(A - xI)$ *jest wielomianem charakterystycznym macierzy* A, *to* $W_A(A) = 0$.

Twierdzenie 4 (Twierdzenie o dzieleniu z resztą). *Dla każdej pary wielomianów* $f(x), g(x)$ *o współczynnikach zespolonych takich, że* st$(g(x)) > 0$ *istnieje dokładnie jedna para wielomianów* $q(x), r(x)$ *taka, że*

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x),$$

przy czym $\mathrm{st}(r(x)) < \mathrm{st}(g(x))$.[1] *Wielomian* $r(x)$ *nazywamy* ***resztą*** *z dzielenia* $f(x)$ *przez* $g(x)$.

2. Równania postaci $f(X) = 0$

Naszym celem w tym rozdziale jest wyznaczenie macierzy kwadratowych stopnia 2 spełniających równanie macierzowe:

$$f(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0I = 0.^2 \tag{1}$$

Zgodnie z twierdzeniem 1 istnieją liczby zespolone $z_1, \ldots, z_k$ takie, że $f(x) = a_n(x - z_1)^{d_1} \ldots (x - z_k)^{d_k}$.

Niech macierz A będzie rozwiązaniem równania $f(X) = 0$. Podzielmy z resztą wielomian $f(x)$ przez wielomian charakterystyczny macierzy A:

$$f(x) = q(x)W_A(x) + ax + b.$$

Wstawmy A za x:

$$f(A) = q(A)W_A(A) + aA + bI.$$

Ponieważ $f(A) = 0$ i $W_A(A) = 0$, to $aA + bI = 0$. Stąd albo $A = -\frac{b}{a}I$ albo $a = b = 0$. W pierwszym przypadku $-\frac{b}{a}$ musi być jednym z pierwiastków wielomianu $f(x)$ (bo w przeciwnym razie $A = -\frac{b}{a}I$

[1] przyjmujemy, że wielomian zerowy ma stopień $-\infty$.

[2] 0 oznacza tu macierz zerową stopnia 2.

nie byłoby rozwiązaniem równania $f(X) = 0$), a w drugim A jest pierwiastkiem wielomianu stopnia 2 dzielącego wielomian $f(x)$. Podsumowując każde rozwiązanie równania $f(X) = 0$ jest albo postaci $A = z_i I$, gdzie z_i jest pierwiastkiem wielomianu $f(x)$ albo spełnia równanie $(X - z_i I)(X - z_j I) = 0$, gdzie z_i, z_j są różnymi pierwiastkami wielomianu $f(x)$ oraz $\det(X - z_i I) = \det(X - z_j I) = 0$. Może się zdarzyć, że $z_i = z_j$ jeśli z_i jest pierwiastkiem wielokrotnym wielomianu $f(x)$.

Zajmijmy się teraz równaniem $(X - z_i I)(X - z_j I) = 0$ takim, że $\det(X - z_i I) = \det(X - z_j I) = 0$. Równanie to możemy zapisać w postaci:

$$(X - z_i I)(X - z_i I + (z_i - z_j)I) = 0,$$

które po wymnożeniu i przeniesieniu na drugą stronę daje:

$$(X - z_i I)^2 = (z_j - z_i)(X - z_i I).$$

Po podstawieniach $Y = X - z_i I$, $\alpha = z_j - z_i$ otrzymujemy

$$Y^2 = \alpha Y,$$

przy czym $\det Y = 0$, bo założyliśmy, że $\det(X - z_i I) = \det(X - z_j I) = 0$.

Teraz opiszemy jak rozwiązać równanie $Y^2 = \alpha Y$ przy założeniu, że $\det Y = 0$.

Twierdzenie 5. *Jeśli* $Y = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ *jest macierzą o współczynnikach zespolonych i o wyznaczniku równym zero, to* $Y^n = (x+t)^{n-1}Y$.

Dowód. Zastosujemy metodę indukcji matematycznej ze względu na wartość wykładnika n. Wzór jest oczywiście prawdziwy dla $n = 1$. Załóżmy teraz, że wzór jest prawdziwy dla wartości n. Wykażemy jego prawdziwość dla $n + 1$. Mamy $Y^{n+1} = Y^n Y$. Z założenia indukcji $Y^n = (x+t)^{n-1}Y$, więc $Y^{n+1} = (x+t)^{n-1}YY = (x+t)^{n-1}Y^2$. Obliczmy

$$Y^2 = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 + yz & xy + yt \\ xz + zt & yz + t^2 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ wyznacznik macierzy Y jest równy 0, to $xt = yz$, a to nam daje

$$Y^2 = \begin{bmatrix} x^2 + xt & xy + yt \\ xz + zt & xt + t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x+t)x & (x+t)y \\ (x+t)z & (x+t)t \end{bmatrix} =$$
$$(x+t)\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = (x+t)Y.$$

Wracając teraz do macierzy Y^{n+1} otrzymujemy:

$$Y^{n+1} = (x+t)^{n-1}Y^2 = (x+t)^{n-1}(x+t)Y = (x+t)^n Y,$$

a to kończy dowód. □

Przykład 1. Opisać macierze kwadratowe stopnia 2 spełniające równość $Y^2 = 0$ (zadanie 246 w [4]).

Rozwiązanie.
Jeśli macierz spełnia równanie $Y^2 = 0$, to $\det Y = 0$. Zatem na podstawie Twierdzenia 5 dla macierzy $Y = \begin{bmatrix} x & -y \\ z & t \end{bmatrix}$ otrzymujemy $Y^2 = (x+t)Y = 0$. To daje nam $x+t=0$ lub $Y=0$, więc rozwiązaniami tego równania są macierze:

$$Y = \begin{bmatrix} x & -y \\ z & -x \end{bmatrix},$$

dla których $-x^2 + yz = 0$. Po podstawieniu $x = \sqrt{yz}$ otrzymujemy:

$$Y = \begin{bmatrix} \sqrt{yz} & -y \\ z & -\sqrt{yz} \end{bmatrix},$$ [3]

dla dowolnych $y, z \in \mathbb{C}$.

Przykład 2. Wyznaczyć macierze kwadratowe stopnia 2 spełniające równość $Y^2 = \alpha Y$, gdzie $\alpha \neq 0$ jest dowolną niezerową stałą.

Rozwiązanie.
Mamy dwie możliwości: $\det Y \neq 0$ lub $\det Y = 0$. Jeśli $\det Y \neq 0$, to macierz Y jest odwracalna i możemy równanie $Y^2 = \alpha Y$ przemnożyć obustronnie przez Y^{-1} otrzymując $Y = \alpha I$.

Jeśli $\det Y = 0$, to korzystając z Twierdzenia 5 otrzymujemy $Y^2 = (x+t)Y = \alpha Y$, co daje nam dwie możliwości $x + t = \alpha$ lub $Y = 0$. Zatem rozwiązaniami równości $Y^2 = \alpha Y$ są macierze $Y = \alpha I$, $Y = 0$ oraz macierze postaci:

$$Y = \begin{bmatrix} x & -y \\ z & \alpha - x \end{bmatrix},$$

dla których $\alpha x - x^2 + yz = 0$. Rozwiązując równanie $-x^2 + \alpha x + yz = 0$ otrzymamy:

$$x_1 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4yz}}{2}, \quad x_2 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4yz}}{2}$$

i macierze te możemy zapisać w postaci:

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+4yz}}{2} & -y \\ z & \frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+4yz}}{2} \end{bmatrix},$$

dla dowolnych $y, z \in \mathbb{C}$.

Wracamy do równania (1). Jego rozwiązaniami są macierze X spełniające równanie $(X - z_i I)^2 = (z_j - z_i)(X - z_i I)$ (lub $(X - z_i I)^2 = 0$ jeśli z_i jest pierwiastkiem wielokrotnym wielomianu $f(x)$). Możemy więc zastosować przykłady 1 i 2 dla $Y = X - z_i I$ i $\alpha = z_j - z_i$.

[3] symbol $\sqrt{}$ rozumiemy w sensie zespolonym, a więc jest zbiorem dwóch wzajemnie przeciwnych liczb zespolonych.

Rozwiązania równania $f(X) = 0$

Niech $f(x) = a_n(x - z_1)^{d_1}(x - z_2)^{d_2} \dots (x - z_k)^{d_k}$ będzie wielomianem o współczynnikach zespolonych. Wtedy rozwiązaniami równania macierzowego $f(X) = 0$ są macierze:

- $X = z_i I$ dla $i = 1, \dots, k$,
- $X = \begin{bmatrix} \frac{z_j+z_i+\sqrt{(z_j-z_i)^2+4yz}}{2} & -y \\ z & \frac{z_j+z_i-\sqrt{(z_j-z_i)^2+4yz}}{2} \end{bmatrix}$ dla $i, j = 1, \dots, k$, $i > j$, $y, z \in \mathbb{C}$,
- $X = \begin{bmatrix} z_i + \sqrt{yz} & -y \\ z & z_i - \sqrt{yz} \end{bmatrix}$ dla $i = 1, \dots, k$, pod warunkiem, że z_i jest pierwiastkiem wielokrotnym wielomianu $f(x)$, $y, z \in \mathbb{C}$.

3. Przykłady

Przykład 3. Rozwiązać równanie $X^3 - 2X^2 + 2X = 0$.

Rozwiązanie.
Ponieważ $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x = x(x - 1)(x - 2)$, to każde rozwiązanie równania $X^3 - 2X^2 + 2X = 0$ spełnia jedno z poniższych równań:

- $X = 0$, $X - I = 0$, $X - 2I = 0$,
- $X(X - I) = 0$,
- $X(X - 2I) = 0$,
- $(X - I)(X - 2I) = 0$.

Na podstawie powyższej tabeli, rozwiązaniami równania $X^3 - 2X^2 + 2X = 0$ są macierze:

- $X = 0$, $X = I$, $X = 2I$,
- $X = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{1+4yz}}{2} & -y \\ z & \frac{1-\sqrt{1+4yz}}{2} \end{bmatrix}$,
- $X = \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{1 + yz} & -y \\ z & 1 - \sqrt{1 + yz} \end{bmatrix}$,
- $X = \begin{bmatrix} \frac{3+\sqrt{1+4yz}}{2} & -y \\ z & \frac{3-\sqrt{1+4yz}}{2} \end{bmatrix}$,

gdzie y, z są dowolnymi liczbami zespolonymi.

Przykład 4. Udowodnić, że jeśli macierz kwadratowa stopnia 2 spełnia równanie $X^k = 0$ dla pewnego k, to $X^2 = 0$ (zadanie 244 w [4]).

Rozwiązanie.
Korzystamy z Twierdzenia 5. Jeśli $X^k = 0$, to

$$X^k = (x+t)^{k-1} X = 0.$$

To jest możliwe tylko wtedy, gdy $(x+t)^{k-1} = 0$ lub $X = 0$. Otrzymujemy zatem $x + t = 0$ lub $X = 0$. W obu przypadkach mamy:

$$X^2 = (x+t)X = 0.$$

4. Równania $X^n = \alpha I$

W tym rozdziale pokażemy metody rozwiązywania równań $X^n = \alpha I$ dla $\alpha \neq 0$. Zaczniemy od przypomnienia opisu rozwiązań równania $x^n = 1$.

Twierdzenie 6. *Zespolonymi rozwiązaniami równania $x^n = 1$ są liczby $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}$, gdzie $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$. Ponadto liczba ε spełnia równanie:*

$$\varepsilon^{n-1} + \ldots + \varepsilon + 1 = 0.$$

Dowód. Dowód można znaleźć między innymi w [1]. □

Wniosek 1. *Jeśli liczba w jest pewnym rozwiązaniem równania $x^n = \alpha$, to wszystkie rozwiązania równania $x^n = \alpha$ są postaci $w_i = w\varepsilon^i$, gdzie $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, $i = 1, \ldots, n-1$.*

Dowód. Ponieważ $\varepsilon^n = 1$, to $w_i^n = (w\varepsilon^i)^n = w^n(\varepsilon^n)^i = \alpha$. Zatem liczby w_i są różnymi rozwiązaniami równania $x^n = \alpha$. □

Z poprzedniego rozdziału wynika opis rozwiązań równania $X^n = \alpha I$.

Rozwiązania równania $X^n = \alpha I$

Rozwiązaniami równania $X^n = \alpha I$ są macierze:

$$X = \begin{bmatrix} \frac{w(\varepsilon^i+\varepsilon^j)+\sqrt{(w\varepsilon^i-w\varepsilon^j)^2+4yz}}{2} & -y \\ z & \frac{w(\varepsilon^i+\varepsilon^j)-\sqrt{(w\varepsilon^i-w\varepsilon^j)^2+4yz}}{2} \end{bmatrix}, \; i > j,\; i,j \in \{0,\ldots,n-1\}, y,z \in \mathbb{C},$$

$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, a w jest dowolnym rozwiązaniem równania $x^n = \alpha$.

Przykład 5. Rozwiązać równanie $X^3 = I$.

Rozwiązanie.
Rozwiązaniami równania $x^3 = 1$ są liczby $1, \varepsilon, \varepsilon^2$, gdzie $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Zatem na

podstawie powyższego opisu rozwiązaniami tego równania są macierze:

$$X = \begin{bmatrix} \frac{(\varepsilon^i+\varepsilon^j)+\sqrt{(\varepsilon^i-\varepsilon^j)^2+4yz}}{2} & -y \\ z & \frac{(\varepsilon^i+\varepsilon^j)-\sqrt{(\varepsilon^i-\varepsilon^j)^2+4yz}}{2} \end{bmatrix}, \ i > j, \ i,j \in \{0,1,2\}, y,z \in \mathbb{C}.$$

5. Równania $f(X) = A$

Niech A będzie macierzą kwadratową, a $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ będzie wielomianem o współczynnikach zespolonych. W tym rozdziale rozważamy równanie:

$$f(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 I = A. \tag{2}$$

Niech λ będzie dowolną wartością własną macierzy A oraz niech $w_1, \ldots, w_n$ będą pierwiastkami równania $f(x) = \lambda$. Teraz wybierzmy jeden z pierwiastków $w = w_i$ i korzystając z Twierdzenia 2 zapiszemy wielomian $f(x)$ w postaci:

$$f(x) = b_n(x-w)^n + b_{n-1}(x-w)^{n-1} + \ldots + b_1(x-w) + b_0,$$

gdzie $b_k = \frac{f^{(k)}(w)}{k!}$ dla $k = 0, \ldots, n$. W szczególności $b_0 = f(w) = \lambda$. Zatem równanie (2) możemy przekształcić do postaci:

$$b_n(X-wI)^n + b_{n-1}(X-wI)^{n-1} + \ldots + b_1(X-wI) = A - \lambda I.$$

Macierz $A - \lambda I$ ma wyznacznik równy zero. Po podstawieniu $Y = X - wI$, $B = A - \lambda I$ nasze równanie przybiera postać

$$b_n Y^n + b_{n-1}Y^{n-1} + \ldots + b_1 Y = B,$$

gdzie $\det B = 0$. Z Twierdzenia 2 wynika, że istnieją liczby zespolone $z_1 = 0, z_2, \ldots, z_k$ i dodatnie liczby całkowite $c_1, \ldots, c_k$, że

$$b_n Y^{c_1}(Y - z_2 I)^{c_2} \cdots (Y - z_k I)^{c_k} = B$$

i ponieważ $\det B = 0$, to przynajmniej jeden z wyznaczników $\det(Y - z_i I)$ jest równy zero. Korzystając ponownie z Twierdzenia 2 otrzymujemy równanie

$$s_n(Y - z_i I)^n + s_{n-1}(Y - z_i I)^{n-1} + \ldots + s_1(Y - z_i I) = B.$$

Teraz korzystamy z Twierdzenia 5 i otrzymujemy:

$$(s_n \mathrm{tr}(Y - z_i I)^{n-1} + s_{n-1}\mathrm{tr}(Y - z_i I)^{n-2} + \ldots + s_1)(Y - z_i I) = B,$$

co po podstawieniu $Y - z_i I = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ daje nam układ równań:

$$\begin{cases} (s_n(x+t)^{n-1} + s_{n-1}(x+t)^{n-1} + \ldots + s_1)x = a \\ (s_n(x+t)^{n-1} + s_{n-1}(x+t)^{n-1} + \ldots + s_1)y = b \\ (s_n(x+t)^{n-1} + s_{n-1}(x+t)^{n-1} + \ldots + s_1)z = c \\ (s_n(x+t)^{n-1} + s_{n-1}(x+t)^{n-1} + \ldots + s_1)t = d. \end{cases}$$

Można dalej kontynuować opis rozwiązywania takich równań, ale wolimy to zobrazować na przykładach.

Uwaga 1. W metodzie opisanej powyżej możemy wybrać dowolną wartość własną macierzy A. W praktyce wybieramy wartość, która jest najkorzystniejsza w dalszym toku rozwiązywania równania. Musimy natomiast przeanalizować rozwiązania dla wszystkich wartości w_i, spełniających równanie $f(w_i) = \lambda$, gdyż dla każdej z tych wartości macierz, która jest rozwiązaniem ma wartość własną w_i.

Przykład 6. Rozwiązać równanie $X^{100} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie.

Ponieważ wyznacznik macierzy $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ jest równy 0, to $\det X = 0$ i możemy zastosować twierdzenie 5.

Jeśli $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$, to

$$X^{100} = (x+t)^{99}X = (x+t)^{99}\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

co daje nam układ równań:

$$\begin{cases} (x+t)^{99}x = 0, \\ (x+t)^{99}y = 1, \\ (x+t)^{99}z = 0, \\ (x+t)^{99}t = 1. \end{cases}$$

Z równania drugiego wynika, że $(x+t)^{99} \neq 0$, więc z równań pierwszego i trzeciego otrzymujemy $x = z = 0$, a z równań drugiego i czwartego $y = t$. Podstawiając $x = 0$ do równania czwartego otrzymujemy $t^{100} = 1$. To ostanie równanie ma w ciele liczb zespolonych sto rozwiązań o postaci:

$$t_k = \cos\frac{2k\pi}{100} + i\sin\frac{2k\pi}{100} = \cos\frac{k\pi}{50} + i\sin\frac{k\pi}{50},$$

dla $k = 0, 1, \ldots, 99$. Zatem wyjściowe równanie ma dokładnie sto różnych rozwiązań:

$$X_k = \begin{bmatrix} 0 & \cos\frac{k\pi}{50} + i\sin\frac{k\pi}{50} \\ 0 & \cos\frac{k\pi}{50} + i\sin\frac{k\pi}{50} \end{bmatrix},$$

dla $k = 0, 1, \ldots, 99$.

Przykład 7. Rozwiązać równanie $X^2 - 2X + 2I = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie.

Wprowadźmy oznaczenie $f(x) = x^2 - 2x + 2$ (jest to wielomian po lewej stronie równania). Wielomianem charakterystycznym macierzy $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ jest $W_A(x) = x^2 - 3x + 2$. Jego pierwiastkami są wartości własne macierzy A: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Musimy teraz wybrać jedną z tych wartości. Korzyst-

niejszym wyborem jest $\lambda = 1$ gdyż równanie $f(x) = x^2 - 2x + 2 = 1$ ma jedno rozwiązanie $x = 1$. My jednak wybierzemy $\lambda = 2$, żeby w pełni zaprezentować sposób rozwiązywania takich równań. Musimy teraz rozwiązać równanie $x^2 - 2x + 2 = 2$. Po odjęciu stronami 2 otrzymujemy $x^2 - 2x = x(x-2) = 0$, więc rozwiązaniami tego równania są liczby $w_1 = 2$ i $w_2 = 0$. Będziemy poszukiwać rozwiązań w obu przypadkach. W pierwszym $\det(X - 2I) = 0$, a w drugim $\det X = 0$.
(a) Najpierw zajmiemy się przypadkiem $\det(X - 2I) = 0$, czyli wybieramy $w = w_1 = 2$.

- Zapisujemy wielomian $f(x) = x^2 - 2x + 2$ jako kombinację potęg $x - w = x - 2$. W tym celu używamy wzoru Taylora (twierdzenie 2):

  -obliczamy kolejne pochodne wielomianu $f(x)$: $f^{(0)}(x) = f(x)$, $f^{(1)}(x) = f'(x) = 2x - 2$, $f^{(2)}(x) = f''(x) = 2$,

  -obliczamy wartości pochodnych w punkcie 2: $f^{(0)}(2) = 2$, $f(1)(2) = 2$, $f^{(2)}(2) = 2$,

  -$f(x) = \frac{2}{2!}(x-2)^2 + \frac{2}{1!}(x-2) + \frac{2}{0!} = (x-2)^2 + 2(x-2) + 2$.

- Nasze równanie przybiera postać $(X - 2I)^2 + 2(X - 2I) + 2I = A$, którą możemy przekształcić do $(X - 2I)^2 + 2(X - 2I) = A - 2I = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

- Ponieważ $\det(X - 2I) = 0$, to otrzymujemy $\mathrm{tr}(X - 2I)(X - 2I) + 2(X - 2I) = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$. A stąd $(\mathrm{tr}(X - 2I) + 2)(X - 2I) = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

- Niech $X - 2I = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$. Wtedy powyższe równanie daje nam układ równań:

$$\begin{cases} (x + t + 2)x = -3, \\ (x + t + 2)y = 3, \\ (x + t + 2)z = -2, \\ (x + t + 2)t = 2. \end{cases}$$

  Ponieważ $(x + t + 2) \neq 0$, to $x = -y$, $z = -t$, $2x + 3t = 0$. Stąd $x = -\frac{3}{2}t$ i możemy tą zależność podstawić do ostatniego równania. Otrzymamy wtedy $\left(-\frac{3}{2}t + t + 2\right) t = 2$. Po przekształceniu otrzymujemy $t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2 = 0$. Stąd $t = 2$. To daje nam rozwiązanie $X = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} + 2I = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$.

(b) Teraz rozważmy przypadek $\det X = 0$, czyli przyjmujemy $w = 0$.

- Zapisujemy wielomian $f(x) = x^2 - 2x + 2$ jako kombinację potęg $x - 0$: $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

- Nasze równanie przybiera postać $X^2 - 2X = A - 2I = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

- Ponieważ $\det X = 0$, to otrzymujemy $(\mathrm{tr}(X) - 2)X = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

- Dla $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} (x+t-2)x = -3, \\ (x+t-2)y = 3, \\ (x+t-2)z = -2, \\ (x+t-2)t = 2. \end{cases}$$

- Rozwiązując ten układ podobnie jak poprzednio otrzymamy $x = 3, y = -3, z = 2, t = -2$. Zatem w tym przypadku rozwiązaniem jest macierz:

$$X = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązaniami równania $X^2 - 2X + 2I = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ **są macierze** $X_1 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, $X_2 = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

6. Zadania do samodzielnego rozwiązania.

Zadanie 1. Znaleźć wszystkie macierze X spełniające równanie.

a) $X^{30} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. **b)** $X^{40} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. **c)** $X^{50} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

d) $X^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{10}$. **e)** $X^{18} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{18}$. **f)** $X^{14} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{14}$.

Zadanie 2. Rozwiązać równanie $X^3 - 2X^2 - X - 2I = 0$.

Zadanie 3. Rozwiązać równanie $X^7 = 64X$.

Zadanie 4. Rozwiązać równania

a) $X^3 = -I$. **b)** $X^4 = I$. **c)** $X^6 = I$.

Zadanie 5. Rozwiązać równania

a) $X^2 + 6X + 8I = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$. **b)** $X^2 - 2X - I = \begin{bmatrix} 40 & -14 \\ -21 & 5 \end{bmatrix}$.

c) $X^3 - 4X^2 + 3X + I = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$. **d)** $X^3 + 3X^2 + 3X + 3I = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Zadanie 6. Udowodnić, że jeśli X jest macierzą 2×2 o współczynnikach rzeczywistych i wyznaczniku 0, spełniającą równanie $X^k = X$ dla pewnej liczby naturalnej k, to $X^3 = X$.

7. Odpowiedzi do zadań

Zadanie 1.

a) Brak rozwiązań.

b) $X = \begin{bmatrix} \cos\frac{k\pi}{20} + i\sin\frac{k\pi}{20} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 39\}$.

c) $X = \frac{\sqrt[50]{2}}{2}\begin{bmatrix} a & -a \\ -a & a \end{bmatrix}$, gdzie $a = \cos\frac{(2k+1)\pi}{50} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{50}$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 49\}$.

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{10} = \begin{bmatrix} 2^9 & 2^9 \\ 2^9 & 2^9 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$, gdzie $a = \cos\frac{k\pi}{5} + i\sin\frac{k\pi}{5}$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{18} = \begin{bmatrix} 2^{18} & -2^{18} \\ -2^{18} & 2^{18} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} a & -a \\ -a & a \end{bmatrix}$, $a = \cos\frac{k\pi}{9} + i\sin\frac{k\pi}{9}$, $k \in \{0, \ldots, 17\}$.

f) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{14} = \begin{bmatrix} 2^{13} & -2^{13} \\ -2^{13} & 2^{13} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} a & -a \\ -a & a \end{bmatrix}$, $a = \cos\frac{k\pi}{7} + i\sin\frac{k\pi}{7}$, $k \in \{0, \ldots, 13\}$.

Zadanie 2. I, $-I$, $-2I$, $X = \begin{bmatrix} \sqrt{1-yz} & y \\ z & -\sqrt{1-yz} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} \frac{-3+\sqrt{1-4yz}}{2} & y \\ z & \frac{-3-\sqrt{1-4yz}}{2} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{9-4yz}}{2} & y \\ z & \frac{-1-\sqrt{9-4yz}}{2} \end{bmatrix}$.

Zadanie 3. Dla $\det X = 0$: $X = \begin{bmatrix} \varepsilon^k + \sqrt{\varepsilon^{2k} + yz} & -y \\ z & \varepsilon^k - \sqrt{\varepsilon^{2k} + yz} \end{bmatrix}$ gdzie $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ lub $X = 0$.

Dla $\det X \neq 0$: $X = 2\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon^i+\varepsilon^j+\sqrt{(\varepsilon^i-\varepsilon^j)^2+4yz}}{2} & -y \\ z & \frac{\varepsilon^i+\varepsilon^j-\sqrt{(\varepsilon^i-\varepsilon^j)^2+4yz}}{2} \end{bmatrix}$ gdzie $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$, $i, j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, $i > j$.

Zadanie 4.

a) $X = -\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon^i+\varepsilon^j+\sqrt{(\varepsilon^i-\varepsilon^j)^2+4yz}}{2} & -y \\ z & \frac{\varepsilon^i+\varepsilon^j-\sqrt{(\varepsilon^i-\varepsilon^j)^2+4yz}}{2} \end{bmatrix}$ gdzie $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ dla $i, j = 0, 1, 2$, $i > j$.

b) $X = \begin{bmatrix} \frac{i^k+i^j+\sqrt{(i^k-i^j)^2+4yz}}{2} & -y \\ z & \frac{i^k+i^j-\sqrt{(i^k-i^j)^2+4yz}}{2} \end{bmatrix}$ dla $k, j = 0, 1, 2, 3$, $k > j$.

c) $X = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon^i+\varepsilon^j+\sqrt{(\varepsilon^i-\varepsilon^j)^2+4yz}}{2} & -y \\ z & \frac{\varepsilon^i+\varepsilon^j-\sqrt{(\varepsilon^i-\varepsilon^j)^2+4yz}}{2} \end{bmatrix}$ gdzie $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi}{6}$, $i, j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, $i > j$.

Zadanie 5.

a) $X = \begin{bmatrix} -2 \pm \sqrt{3} & -2 \pm 2\sqrt{3} \\ \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} & -2 \pm \sqrt{3} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} -4 \pm \sqrt{3} & 2 \pm 2\sqrt{3} \\ \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} & -4 \pm \sqrt{3} \end{bmatrix}$.

b) $X = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

c) $X = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} 1-2i & 2i \\ -i & 1+i \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} 1+2i & -2i \\ i & 1-i \end{bmatrix}$.

d) $X = \begin{bmatrix} -2\varepsilon - 1 & 2\varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon - 1 \end{bmatrix}$ gdzie ε jest dowolnym rozwiązaniem równania $x^3 = 1$.

Zadanie 6. Jeśli $\det X = 0$, to równanie $X^k = X$ przybiera postać $(\mathrm{tr}(X))^{k-1}X = X$. Stąd $(\mathrm{tr}(X))^{k-1} = 1$ lub $X = 0$. Ponieważ X ma współczynniki rzeczywiste, to równanie $(\mathrm{tr}(X))^{k-1} = 1$ ma rozwiązanie 1 lub -1. Wtedy $X^3 = (\mathrm{tr}(X))^2 X = X$.

Literatura

1. A. I. Kostrikin, *Wstęp do algebry, Tom 1, Podstawy algebry*, PWN, Warszawa 2011.
2. A. I. Kostrikin, *Wstęp do algebry, Tom 2, Algebra liniowa*, PWN, Warszawa 2011.
3. F. Leja, *Funkcje zespolone*, PWN, Warszawa 2006.
4. S. Przybyło, A. Szlachtowski, *Algebra i wielowymiarowa geometria analityczna w zadaniach*, WNT, Warszawa 1992.