

Andrzej MISZCZAK

Gdynia Maritime University (Uniwersytet Morski w Gdyni)

## THE EFFECT OF A SURFACE ROUGHNESS ON LOAD CARRYING CAPACITY IN SLIDE JOURNAL BEARING LUBRICATED WITH OIL OF NON-NEWTONIAN PROPERTIES

### Wpływ chropowatości powierzchni na siłę nośną w poprzecznych łożyskach ślizgowych smarowanych olejem o nienewtonowskich właściwościach

**Abstract:** *The Author presents the method that taking account an influence of surface roughness on both flow and operating parameters of a slide journal bearing in the paper. For this purpose, the expected value for the gap height function should be determined. The expected value is then the most probable value of the height of the lubrication gap. There are presented the results of analytical and numerical calculations of flow and operating parameters in slide journal bearings. Numerical calculations were performed using the finite difference method as well as own calculation procedures and the Mathcad 15 software.*

**Keywords:** random changes in the gap, apparent viscosity, expected values

**Streszczenie:** *W prezentowanej pracy Autor przedstawia metodę uwzględniania wpływu chropowatości powierzchni na parametry przepływowe i eksploatacyjne łożysk ślizgowych. W tym celu wyznacza się wartość oczekiwaną dla funkcji wysokości szczeliny. Wartość oczekiwana jest wtedy najbardziej prawdopodobną wartością wysokości szczeliny smarnej. W pracy przedstawione są wyniki obliczeń analitycznych i numerycznych parametrów przepływowych i eksploatacyjnych w poprzecznych łożyskach ślizgowych. Obliczenia numeryczne wykonano wykorzystując metodę różnic skończonych, własne procedury obliczeniowe i oprogramowanie Mathcad 15.*

**Słowa kluczowe:** losowe zmiany szczeliny, lepkość pozorna, wartości oczekiwane

## 1. Introduction

Majority of authors solving the problem of hydrodynamic lubrication assume that bearing sliding surfaces are smooth [3-6, 10, 13, 14, 15, 17,18]. In fact, the surfaces of the slide bearings are not and there is always a roughness of the surface to be considered. Until now, the impact of surface roughness on the operating parameters of the slide bearing has been considered stochastically in the Reynolds type equation [5, 10, 11, 14, 15]. In order to take into account changes in the random height of the lubrication gap, whether under the influence of surface roughness changes or a randomly changing load, the operational parameters of the slide journal bearings were superimposed by the mathematical hope operator  $En(*)$  (also known as an expected value) for both sides of the Reynolds type equations. A stochastic form of the Reynolds type equation can be obtained, in this way.

The method proposed in this paper takes into account the effect of the roughness surface sliding on the flow and operating parameters of slide bearings, inter alia through stochastic changes in the lubrication gap height and changes in dynamic viscosity. In this method, it is necessary to know the random changes in the height of the lubrication gap. Random changes in the lubricant gap height have such direct and indirect impact on the lubrication parameters as: velocity vector components, temperature, pressure, load carrying capacity and friction forces. This direct impact is obtained by changing the values of the integration limits in which the height of the lubrication gap occurs. The indirect one is the result of a random change in the dynamic viscosity of the lubricating liquid which then randomly affects the change of friction forces as well as pressure. In order to better explain this phenomenon, it should be noted that with the increase (decrease) in the random gap height, the flow velocity of the lubricating liquid in the gap decreases (increases). We then get a decrease (increase) in the shear rate. Due to the fact that the lubricating liquid may have non-Newtonian properties [1, 2, 4, 5, 7, 9, 14-18], we will get an increase (decrease) in viscosity finally.

The aim of the research carried out in this paper is to determine the impact of a randomly variable lubrication gap in slide journal bearings on the values of lubrication parameters such as viscosity of the lubricating liquid, temperature, hydrodynamic pressure, load carrying capacity, friction and friction coefficient.

## 2. Stochastic height of the lubrication gap

The lubrication gap of the slide bearing is limited on one side with the surface of the bearing sleeve and on the other side with the surface of the journal and is

filled with lubricating oil. The height  $\varepsilon_p$  (see fig. 1) of the lubrication gap depends on the relative eccentricity  $\lambda$  as well as lack of parallelism  $\gamma$  of the shaft axis with respect to the sleeve axis. The total dimensional height of the lubrication gap is the sum of the basic height  $\varepsilon_p$  and the correction caused by random peaks of the surface roughness of the bearing surface  $\delta$ . In this paper the author does not take into account thermal and pressure deformation of the lubrication gap as well as deformation caused by vibrations and non-stationarity of working conditions. Also the migration of the center of the journal is not taken under consideration.

There is assumed the characteristic constant dimension value of bearing gap height  $\varepsilon_0$  and dimensionless function of total gap height  $\varepsilon_{T1}$  dependent on  $\varphi$  and  $z$  variables in the paper. The function of the total dimensionless height of the lubrication gap is as follows [15, 18]:

$$\varepsilon_{T1} = \varepsilon_T / \varepsilon_0 = \varepsilon_{p1}(\varphi, z) [1 + \delta_1(\varphi, z, \xi)]. \quad (1)$$

The symbol  $\varepsilon_{p1}$  denotes the dimensionless gap height obtained for nominally smooth bearing surfaces, while the symbol  $\delta_1$  denotes the dimensionless gap height correction parameter depending also on the random variable  $\xi$ .

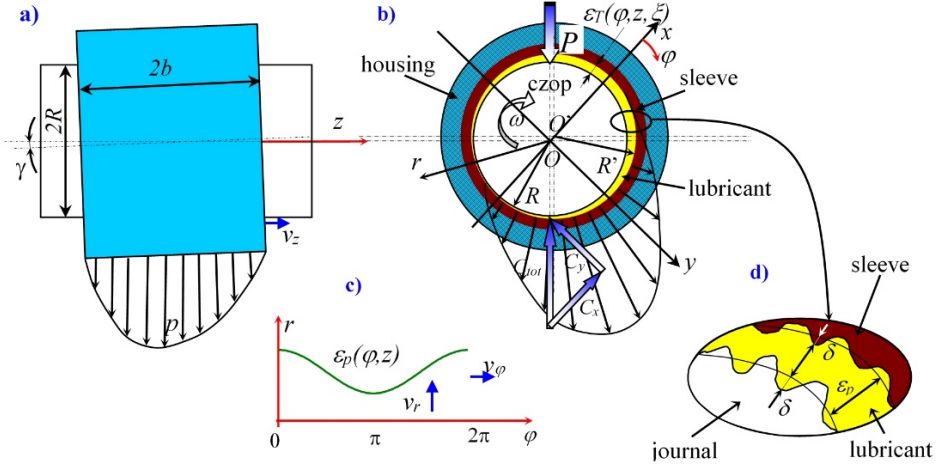
The expected value for anyone parameter (\*) is defined by the formula (2) and for the total gap height by the formula (3) [8, 12]:

$$En(*) = \int_{-\infty}^{+\infty} (*) \times f(*) d(*), \quad (2)$$

$$En(\varepsilon_{T1}) = En[\varepsilon_{p1}(1 + \delta_1)] = \varepsilon_{p1} [1 + En(\delta_1)] = \varepsilon_{p1} \left[ 1 + \int_{-\infty}^{+\infty} (\delta_1) \times f(\delta_1) d\delta_1 \right], \quad (3)$$

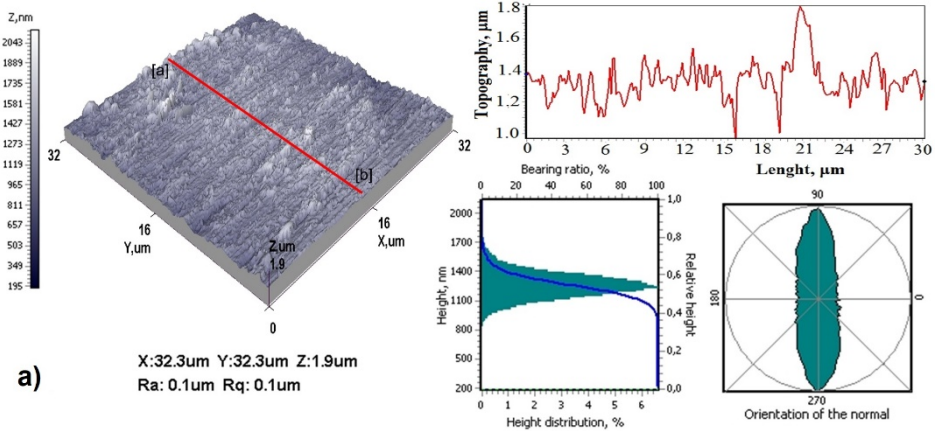
where:  $En$  – the expected value operator, (\*) – the correction parameter from which the expected value operator is calculated.

The correction parameter (\*) can describe not only corrections in the gap height  $\varepsilon_T$ , but also corrections of apparent viscosity  $\eta_p$ , pressure or other values. The probability density function  $f$  assigned to the correction parameter assigns the probability values to the random changes of the correction parameter (\*). The values of the probability density function  $f$  for the randomly variable height of the bearing gap are determined using the results of journal and sleeve surface roughness measurements.



**Fig. 1.** Slide journal bearing geometry

The exemplary results of the topography measurement along with the distribution of the roughness of the surface of the slide micro-bearing used in the Samsung HM160HI hard disk drive are shown in fig. 2. The measurement was carried out with a NT-206 atomic force microscope on samples with dimensions  $32\mu\text{m}\times 32\mu\text{m}$  [14].



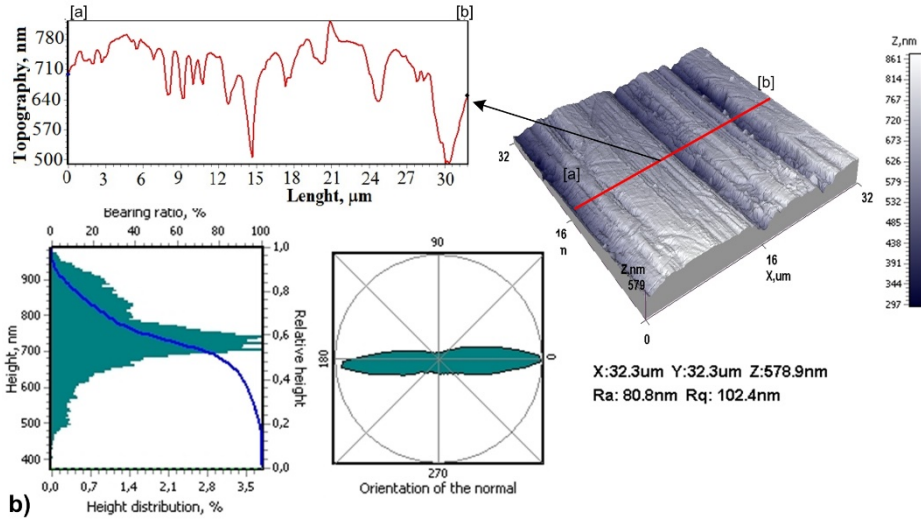


Fig. 2. The topography of the surface of the slide bearing in HDD Samsung HM160HI; a) journal, b) sleeve

### 3. Stochastic basic equations

Vector equation of the conservation of momentum, equation continuity of the stream and the equation of energy conservation will be described with coordinates of the cylindrical system  $\varphi, r, z$ . The expected values of: hydrodynamic pressure  $En[p(\varphi, z)]$ , temperature  $En[T(\varphi, r, z)]$ , speed of lubricating liquid  $En[v_i(\varphi, r, z)]$ , viscosity of the lubricating liquid  $En[\eta_p(\varphi, r, z)]$  and the height of the lubrication gap  $En[\varepsilon_T(\varphi, z)]$  will be taken into account. The incompressibility of the lubricating liquid will be adopted and the impact of changes in lubricating oil density will be neglected. Next, the classic simplification of hydrodynamics equations in the boundary layer will be applied. This simplification consists in omitting the magnitudes by value of radial relative clearance i.e.  $10^{-4}$ – $10^{-3}$ . After the transformations and calculations, the following stochastic system of hydrodynamic equations of lubrication theory is obtained as follows [14, 17]:

$$0 = -\frac{1}{R} \frac{\partial En(p)}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial r} \left\{ En[\eta_p(\varphi, r, z)] \frac{\partial En(v_1)}{\partial r} \right\}, \quad (4)$$

$$0 = \frac{\partial En(p)}{\partial r}, \quad (5)$$

$$0 = -\frac{\partial En(p)}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \left\{ En[\eta_p(\varphi, r, z)] \frac{\partial En(v_3)}{\partial r} \right\}, \quad (6)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial En(v_1)}{\partial \varphi} + \frac{\partial En(v_2)}{\partial r} + \frac{\partial [En(v_3)]}{\partial z} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \kappa \frac{\partial En[T(\varphi, r, z)]}{\partial r} \right\} + En[\eta_p(\varphi, r, z)] \left\{ \left[ \frac{\partial En(v_1)}{\partial r} \right]^2 + \left[ \frac{\partial En(v_3)}{\partial r} \right]^2 \right\} = 0, \quad (8)$$

where the expected value of the apparent viscosity  $\eta_p$  [Pas] is in the form:

$$En[\eta_p(\varphi, r, z)] = En[\eta_p(p, T, \dot{\gamma})] \equiv \eta_o En(\eta_{hp} \cdot \eta_{IT} \cdot \eta_{I\gamma}), \quad (9)$$

where:

$$En[\eta_{hp}(\varphi, r, z)] = En\left(\frac{\eta_{hp}}{\eta_o} - \frac{\eta_o - \eta_{hp}}{\eta_o} e^{-\delta_p p}\right), \quad En[\eta_{IT}(\varphi, r, z)] = En\left(e^{-\delta_T(T-T_o)}\right),$$

$$En[\eta_{I\gamma}(\varphi, r, z)] = En\left(\frac{\eta_\infty}{\eta_o} + \frac{1 - \frac{\eta_\infty}{\eta_o}}{1 + (a\dot{\gamma})^n}\right), \quad \dot{\gamma} \equiv A = \left[\frac{1}{2} \cdot tr(\mathbf{A}_1^2)\right]^{\frac{1}{2}}, \quad (10)$$

for:  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $-b \leq z \leq b$ ,  $0 \leq r \leq En(\varepsilon_T)$ .

In addition, the following designations were adopted:  $2b$  – the length of the slide bearing sleeve [m],  $\rho$  – lubricating oil density [ $\text{kg/m}^3$ ],  $\eta_{hp}$  – dynamic viscosity of lubricating oil for high pressure [Pas],  $\eta_o$  – dynamic viscosity of lubricating oil for high shear rate [Pas],  $\delta_p$  – coefficient of viscosity change from pressure [ $\text{Pa}^{-1}$ ],  $\delta_T$  – coefficient of viscosity change from temperature [ $\text{K}^{-1}$ ],  $T_o$  – characteristic reference temperature [K],  $a$  – Cross' model coefficient [s],  $\dot{\gamma}$  - shear rate [ $\text{s}^{-1}$ ].

The system of partial differential equations (4)-(8) determines the following expected values of randomly variables of unknown functions, namely: three components of lubricating oil velocity vector  $En[v_i(\varphi, r, z)]$  [m/s]; hydrodynamic pressure  $En[p(\varphi, z)]$  [Pa] and temperature  $En[T(\varphi, r, z)]$  [K].

#### 4. The expected values of flow and operating parameters randomly variable

In order to obtain expected values of randomly variable components of velocity vector, equations (4)-(7) should be appropriately integrated.

The lubricated rotating surface (journal) performs a rotary motion with an angular velocity  $\omega$ , while the second surface (sleeve) is stationary. Lubrication gap, variable at random height  $\varepsilon_T$ , is filled with lubricating oil. Therefore, for the component values of the expected randomly variable lubricating oil velocity  $En(v_1)$ ,  $En(v_2)$ ,  $En(v_3)$  in three directions  $\varphi, r, z$  apply the following boundary conditions:

$$En(v_1)=\omega R \quad \text{for } r=0, \quad En(v_1)=0 \quad \text{for } r=En(\varepsilon_T), \quad (11)$$

$$En(v_2)=0 \quad \text{for } r=0, \quad En(v_2)=0 \quad \text{for } r=En(\varepsilon_T), \quad (12)$$

$$En(v_3)=0 \quad \text{for } r=0, \quad En(v_3)=0 \quad \text{for } r=En(\varepsilon_T). \quad (13)$$

Applying conditions (11), (13) to the general solutions of equations (4), (6) it should be obtain the following forms of the expected value of randomly variable components of lubricating oil velocity vectors in the peripheral  $\varphi$  and longitudinal  $z$  direction:

$$En[v_1(\varphi, r, z)] = \left( \frac{1}{R} \frac{\partial En(p)}{\partial \varphi} \right) A_\eta + (1 - A_s) \omega R, \quad (14)$$

$$En[v_3(\varphi, r, z)] = \left( \frac{\partial En(p)}{\partial z} \right) A_\eta. \quad (15)$$

where functions  $A_s [1]$ ,  $A_\eta [m^4/Ns]$  are as follows:

$$A_s(\varphi, r, z) \equiv \frac{\int_0^r \frac{1}{En(\eta_p)} dr}{\int_0^{En(\varepsilon_T)} \frac{1}{En(\eta_p)} dr},$$

$$A_\eta(\varphi, r, z) \equiv \int_0^r \frac{r}{En(\eta_p)} dr - \frac{\left( \int_0^r \frac{1}{En(\eta_p)} dr \right) \left( \int_0^{En(\varepsilon_T)} \frac{r}{En(\eta_p)} dr \right)}{\int_0^{En(\varepsilon_T)} \frac{1}{En(\eta_p)} dr},$$

where:  $0 \leq \varphi \leq 2\pi\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$ ,  $-b \leq z \leq b$ ,  $0 \leq r \leq En(\varepsilon_T)$ ,  $En(\varepsilon_T) = En[\varepsilon_T(\varphi, z)]$ .

The solution of the equation of continuity (7) for the boundary condition (12), where  $v_2=0$  for  $r=0$ , gives the following form of the value of the expected randomly variable radial component  $r$  of the oil speed:

$$En[v_2(\varphi, r, z)] = -\int_0^r \frac{1}{R} \frac{\partial En(v_1)}{\partial \varphi} dr - \int_0^r \frac{\partial [En(v_3)]}{\partial z} dr. \quad (16)$$

Now we will substitute functions (14)-(15) for the equation (16). In the next step, should be applied the boundary condition (12) to the component of the oil velocity vector in the direction of the crack height  $r$  with the following form:  $En(v_2)=0$  for  $r=En(\varepsilon_T)$ . In this way, the unknown expected value of the random hydrodynamic pressure function  $En[p(\varphi, z)]$  from the following modified Reynolds equation may be obtained:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \left( \frac{\partial En(p)}{\partial \varphi} \right) \left( \int_0^{En(\varepsilon_T)} A_\eta dr \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ R \left( \frac{\partial En(p)}{\partial z} \right) \left( \int_0^{En(\varepsilon_T)} A_\eta dr \right) \right] + \\ = \omega R \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \int_0^{En(\varepsilon_T)} A_s dr - En(\varepsilon_T) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

The expected values of components of oil velocity vector (14), (15) should be substituted for energy equation (8), for constant thermal conductivity  $\kappa$  of oil, and after making appropriate transformations, the following differential equation (18) may be obtained. This equation makes it possible to determine the function of changes in the values of randomly expected temperature variable:

$$\frac{\partial^2 En(T)}{\partial r^2} + \frac{En(\eta_p)}{\kappa} \left\{ \left[ \left( \frac{1}{R} \frac{\partial En(p)}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial A_\eta}{\partial r} - \omega R \frac{\partial A_s}{\partial r} \right]^2 + \left[ \left( \frac{\partial En(p)}{\partial z} \right) \frac{\partial A_\eta}{\partial r} \right]^2 \right\} = 0 \quad (18)$$



for:  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $-b \leq z \leq b$ ,  $0 \leq r \leq \text{En}(\varepsilon_T)$ .

The determination of the value of the expected randomly variable temperature  $\text{En}[T(\varphi, r, z)]$  of the second order differential equation (18) requires two boundary conditions. The decreases and the increases in the expected temperature so below as above the characteristic temperature  $T_0$  ultimately give a constant temperature value  $f_c$  on the moving surface (journal) and variable unknown value of temperature changes  $f_p(\varphi, z)$  on the other surface (sleeve). The two boundary conditions mentioned above have the following form:

$$\text{En}[T(\varphi, r, z)] = T_0 + f_c \text{ for } r=0, \quad \text{En}[T(\varphi, r, z)] = T_0 + f_p(\varphi, z) \text{ for } r=\text{En}(\varepsilon_T). \quad (19)$$

To determine the unknown function of the expected temperature value  $f_p(\varphi, z)$  on the surface of the sleeve, it should be assumed the condition of transporting the heat flux density  $q_c$  from the surface of the journal, through the oil layer, to the surface of the sleeve. This condition has the following form:

$$\kappa \frac{\partial \text{En}(T)}{\partial r} = -q_c \quad \text{dla } r = 0. \quad (20)$$

The expected value of the load carrying capacity  $C$  [N] of the slide bearing is determined from the dependence as follows [14]:

$$\text{En}(C) = \sqrt{\left[ \int_{-b}^{+b} \left( \int_0^{\varphi_k} \text{En}[p(\varphi, z) R \sin \varphi] d\varphi \right) dz \right]^2 + \left[ \int_{-b}^{+b} \left( \int_0^{\varphi_k} \text{En}[p(\varphi, z) R \cos \varphi] d\varphi \right) dz \right]^2} \quad (21)$$

where:  $0 \leq \varphi \leq \varphi_k < 2\pi$ ,  $-b \leq z \leq b$ ,  $\varphi_k$  - coordinate of the oil film end.

The expected value of the friction force of the  $F_R$  [N] slide journal bearing is determined by the following relations:

$$\text{En}(F_R) = \iint_{\Omega} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \text{En}(p)}{\partial \varphi} \right) \left[ \text{En}[\varepsilon_T(\varphi, z)] - \frac{\int_0^{\text{En}[\varepsilon_T(\varphi, z)]} \frac{r dr}{\text{En}[\eta_p(\varphi, r, z)]}}{\int_0^{\text{En}[\varepsilon_T(\varphi, z)]} \frac{dr}{\text{En}[\eta_p(\varphi, r, z)]}} \right] R d\varphi dz +$$

$$-\iint_{\Omega} \left[ \frac{\omega R^2}{\text{En}[\varepsilon_T(\varphi, z)] \int_0^r \frac{dr}{\text{En}[\eta_p(\varphi, r, z)]}} \right] d\varphi dz, \quad (22)$$

where:  $0 \leq \varphi \leq \varphi_k < 2\pi$ ,  $-b \leq z \leq b$ ,  $\varphi_k$  – coordinate of the oil film end,  $\Omega(\varphi, z)$  – surface of lubrication.

The dimensionless, randomly variable coefficient of friction has the following form:

$$\mu = \frac{\text{En}(F_R)}{\text{En}(C)}. \quad (23)$$

## 5. Numerical calculations

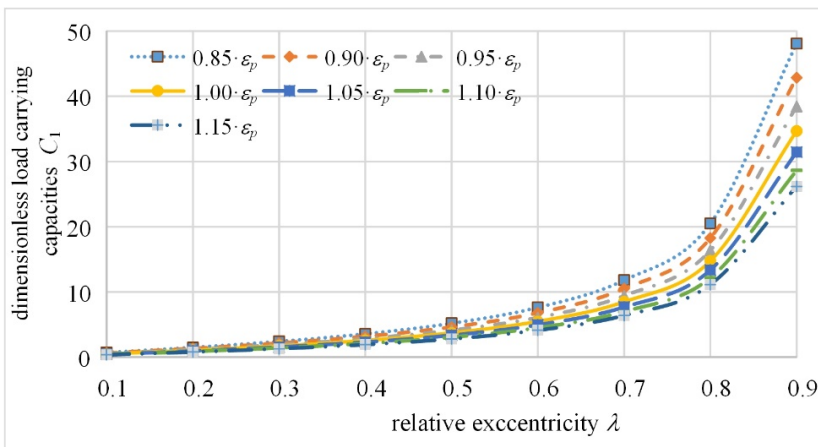
Numerical calculations of a hydrodynamic pressure were made by finite difference method and subsequent approximations by solving equation (17). The calculations were performed by simulating the changes in the lubrication gap height due to the surface roughness. The simulated changes in the lubrication gap height  $\varepsilon_p(1+\delta)$  were as follows:  $(1+\delta)=0.85$ ;  $(1+\delta)=0.90$ ;  $(1+\delta)=0.95$ ;  $(1+\delta)=1$ ;  $(1+\delta)=1.05$ ;  $(1+\delta)=1.1$ ;  $(1+\delta)=1.15$ ; nominal value  $\varepsilon_p$ . In the first calculation step, the constant dynamic viscosity of the oil was assumed. After obtaining the hydrodynamic pressure value, the temperature and peripheral and longitudinal components of the lubricating oil velocity vector were determined. In the second calculation step, the dynamic viscosity depending on the pressure, temperature and shear rate were determined on the basis of the formulas (10). Then, the hydrodynamic pressure, temperature and peripheral and longitudinal components of the lubricating oil velocity vector were re-determined and then the new values of dynamic viscosity were obtained. The calculations were continued in the next calculation steps until the difference in values of the determined values between successive steps did not differ by more than 0.5%. The calculations were performed in the Mathcad 15 program using own calculation procedures. After obtaining the final hydrodynamic pressure, the operating parameters like: load carrying capacity, friction forces and friction coefficients for relative eccentricity from  $\lambda=0.1$  to  $\lambda=0.9$  and dimensionless bearing length  $L_1=1$  were determined. There has been adopted: the radius of the journal  $R=0.02$ , the angle between the axis of the shaft and the sleeve axis  $\gamma=0$ , radial relative clearance  $\psi=0.001$  for all the calculations. The angular velocity of the journal  $\omega=400 \text{ s}^{-1}$ , the coefficient of viscosity changes from temperature  $\delta_1=0.04138 \text{ K}^{-1}$

and the coefficient of viscosity changes from pressure  $\delta_p=3.706 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}$  were also assumed. The characteristic dimensional value of dynamic viscosity for the characteristic temperature  $T_0=363\text{K}$  was  $\eta_0=0.01358 \text{ Pas}$ , whereas the viscosity for high pressure  $\eta_{hp}=0.026192 \text{ Pas}$  and for high shear rate  $\eta_\infty=0.01035 \text{ Pas}$ . Coefficients in the Cross model were adopted as follows  $a=0.0002902 \text{ s}$  and  $n=0.60073$ . Heat conduction coefficient  $\kappa=0.15 \text{ W/mK}$  was also adopted for the calculations.

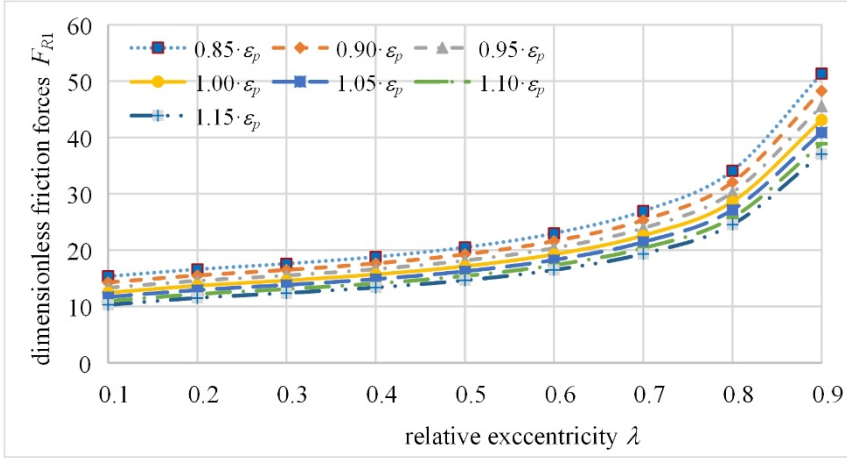
The dimensionless load carrying capacity, calculated on the basis of equation (21), as a function of relative eccentricity are presented in fig. 3, while dimensionless values of friction forces determined on the basis of equation (22) are shown in fig. 4. The coefficient of friction (23) as a function of relative eccentricity is shown in fig. 5.

The values of percent changes of dimensionless load carrying capacity  $\Delta C$ , dimensionless friction force  $\Delta F_R$  and coefficient of friction  $\Delta\mu/\psi$  for simulated changes in gap height taking into account surface roughness are given in table 1. The percent change values were calculated based on the following dependencies:

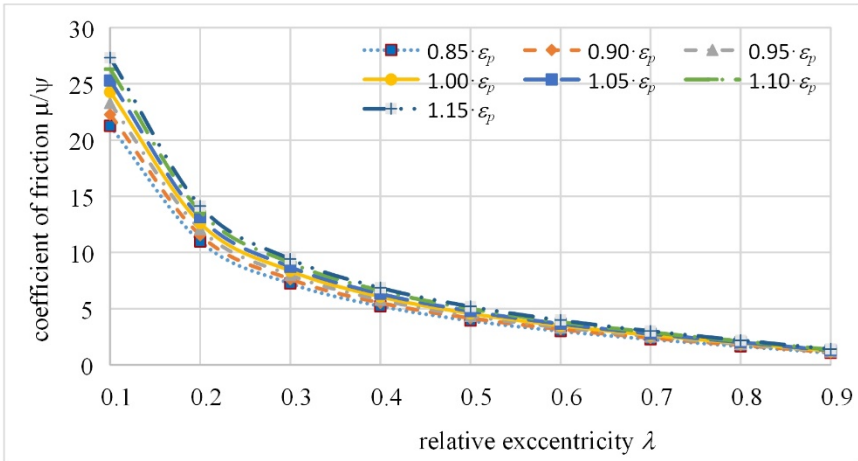
$$\begin{aligned} \Delta C &= \frac{C(\varepsilon_p) - C[\varepsilon_p(1 + \delta)]}{C(\varepsilon_p)} 100\% , \\ \Delta F_R &= \frac{F_R(\varepsilon_p) - F_R[\varepsilon_p(1 + \delta)]}{F_R(\varepsilon_p)} 100\% , \\ \Delta\mu &= \frac{\mu(\varepsilon_p) - \mu[\varepsilon_p(1 + \delta)]}{\mu(\varepsilon_p)} 100\% . \end{aligned} \tag{24}$$



**Fig. 3.** Dimensionless load carrying capacity as a function of relative eccentricity for the simulated changes in the height of the lubrication gap



**Fig. 4.** Dimensionless friction forces as a function of relative eccentricity for the simulated changes in the height of the lubrication gap



**Fig. 5.** The coefficient of friction in the function of relative eccentricity for the simulated changes in the height of the lubrication gap

**Table 1**

**The percent changes of dimensionless load carrying capacity  $\Delta C_l$ , dimensionless friction force  $\Delta F_{Rl}$  and the coefficient of friction  $\Delta\mu/\psi$  for the simulated changes in the height of the lubrication gap  $\varepsilon_p(1+\delta)$**

Change in the gap height	Relative eccentricity								
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
	The percent changes of dimensionless load carrying capacity $\Delta C_l$								
$0.85 \cdot \varepsilon_p$	-40.8	-39.1	-38.9	-39.0	-39.1	-39.0	-39.0	-38.8	-38.6
$0.90 \cdot \varepsilon_p$	-25.0	-23.9	-23.8	-23.8	-23.8	-23.8	-23.8	-23.7	-23.6
$0.95 \cdot \varepsilon_p$	-11.6	-11.0	-10.9	-10.9	-11.0	-11.0	-10.9	-10.9	-10.9
$1.00 \cdot \varepsilon_p$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$1.05 \cdot \varepsilon_p$	10.1	9.5	9.4	9.4	9.5	9.4	9.4	9.4	9.3
$1.10 \cdot \varepsilon_p$	18.8	17.7	17.6	17.6	17.6	17.6	17.6	17.5	17.4
$1.15 \cdot \varepsilon_p$	26.5	24.9	24.7	24.7	24.7	24.7	24.7	24.6	24.5
	The percent changes of dimensionless friction force $\Delta F_{Rl}$								
$0.85 \cdot \varepsilon_p$	-23.3	-21.3	-20.4	-19.8	-19.6	-19.4	-19.3	-19.2	-19.0
$0.90 \cdot \varepsilon_p$	-14.6	-13.5	-12.9	-12.5	-12.4	-12.2	-12.1	-12.1	-12.0
$0.95 \cdot \varepsilon_p$	-6.9	-6.4	-6.1	-5.9	-5.9	-5.8	-5.8	-5.7	-5.7
$1.00 \cdot \varepsilon_p$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$1.05 \cdot \varepsilon_p$	6.3	5.8	5.5	5.4	5.3	5.2	5.2	5.2	5.1
$1.10 \cdot \varepsilon_p$	12.1	11.0	10.5	10.3	10.1	10.0	10.0	9.9	9.8
$1.15 \cdot \varepsilon_p$	17.3	15.8	15.2	14.8	14.5	14.4	14.3	14.2	14.1
	The percent changes of the coefficient of friction $\Delta(\mu/\psi)$								
$0.85 \cdot \varepsilon_p$	12.4	12.8	13.4	13.8	14.0	14.1	14.1	14.2	14.2
$0.90 \cdot \varepsilon_p$	8.3	8.5	8.8	9.1	9.3	9.4	9.4	9.4	9.4
$0.95 \cdot \varepsilon_p$	4.1	4.2	4.4	4.5	4.6	4.7	4.7	4.7	4.7
$1.00 \cdot \varepsilon_p$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$1.05 \cdot \varepsilon_p$	-4.2	-4.1	-4.3	-4.4	-4.6	-4.6	-4.7	-4.6	-4.6
$1.10 \cdot \varepsilon_p$	-8.3	-8.2	-8.5	-8.8	-9.1	-9.2	-9.3	-9.2	-9.2
$1.15 \cdot \varepsilon_p$	-12.5	-12.1	-12.7	-13.1	-13.5	-13.7	-13.8	-13.8	-13.8

## 6. Observations and conclusions

Analyzing the results of numerical calculations presented in figs. 3, 4, 5 and in table 1 it can be seen that:

- decreasing of the lubricant gap by 5% causes an increase of the load carrying capacity by an average of 11% while the friction forces by 6% and a decrease of the coefficient of friction by 4.5%;
- decreasing of the lubricant gap by 10% causes an increase of the load carrying capacity by an average of 23.8% while the friction forces by 12.7% and a decrease of the coefficient of friction by 9.1%;
- decreasing of the lubricant gap by 15% causes an increase of the load carrying capacity by an average of 39.1% while the friction forces by 20.1% and a decrease of the coefficient of friction by 13.7%;
- increasing of the lubricant gap by 5% causes a decrease of the load carrying capacity by an average of 9.5% while the friction forces by 5.5% and an increase of the coefficient of friction by 4.5%;
- increasing of the lubricant gap by 10% causes a decrease of the load carrying capacity by an average of 17.7% while the friction forces by 10.4% and an increase of the coefficient of friction by 8.9%;
- increasing of the lubricant gap by 15% causes a decrease of the load carrying capacity by an average of 24.9% while the friction forces by 15.0% and an increase of the coefficient of friction by 13.2%.

The stochastic changes in the lubrication gap height. due to surface roughness or other factors. have a significant impact on the operational parameters of the transverse slide bearings. therefore. when designing sliding friction nodes. this fact should be taken into account in the calculations.

## **7. References**

1. Adesanya S. O., Makinde O. D.: Thermodynamic analysis for a third grade fluid through a vertical channel with internal heat generation. *Journal of Hydrodynamics*. Ser. B. 27 (2), 2015.
2. Awais M.: Applications of the Numerical Inversion of the Laplace transform to unsteady problems of the third grade fluid. *Applied Mathematics and Computation*, 250, 2015.
3. Bartz W. J.: *Gleitlageretechnik*, Expert Verlag, Grafenau 1981.
4. Bourgin P., Gay B.: Determination of the Load Capacity of a Finite Element Method in a Case of the non-Newtonian Lubricant. *Transaction of the ASME, Journal of Tribology*, 106 (2), 1984.
5. Chianga H. L., Lina J. R., Hsub C. H., Chang Y. P.: Linear stability analysis of a rough short journal bearing lubricated with non-Newtonian fluids. *Springer Verlag, Tribology Letters*, Vol. 17, No.4, 2004.

6. Dai R. X., Dong Q., Szeri A. Z.: Approximations in Hydrodynamic Lubrication. Transactions of the ASME, Journal of Tribology, Vol. 114, 1992.
7. Dunn J. E., Rajagopal K. R.: Fluids of differential type: critical review and thermodynamic analysis. International Journal of Engineering Science, 33(5), 1995.
8. Fisz M.: Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. PWN, Warszawa 1967.
9. Galindo-Rosales F. J., Rubio-Hernández F. J., Sevilla A.: An apparent viscosity function for shear thickening fluids. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 166, 2011.
10. Guha S. K.: Analysis of steady-state characteristics of misaligned hydrodynamic journal bearings with isotropic roughness effect. Elsevier, Tribology International, 33, 2000.
11. Hashimoto H.: Surface Roughness Effects in High-Speed Hydrodynamic Journal Bearings. Transactions of the ASME, Journal of Tribology, Vol.119, 1997.
12. Helwig Z.: Elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. PWN, Warszawa 1977.
13. Lang O. R., Steinhilper W.: Gleitlager. Springer Verlag. Berlin-Heidelberg-New York 1978.
14. Miszczak A.: Analiza hydrodynamicznego smarowania łożysk ślizgowych cieczami o właściwościach nienewtonowskich. Wydawnictwo Naukowe Instytutu Technologii Eksploatacji-PIB w Radomiu, Radom 2019.
15. Miszczak A.: Analiza hydrodynamicznego smarowania ferrocieczą poprzecznych łożysk ślizgowych. Fundacja Rozwoju Akademii Morskiej, Gdynia 2006.
16. Wierzholski K., Miszczak A.: Mathematical principles and methods of biological surface lubrication with phospholipids bilayers. Biosystems, 178, 2019.
17. Wierzholski K., Miszczak A.: Electro-Magneto-Hydrodynamic Lubrication. Open Physics, 16 (1), 2018.
18. Wierzholski K.: Teoria niekonwencjonalnego smarowania łożysk ślizgowych. Prace Naukowe Politechniki Szczecińskiej, No. 527, Szczecin 1995.

# WPLYW CHROPOWATOŚCI POWIERZCHNI NA SIŁĘ NOŚNĄ W POPRZECZNYCH ŁOŻYSKACH ŚLIZGOWYCH SMAROWANYCH OLEJEM O NIENEWTONOWSKICH WŁAŚCIWOŚCIACH

## 1. Wprowadzenie

Wielu autorów rozwiązując problem hydrodynamicznego smarowania zakłada, że powierzchnie ślizgowe łożyska są gładkie [3-6, 10, 13, 14, 15, 17,18]. W rzeczywistości tak nie jest i zawsze występuje chropowatość powierzchni. Wpływ chropowatości powierzchni na parametry eksploatacyjne łożyska ślizgowego do tej pory uwzględniało się stochastycznie w równaniu typu Reynoldsa [5, 10, 11, 14, 15]. W celu uwzględnienia zmian losowych wysokości szczeliny smarnej, pod wpływem zmian chropowatości powierzchni, czy też losowo zmieniającego się obciążenia, na parametry eksploatacyjne poprzecznych łożysk ślizgowych nakładało się operator nadziei matematycznej  $En(*)$  lub inaczej wartości oczekiwanej na obie strony równań typu Reynoldsa. W ten sposób otrzymywało się stochastyczną postać równania typu Reynoldsa.

Proponowana w niniejszej pracy metoda uwzględniania wpływu chropowatości powierzchni ślizgowych na parametry przepływowe i eksploatacyjne łożysk ślizgowych m.in. poprzez zmiany stochastyczne wysokości szczeliny smarnej i zmiany lepkości dynamicznej. W metodzie tej niezbędna jest znajomość zmian losowych wysokości szczeliny smarnej. Zmiany losowe wysokości szczeliny smarnej mają wpływ bezpośredni i pośredni na parametry smarowania, takie jak: składowe wektora prędkości, temperaturę, ciśnienie, siły nośne i siły tarcia. Wpływ bezpośredni uzyskujemy poprzez granice całkowania, w których występuje wysokość szczeliny smarującej. Wpływ pośredni losowych zmian wysokości szczeliny na wartość parametrów smarowania przeprowadza się poprzez zmianę losową lepkości dynamicznej cieczy smarującej, która wpływa losowo na zmiany sił tarcia i ciśnienie. Dla wyjaśnienia tego zjawiska, zauważmy, że wraz ze wzrostem (spadkiem) losowym wysokości szczeliny maleje (wzrasta) prędkość przepływu cieczy smarującej w szczelinie. Uzyskujemy wtedy spadek (wzrost) prędkości ścinania. Ponieważ ciecz



smarująca może mieć własności nienewtonowskie [1, 2, 4, 5, 7, 9, 14-18] stąd ostatecznie otrzymamy wzrost (spadek) lepkości.

Celem badań wykonywanych w niniejszej pracy jest wyznaczenie wpływu losowo zmiennej wysokości szczeliny smarnej w poprzecznych łożyskach ślizgowych na wartości parametrów smarowania, takich jak: wartość lepkości cieczy smarującej, temperatury, ciśnienia hydrodynamicznego, siły nośnej, sił tarcia i współczynnika tarcia.

## **2. Stochastyczna wysokość szczeliny smarnej**

Szczelina smarna łożyska ślizgowego ograniczona jest z jednej strony powierzchnią panewki, a z drugiej strony powierzchnią czopa i jest wypełniona olejem smarującym. Wysokość  $\varepsilon_p$  (patrz rys. 1) szczeliny smarnej zależy od mimośrodowości względnej  $\lambda$  i nierównoległości  $\gamma$  osi wału względem osi panewki. Całkowita wymiarowa wysokość szczeliny smarnej  $\varepsilon_T$  jest sumą wysokości podstawowej  $\varepsilon_p$  oraz korekty wywołanej losowymi wystęпами chropowatości powierzchni łożyska  $\delta$ . W niniejszej pracy autor nie uwzględnia deformacji termicznej i ciśnieniowej szczeliny smarnej oraz deformacji wywołanej drganiami i niestacjonarnością warunków pracy, a także wędrówką środka czopa. Przyjmuje się charakterystyczną stałą wymiarową wartość wysokości szczeliny łożyska  $\varepsilon_0$  oraz bezwymiarową funkcję całkowitej wysokości szczeliny  $\varepsilon_{T1}$  zależną od zmiennych  $\varphi$  i  $z$ . Funkcja całkowitej bezwymiarowej wysokości szczeliny smarnej ma następującą postać [15, 18]:

$$\varepsilon_{T1} = \varepsilon_T / \varepsilon_0 = \varepsilon_{p1}(\varphi, z) [1 + \delta_1(\varphi, z, \xi)]. \quad (1)$$

Symbolem  $\varepsilon_{p1}$  oznaczamy bezwymiarową wysokość szczeliny uzyskaną dla nominalnie gładkich powierzchni łożyskowych. Natomiast  $\delta_1$  oznacza bezwymiarowy parametr korekt wysokości szczeliny zależny również od zmiennej losowej  $\xi$ .

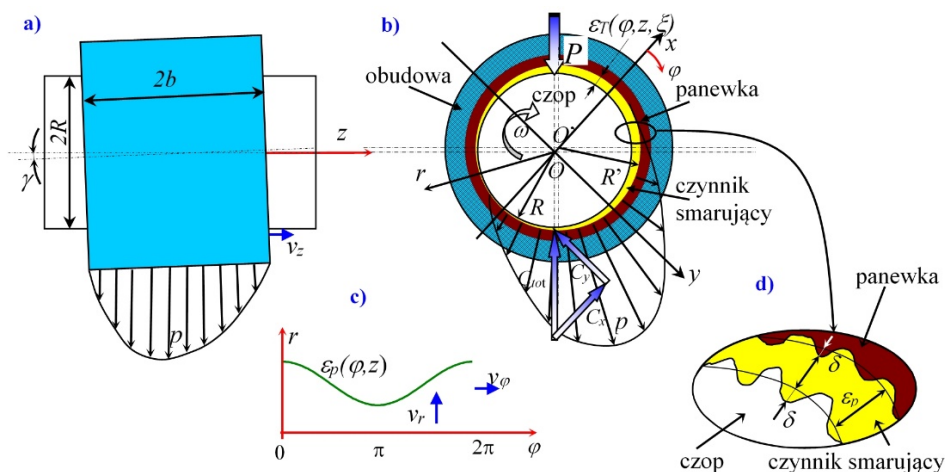
Wartość oczekiwaną dla dowolnego parametru (\*) definiujemy wzorem (2), a dla całej wysokości szczeliny wzorem (3) [8, 12]:

$$En(*) = \int_{-\infty}^{+\infty} (*) \times f(*) d(*), \quad (2)$$

$$En(\varepsilon_{T1}) = En[\varepsilon_{p1}(1 + \delta_1)] = \varepsilon_{p1}[1 + En(\delta_1)] = \varepsilon_{p1}\left[1 + \int_{-\infty}^{+\infty} (\delta_1) \times f(\delta_1) d\delta_1\right], \quad (3)$$

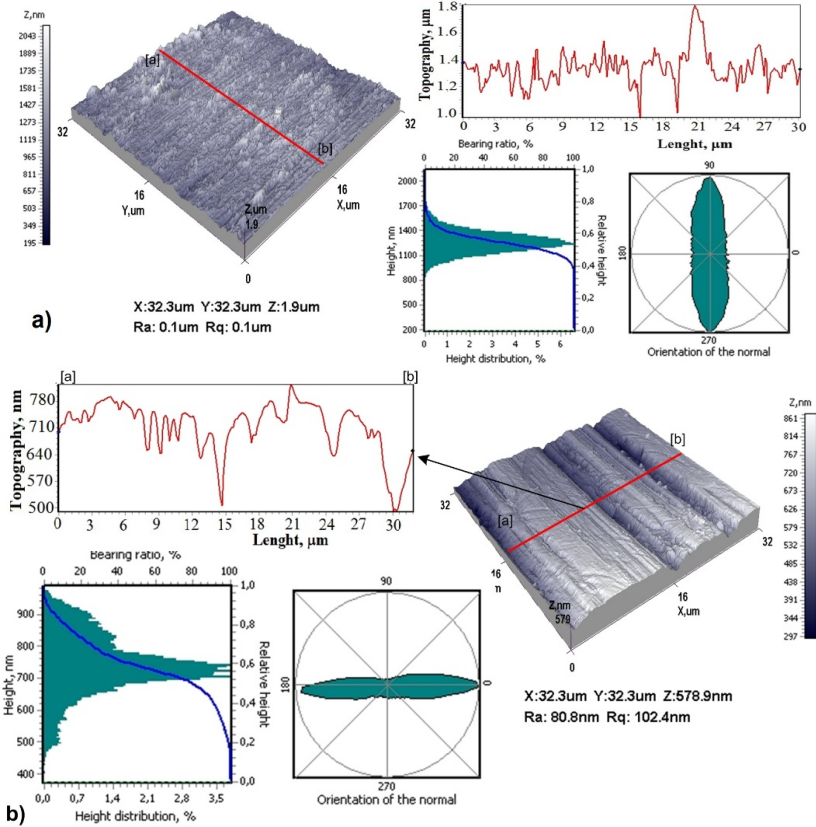
gdzie:  $En$  – operator wartości oczekiwanej, (\*) – parametr korekt, z których operator wartości oczekiwanej jest obliczony.

Parametr korekt (\*) może opisywać nie tylko korekty wysokości szczeliny  $\varepsilon_T$ , lecz również, korekty lepkości pozornej  $\eta_p$ , ciśnienia lub innych wielkości. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa  $f$  przypisana parametrowi korekt przyporządkowuje wartości prawdopodobieństwa losowym zmianom parametru korekt (\*). Wartości funkcji gęstości prawdopodobieństwa  $f$  dla losowo zmiennej wysokości szczeliny łożyskowej wyznaczone są z wykorzystaniem wyników pomiaru chropowatości powierzchni panewki i czopa.



**Rys. 1.** Geometria poprzecznego łożyska ślizgowego

Przykładowe wyniki pomiaru topografii wraz z rozkładem wysokości nierówności powierzchni mikrołożyska ślizgowego zastosowanego w napędzie dysku twardego HM160HI firmy Samsung pokazano na rys. 2. Pomiar wykonano mikroskopem sił atomowych NT-206 na próbkach o wymiarach  $32\mu\text{m} \times 32\mu\text{m}$  [14].



**Rys. 2.** Topografia powierzchni mikrołożyska ślizgowego w HDD Samsung HM160HI; a) czopa, b) panewki

### 3. Stochastyczne równania podstawowe

Wektorowe równanie zachowania pędu, równaniem ciągłość strugi, równanie zachowania energii rozpiszemy na kierunki układu walcowego  $\varphi$ ,  $r$ ,  $z$ . Uwzględnimy wartości oczekiwane ciśnienia hydrodynamicznego  $En[p(\varphi, z)]$ , temperatury  $En[T(\varphi, r, z)]$ , prędkości cieczy synowialnej  $En[v_r(\varphi, r, z)]$ , lepkości cieczy smarującej  $En[\eta_p(\varphi, r, z)]$ , wysokości szczeliny smarnej  $En[\varepsilon_T(\varphi, z)]$ . Przyjmujemy nieściśliwość cieczy smarującej oraz pomijamy wpływ zmian gęstości oleju smarującego. Następnie stosujemy klasyczne uproszczenie równań hydrodynamiki w przyściennej warstwie granicznej, polegające na pominięciu członów rzędu promieniowego luzu względnego o wartości  $10^{-4}$ – $10^{-3}$ . Po

wykonaniu przekształceń i obliczeń otrzymujemy następujący stochastyczny układ równań hydrodynamicznej teorii smarowania [14, 17]:

$$0 = -\frac{1}{R} \frac{\partial En(p)}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial r} \left\{ En[\eta_p(\varphi, r, z)] \frac{\partial En(v_1)}{\partial r} \right\}, \quad (4)$$

$$0 = \frac{\partial En(p)}{\partial r}, \quad (5)$$

$$0 = -\frac{\partial En(p)}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \left\{ En[\eta_p(\varphi, r, z)] \frac{\partial En(v_3)}{\partial r} \right\}, \quad (6)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial En(v_1)}{\partial \varphi} + \frac{\partial En(v_2)}{\partial r} + \frac{\partial [En(v_3)]}{\partial z} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \kappa \frac{\partial En[T(\varphi, r, z)]}{\partial r} \right\} + En[\eta_p(\varphi, r, z)] \left\{ \left[ \frac{\partial En(v_1)}{\partial r} \right]^2 + \left[ \frac{\partial En(v_3)}{\partial r} \right]^2 \right\} = 0, \quad (8)$$

gdzie wartość oczekiwana lepkości pozornej  $\eta_p$  [Pas] ma postać:

$$En[\eta_p(\varphi, r, z)] = En[\eta_p(p, T, \dot{\gamma})] \equiv \eta_o En(\eta_{1p} \cdot \eta_{1T} \cdot \eta_{1\dot{\gamma}}) \quad (9)$$

gdzie:

$$En[\eta_{1p}(\varphi, r, z)] = En\left(\frac{\eta_{hp}}{\eta_o} - \frac{\eta_o - \eta_{hp}}{\eta_o} e^{-\delta_p p}\right), \quad En[\eta_{1T}(\varphi, r, z)] = En\left(e^{-\delta_T(T-T_o)}\right),$$

$$En[\eta_{1\dot{\gamma}}(\varphi, r, z)] = En\left(\frac{\eta_\infty}{\eta_o} + \frac{1 - \frac{\eta_\infty}{\eta_o}}{1 + (a\dot{\gamma})^b}\right), \quad \dot{\gamma} \equiv A = \left[\frac{1}{2} \cdot tr(\mathbf{A}_1^2)\right]^{\frac{1}{2}}, \quad (10)$$

dla:  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $-b \leq z \leq b$ ,  $0 \leq r \leq En(\varepsilon_T)$ .

Ponadto przyjęto następujące oznaczenia:  $2b$  – długość panewki łożyska ślizgowego [m],  $\rho$  – gęstość oleju smarującego [ $\text{kg/m}^3$ ],  $\eta_{hp}$  – lepkość dynamiczna oleju smarującego dla wysokiego ciśnienia [Pas],  $\eta_{\infty}$  – lepkość dynamiczna oleju smarującego dla wysokiej szybkości ścinania [Pas],  $\delta_p$  – współczynnik zmian lepkości od ciśnienia [ $\text{Pa}^{-1}$ ],  $\delta_T$  – współczynnik zmian lepkości od temperatury [ $\text{K}^{-1}$ ],  $T_0$  – charakterystyczna temperatura odniesienia [K],  $a$  – współczynnik w modelu Crossa [s],  $\dot{\gamma}$  – szybkość ścinania [ $\text{s}^{-1}$ ].

Układ równań różniczkowych cząstkowych (4)-(8) wyznacza następujące wartości oczekiwane losowo zmiennych niewiadomych funkcji a mianowicie: trzech składowych wektora prędkości oleju smarującego  $En[v_i(\varphi, r, z)]$  [m/s]; ciśnienia hydrodynamicznego  $En[p(\varphi, z)]$  [Pa], temperatury  $En[T(\varphi, r, z)]$  [K].

#### **4. Wartości oczekiwane losowo zmiennych parametrów przepływowych i eksploatacyjnych**

W celu otrzymania wartości oczekiwanych losowo zmiennych składowych wektora prędkości należy odpowiednio scałkować równania (4)-(7).

Smarowana powierzchnia obrotowa (czop) wykonuje ruch obrotowy o prędkości kątowej  $\omega$ , natomiast druga powierzchnia (panewka) jest nieruchoma. Szczelina smarna, o zmiennej losowo wysokości  $\varepsilon_r$ , wypełniona jest olejem smarującym. Dlatego na składowe wartości oczekiwanych losowo zmiennych prędkości oleju smarującego  $En(v_1)$ ,  $En(v_2)$ ,  $En(v_3)$  po kierunkach  $\varphi, r, z$  nakładamy następujące warunki brzegowe:

$$En(v_1)=\omega R \quad \text{dla } r=0, \quad En(v_1)=0 \quad \text{dla } r=En(\varepsilon_r), \quad (11)$$

$$En(v_2)=0 \quad \text{dla } r=0, \quad En(v_2)=0 \quad \text{dla } r=En(\varepsilon_r), \quad (12)$$

$$En(v_3)=0 \quad \text{dla } r=0, \quad En(v_3)=0 \quad \text{dla } r=En(\varepsilon_r). \quad (13)$$

Nakładając warunek (11), (13) na rozwiązanie ogólne równania (4), (6) uzyskujemy następujące postacie wartości oczekiwanej losowo zmiennych składowych wektora prędkości oleju smarującego w kierunku obwodowym  $\varphi$  i wzdłużnym  $z$ :

$$En[v_1(\varphi, r, z)] = \left( \frac{1}{R} \frac{\partial En(p)}{\partial \varphi} \right) A_{\eta} + (1 - A_s) \omega R, \quad (14)$$

$$En[v_3(\varphi, r, z)] = \left( \frac{\partial En(p)}{\partial z} \right) A_\eta. \quad (15)$$

gdzie funkcje  $A_s [1]$ ,  $A_\eta [m^4/Ns]$  są postaci:

$$A_s(\varphi, r, z) \equiv \frac{\int_0^r \frac{1}{En(\eta_p)} dr}{En(\varepsilon_T)},$$

$$A_\eta(\varphi, r, z) \equiv \int_0^r \frac{r}{En(\eta_p)} dr - \frac{\left( \int_0^r \frac{1}{En(\eta_p)} dr \right) \left( \int_0^{En(\varepsilon_T)} \frac{r}{En(\eta_p)} dr \right)}{\int_0^{En(\varepsilon_T)} \frac{1}{En(\eta_p)} dr},$$

przy czym:  $0 \leq \varphi \leq 2\pi\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$ ,  $-b \leq z \leq b$ ,  $0 \leq r \leq En(\varepsilon_T)$ ,  $En(\varepsilon_T) = En[\varepsilon_T(\varphi, z)]$ .

Rozwiązanie równania ciągłości (7) dla warunku brzegowego (12), gdzie  $v_2=0$  dla  $r=0$ , daje następującą postać wartości oczekiwanej losowo zmiennej składowej promieniowej prędkości oleju:

$$En[v_2(\varphi, r, z)] = -\int_0^r \frac{1}{R} \frac{\partial En(v_1)}{\partial \varphi} dr - \int_0^r \frac{\partial [En(v_3)]}{\partial z} dr. \quad (16)$$

Teraz podstawimy funkcje (14)-(15) do rozwiązania (16). Nakładamy warunek brzegowy (12) o postaci  $En(v_2)=0$  dla  $r=En(\varepsilon_T)$ , czyli na składową wektora prędkości oleju w kierunku wysokości szczeliny  $r$ . Uzyskamy niewiadomą wartość oczekiwaną losowej funkcji ciśnienia hydrodynamicznego  $En[p(\varphi, z)]$  z następującego zmodyfikowanego równania typu Reynoldsa:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \left( \frac{\partial En(p)}{\partial \varphi} \right) \left( \int_0^{En(\varepsilon_T)} A_\eta dr \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ R \left( \frac{\partial En(p)}{\partial z} \right) \left( \int_0^{En(\varepsilon_T)} A_\eta dr \right) \right] +$$

$$= \omega R \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \int_0^{En(\varepsilon_T)} A_s dr - En(\varepsilon_T) \right]. \quad (17)$$

Podstawiając wartości oczekiwane składowych wektora prędkości oleju (14), (15) do równania energii (8), dla stałej wartości przewodności cieplnej oleju  $\kappa$ , po przekształceniach, uzyskamy następujące równanie różniczkowe, umożliwiające wyznaczenie funkcji zmian wartości oczekiwanych losowo zmiennej temperatury:

$$\frac{\partial^2 En(T)}{\partial r^2} + \frac{En(\eta_p)}{\kappa} \left\{ \left[ \left( \frac{1}{R} \frac{\partial En(p)}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial A_\eta}{\partial r} - \omega R \frac{\partial A_s}{\partial r} \right]^2 + \left[ \left( \frac{\partial En(p)}{\partial z} \right) \frac{\partial A_\eta}{\partial r} \right]^2 \right\} = 0 \quad (18)$$

dla:  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $-b \leq z \leq b$ ,  $0 \leq r \leq En(\varepsilon_T)$ .

Wyznaczenia wartości oczekiwanej losowo zmiennej temperatury  $En[T(\varphi, r, z)]$  z równania różniczkowego drugiego rzędu (18) wymaga dwóch warunków brzegowych. Ubytki oraz przyrosty wartości oczekiwanej temperatury poniżej oraz ponad charakterystyczną temperaturę  $T_0$  dają ostatecznie stałą wartość temperatury  $f_c$  na powierzchni ruchomej (czopie), a także zmienną niewiadomą wartość zmian temperatury  $f_p(\varphi, z)$  na drugiej powierzchni (panewce). Tak więc poszukiwane dwa warunki brzegowe mają następującą postać:

$$\begin{aligned} En[T(\varphi, r, z)] &= T_0 + f_c \text{ dla } r=0, \\ En[T(\varphi, r, z)] &= T_0 + f_p(\varphi, z) \text{ dla } r=En(\varepsilon_T). \end{aligned} \quad (19)$$

Aby wyznaczyć niewiadomą funkcję wartości oczekiwanej temperatury  $f_p(\varphi, z)$  na powierzchni panewki, korzystamy z warunku transportu gęstości strumienia ciepła  $q_c$  z powierzchni czopa poprzez warstwę oleju do powierzchni panewki. Warunek ten ma następującą postać:

$$\kappa \frac{\partial En(T)}{\partial r} = -q_c \quad \text{dla } r = 0. \quad (20)$$

Wartość oczekiwaną siły nośnej łożyska ślizgowego  $C$  [N] wyznacza się z zależności [14]:

$$En(C) = \sqrt{\left[ \int_{-b}^{+b} \left( \int_0^{\varphi_k} En[p(\varphi, z)R \sin \varphi] d\varphi \right) dz \right]^2 + \left[ \int_{-b}^{+b} \left( \int_0^{\varphi_k} En[p(\varphi, z)R \cos \varphi] d\varphi \right) dz \right]^2} \quad (21)$$

gdzie:  $0 \leq \varphi \leq \varphi_k < 2\pi$ ,  $-b \leq z \leq b$ ,  $\varphi_k$  – współrzędna końca filmu olejowego.

Wartość oczekiwaną siły tarcia poprzecznego łożyska ślizgowego  $F_R$  [N] wyznacza się z następujących zależności:

$$En(F_R) = \iint_{\Omega} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial En(p)}{\partial \varphi} \right) \left[ En[\varepsilon_T(\varphi, z)] - \frac{\int_0^{En[\varepsilon_T(\varphi, z)]} \frac{rdr}{En[\eta_p(\varphi, r, z)]}}{\int_0^{En[\varepsilon_T(\varphi, z)]} \frac{dr}{En[\eta_p(\varphi, r, z)]}} \right] Rd\varphi dz +$$

$$- \iint_{\Omega} \left[ \frac{\omega R^2}{\int_0^{En[\varepsilon_T(\varphi, z)]} \frac{dr}{En[\eta_p(\varphi, r, z)]}} \right] d\varphi dz, \quad (22)$$

gdzie:  $0 \leq \varphi \leq \varphi_k < 2\pi$ ,  $-b \leq z \leq b$ ,  $\varphi_k$  – współrzędna końca filmu olejowego,  $\Omega(\varphi, z)$  – powierzchnia smarowania.

Bezwymiarowy, losowo zmienny współczynnik tarcia ma następującą postać:

$$\mu = \frac{En(F_R)}{En(C)}. \quad (23)$$

## 5. Obliczenia numeryczne

Obliczenia numeryczne ciśnienia hydrodynamicznego przeprowadzono metodą różnic skończonych i kolejnych przybliżeń rozwiązując równanie (17). Obliczenia wykonano symulując zmiany wysokości szczeliny smarnej wynikające z uwzględnienia chropowatości powierzchni. Symulowane zmiany wysokości szczeliny smarnej  $\varepsilon_p(1+\delta)$  wynosiły  $(1+\delta)=0,85$ ;  $(1+\delta)=0,90$ ;  $(1+\delta)=0,95$ ;  $(1+\delta)=1$ ;  $(1+\delta)=1,05$ ;  $(1+\delta)=1,1$ ;  $(1+\delta)=1,15$ ; wartości nominalnej  $\varepsilon_p$ . W pierwszym kroku obliczeniowym przyjęto stałą lepkość dynamiczną oleju. Po uzyskaniu wartości ciśnienia hydrodynamicznego wyznaczono temperaturę oraz składowe obwodową i wzdłużną wektora prędkości oleju smarującego. W drugim kroku obliczeniowym została uwzględniona lepkość dynamiczna zależna od ciśnienia, temperatury i szybkości ścinania wyznaczona na podstawie wzorów (10). Ponownie wyznaczono ciśnienie hydrodynamiczne, temperaturę oraz składowe obwodową i wzdłużną wektora prędkości oleju smarującego, a następnie nowe

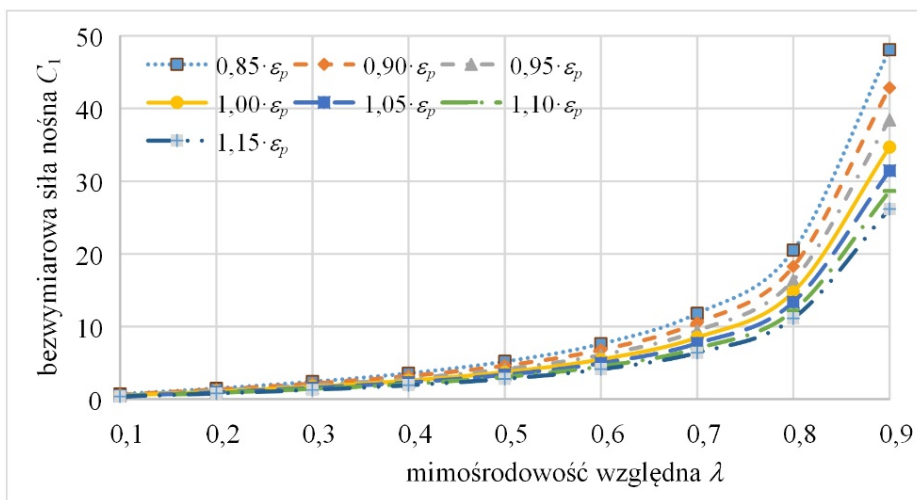


wartości lepkości dynamicznej. Obliczenia kontynuowano w kolejnych krokach obliczeniowych aż różnica wartości wyznaczanych wielkości pomiędzy kolejnymi krokami nie różniła się więcej niż 0,5%. Obliczenia wykonano w programie Mathcad 15 przy wykorzystaniu własnych procedur obliczeniowych. Mając ostateczną wartość ciśnienia hydrodynamicznego wyznaczono siły nośne, siły tarcia i umowny współczynnik tarcia dla mimośrodowości względnej od  $\lambda=0,1$  do  $\lambda=0,9$  i bezwymiarowej długości łożyska  $L_1=1$ . Do obliczeń przyjęto promień czopa  $R=0,02$ , kąt pomiędzy osią wału a osią panewki  $\gamma=0$ , promieniowy luz względny  $\psi=0,001$ . Przyjęto również prędkość kątową czopa  $\omega=400 \text{ s}^{-1}$  oraz współczynnik zmian lepkości od temperatury  $\delta_T=0,04138 \text{ K}^{-1}$  i współczynnik zmian lepkości od ciśnienia  $\delta_p=-3,706 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}$ . Charakterystyczna wymiarowa wartość lepkości dynamicznej dla charakterystycznej temperatury  $T_0=363\text{K}$  wynosiła  $\eta_0=0.01358 \text{ Pas}$ , natomiast lepkość dla dużego ciśnienia  $\eta_{hp}=0,026192 \text{ Pas}$  a dla wysokiej szybkości ścinania  $\eta_\infty=0,01035 \text{ Pas}$ . Współczynniki w modelu Crossa  $a=0,0002902$  i  $b=0,60073$ . Do obliczeń przyjęto również współczynnik przewodzenia ciepła  $\kappa=0,15 \text{ W/mK}$ .

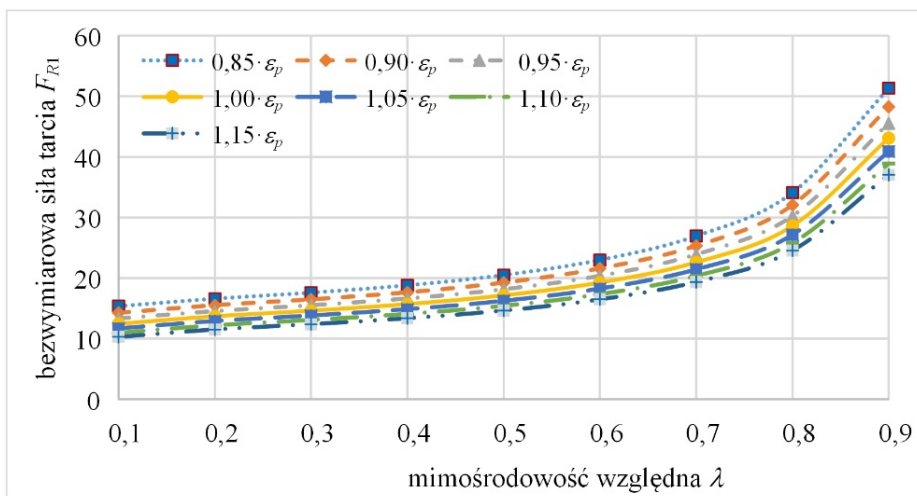
Obliczone na podstawie równania (21) wartości bezwymiarowe siły nośnej w funkcji mimośrodowości względnej zaprezentowano na rys. 3, natomiast wartości bezwymiarowe siły tarcia wyznaczone na podstawie równania (22) pokazano na rys. 4. Umowny współczynnik tarcia (23) w funkcji mimośrodowości względnej przedstawiono na rys. 5.

Procentowe zmiany bezwymiarowej siły nośnej  $\Delta C$ , bezwymiarowej siły tarcia  $\Delta F_R$  oraz umownego współczynnika tarcia  $\Delta\mu/\psi$  dla symulowanych zmian wysokości szczeliny  $\varepsilon_p(1+\delta)$  w wyniku uwzględnienia chropowatości powierzchni zamieszczono w tabeli 1. Procentowe wartości zmian zostały wyliczone na podstawie następujących zależności:

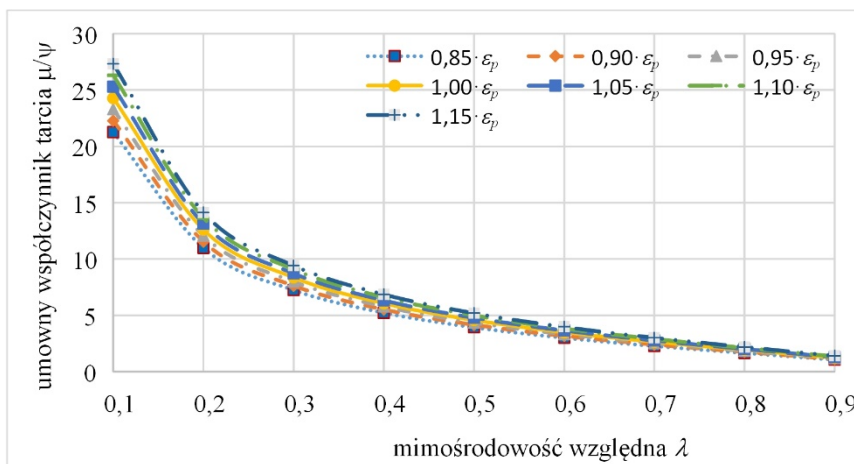
$$\begin{aligned} \Delta C &= \frac{C(\varepsilon_p) - C[\varepsilon_p(1+\delta)]}{C(\varepsilon_p)} 100\% , \\ \Delta F_R &= \frac{F_R(\varepsilon_p) - F_R[\varepsilon_p(1+\delta)]}{F_R(\varepsilon_p)} 100\% , \\ \Delta\mu &= \frac{\mu(\varepsilon_p) - \mu[\varepsilon_p(1+\delta)]}{\mu(\varepsilon_p)} 100\% . \end{aligned} \tag{24}$$



**Rys. 3.** Bezwymiarowe siły nośne w funkcji mimosłrodowości względnej dla symulowanych zmian wysokości szczeliny smarnej



**Rys. 4.** Bezwymiarowe siły tarcia w funkcji mimosłrodowości względnej dla symulowanych zmian wysokości szczeliny smarnej



Rys. 5. Umowny współczynnik tarcia w funkcji mimośrodkowości względnej dla symulowanych zmian wysokości szczeliny smarnej

Tabela 1

Procentowe zmiany bezwymiarowej siły nośnej  $\Delta C_1$ , bezwymiarowej siły tarcia  $\Delta F_{R1}$  oraz umownego współczynnika tarcia  $\Delta \mu/\psi$  dla symulowanych zmian wysokości szczeliny  $\varepsilon_p(1+\delta)$

zmiany wysokości szczeliny	Mimośrodkowość względna								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
<b>Procentowe zmiany bezwymiarowej siły nośnej <math>\Delta C_1</math></b>									
$0,85 \cdot \varepsilon_p$	-40,8	-39,1	-38,9	-39,0	-39,1	-39,0	-39,0	-38,8	-38,6
$0,90 \cdot \varepsilon_p$	-25,0	-23,9	-23,8	-23,8	-23,8	-23,8	-23,8	-23,7	-23,6
$0,95 \cdot \varepsilon_p$	-11,6	-11,0	-10,9	-10,9	-11,0	-11,0	-10,9	-10,9	-10,9
$1,00 \cdot \varepsilon_p$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$1,05 \cdot \varepsilon_p$	10,1	9,5	9,4	9,4	9,5	9,4	9,4	9,4	9,3
$1,10 \cdot \varepsilon_p$	18,8	17,7	17,6	17,6	17,6	17,6	17,6	17,5	17,4
$1,15 \cdot \varepsilon_p$	26,5	24,9	24,7	24,7	24,7	24,7	24,7	24,6	24,5
<b>Procentowe zmiany bezwymiarowej siły tarcia <math>\Delta F_{R1}</math></b>									
$0,85 \cdot \varepsilon_p$	-23,3	-21,3	-20,4	-19,8	-19,6	-19,4	-19,3	-19,2	-19,0
$0,90 \cdot \varepsilon_p$	-14,6	-13,5	-12,9	-12,5	-12,4	-12,2	-12,1	-12,1	-12,0
$0,95 \cdot \varepsilon_p$	-6,9	-6,4	-6,1	-5,9	-5,9	-5,8	-5,8	-5,7	-5,7
$1,00 \cdot \varepsilon_p$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

cd. tabeli 1

$1,05 \cdot \varepsilon_p$	6,3	5,8	5,5	5,4	5,3	5,2	5,2	5,2	5,1
$1,10 \cdot \varepsilon_p$	12,1	11,0	10,5	10,3	10,1	10,0	10,0	9,9	9,8
$1,15 \cdot \varepsilon_p$	17,3	15,8	15,2	14,8	14,5	14,4	14,3	14,2	14,1
	<b>Procentowe zmiany umownego współczynnika tarcia <math>\Delta(\mu/\psi)</math></b>								
$0,85 \cdot \varepsilon_p$	12,4	12,8	13,4	13,8	14,0	14,1	14,1	14,2	14,2
$0,90 \cdot \varepsilon_p$	8,3	8,5	8,8	9,1	9,3	9,4	9,4	9,4	9,4
$0,95 \cdot \varepsilon_p$	4,1	4,2	4,4	4,5	4,6	4,7	4,7	4,7	4,7
$1,00 \cdot \varepsilon_p$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$1,05 \cdot \varepsilon_p$	-4,2	-4,1	-4,3	-4,4	-4,6	-4,6	-4,7	-4,6	-4,6
$1,10 \cdot \varepsilon_p$	-8,3	-8,2	-8,5	-8,8	-9,1	-9,2	-9,3	-9,2	-9,2
$1,15 \cdot \varepsilon_p$	-12,5	-12,1	-12,7	-13,1	-13,5	-13,7	-13,8	-13,8	-13,8

## 6. Spostrzeżenia i wnioski

Analizując uzyskane wyniki obliczeń numerycznych przedstawione na rys. 3, 4, 5 oraz w tabeli 1 można zauważyć, że:

- zmniejszenie wysokości szczeliny smarnej o 5% powoduje wzrost siły nośnej średnio o 11% natomiast siły tarcia o 6%, a spadek umownego współczynnika tarcia o 4,5%;
- zmniejszenie wysokości szczeliny smarnej o 10% powoduje wzrost siły nośnej średnio o 23,8% natomiast siły tarcia o 12,7%, a spadek umownego współczynnika tarcia o 9,1%;
- zmniejszenie wysokości szczeliny smarnej o 15% powoduje wzrost siły nośnej średnio o 39,1% natomiast siły tarcia o 20,1%, a spadek umownego współczynnika tarcia o 13,7%;
- zwiększenie wysokości szczeliny smarnej o 5% powoduje spadek siły nośnej średnio o 9,5% natomiast siły tarcia o 5,5%, a wzrost umownego współczynnika tarcia o 4,5%;
- zwiększenie wysokości szczeliny smarnej o 10% powoduje spadek siły nośnej średnio o 17,7% natomiast siły tarcia o 10,4%, a wzrost umownego współczynnika tarcia o 8,9%;
- zwiększenie wysokości szczeliny smarnej o 15% powoduje spadek siły nośnej średnio o 24,9% natomiast siły tarcia o 15,0%, a wzrost umownego współczynnika tarcia o 13,2%.

Zmiany stochastyczne wysokości szczeliny smarnej, która wynika z chropowatości powierzchni lub innych czynników mają istotny wpływ na parametry eksploatacyjne poprzecznych łożysk ślizgowych, dlatego podczas projektowania węzłów tarcia ślizgowego ten fakt powinno się uwzględniać w obliczeniach.

## **7. Literatura**

1. Adesanya S. O., Makinde O. D.: Thermodynamic analysis for a third grade fluid through a vertical channel with internal heat generation. *Journal of Hydrodynamics*. Ser. B. 27 (2), 2015.
2. Awais M.: Applications of the Numerical Inversion of the Laplace transform to unsteady problems of the third grade fluid. *Applied Mathematics and Computation*, 250, 2015.
3. Bartz W.J.: *Gleitlagertechnik*, Expert Verlag, Grafenau 1981.
4. Bourgin P., Gay B.: Determination of the Load Capacity of a Finite Element Method in a Case of the non-Newtonian Lubricant. *Transaction of the ASME, Journal of Tribology*, 106 (2), 1984.
5. Chianga H. L., Lina J. R., Hsub C. H., Chang Y. P.: Linear stability analysis of a rough short journal bearing lubricated with non-Newtonian fluids. *Springer Verlag, Tribology Letters*, Vol. 17, No. 4, 2004.
6. Dai R. X., Dong Q., Szeri A. Z.: Approximations in Hydrodynamic Lubrication. *Transactions of the ASME, Journal of Tribology*, Vol. 114, 1992.
7. Dunn J. E., Rajagopal K. R.: Fluids of differential type: critical review and thermodynamic analysis. *International Journal of Engineering Science*, 33(5), 1995.
8. Fisz M.: *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*. PWN, Warszawa 1967.
9. Galindo-Rosales F. J., Rubio-Hernández F. J., Sevilla A.: An apparent viscosity function for shear thickening fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 166, 2011.
10. Guha S. K.: Analysis of steady-state characteristics of misaligned hydrodynamic journal bearings with isotropic roughness effect. *Elsevier, Tribology International*, 33, 2000.
11. Hashimoto H.: Surface Roughness Effects in High-Speed Hydrodynamic Journal Bearings. *Transactions of the ASME, Journal of Tribology*, Vol. 119, 1997.
12. Helwig Z.: *Elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej*. PWN, Warszawa 1977.
13. Lang O. R., Steinhilper W.: *Gleitlager*. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1978.

14. Miszczak A.: Analiza hydrodynamicznego smarowania łożysk ślizgowych cieczami o właściwościach nienewtonowskich. Wydawnictwo Naukowe Instytutu Technologii Eksploatacji–PIB w Radomiu, Radom 2019.
15. Miszczak A.: Analiza hydrodynamicznego smarowania ferrocieczą poprzecznych łożysk ślizgowych. Fundacja Rozwoju Akademii Morskiej, Gdynia 2006.
16. Wierzcholski K., Miszczak A.: Mathematical principles and methods of biological surface lubrication with phospholipids bilayers. *Biosystems*, 178, 2019.
17. Wierzcholski K., Miszczak A.: Electro-Magneto-Hydrodynamic Lubrication. *Open Physics*, 16 (1), 2018.
18. Wierzcholski K.: Teoria niekonwencjonalnego smarowania łożysk ślizgowych. *Prace Naukowe Politechniki Szczecińskiej*, No. 527, Szczecin 1995.