

O strojeniu regulatorów cyfrowych z wykorzystaniem mechanizmów quasi-ciągłych

Streszczenie. W pracy zaprezentowano metodologię syntezy dyskretnego regulatora PID z wykorzystaniem quasi-ciągłej reprezentacji układu otwartego, umożliwiającą wykorzystanie algorytmów dla ciągłych układów sterowania. Wskazano konieczność uwzględnienia okresu próbkowania w regulatorze i obiekcie. Podejście to wykorzystuje aproksymację ciągłą dla dyskretnych chwil próbkowania. Technika ta umożliwia kształtowanie przebiegów czasowych już na etapie projektowania układu. Dodatkowo przedstawiono różne sposoby realizacji dyskretnego regulatora PID.

Abstract. This paper presents the methodology for the synthesis of a discrete PID-type controller using a quasi-continuous representation of the system by consideration sample time in both plant and controller. Such an approach, proposed by authors, allows us to use algorithms designed for continuous control systems. This method uses a continuous approximation of the dynamic system at discrete sampled times. It makes it possible to shape the time response already at the system design stage. In addition, different methods of implementing a discrete PID controller are presented. (On tuning digital controllers using quasi-continuous mechanisms)

Słowa kluczowe: regulator PID, model QCT, układ regulacji dyskretnej w czasie

Keywords: PID controller, quasi-continuous model, digital control

Wstęp

Regulator PID [1, 2] to najczęściej stosowany algorytm sterowania, składający się z trzech składowych:

$$(1) \quad u(t) = k_c \left(e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right) \\ = u^P(t) + u^I(t) + u^D(t)$$

gdzie odpowiednie składowe to: $u^P(t)$ składowa proporcjonalna, $u^I(t)$ składowa całkująca oraz $u^D(t)$ składowa różniczkująca regulatora.

Wykorzystując transformatę Laplace'a, gdzie $\bar{x}(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^\infty x(t)e^{-st} dt$ otrzymuje się postać operatorową transmitancji regulatora PID:

$$(2) \quad C(s) = \frac{\bar{u}(s)}{\bar{e}(s)} = k_c \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$$

Powyższa równoległa postać regulatora jest podstawową realizacją. W literaturze [9, 10, 11, 12, 13] znaleźć można także inne odmiany m.in. takie w których sygnał uchybu podawany jest na część proporcjonalną i całkującą a tylko sygnał regulowany na część różniczkującą, a także struktury szeregowo. W niniejszej pracy wykorzystana zostanie postać klasyczna (2).

Podczas syntezy układu regulacji zadaniem projektanta systemu sterowania jest, dla danego obiektu regulacji $P(s)$, dobór wartości nastaw k_c, T_I, T_D w taki sposób aby powstały układ regulacji posiadał odpowiednie, pożądane własności dynamiczne i spełniał postawione przed nim cele. Dla ciągłej realizacji prawa sterowania w literaturze znaleźć można wiele kryteriów i metod strojenia regulatora PID [4]. W pracy rozpatrywany jest problem syntezy układu regulacji dyskretnej w czasie. Układ dyskretny określony jest jedynie w dyskretnych i równo-odległych chwilach czasu $t = kh, k = 0, 1, 2, \dots$ przy sterowaniu $u(t) = u(kh) = u_k$ gdzie $kh \leq t < kh + h$. Odległość poszczególnych chwil czasu określona jest przez okres próbkowania h .

W tak postawionym zadaniu syntezy regulator (1) należy przystosować do warunków działania układu i zapisać go w postaci dyskretnej. Przekształcenia regulatora ciągłego do jego realizacji dyskretnej można przeprowadzić na kilka sposobów i właśnie zagadnieniu reprezentacji dyskretnej regulatora PID poświęcona jest także ta praca. Dodatkowo zaproponowany zostanie mechanizm wyznaczania nastaw dla regulatora dyskretnego z wykorzystaniem metod stroje-

nia przeznaczonych dla regulacji ciągłej w taki sposób aby zachowanie układu dyskretnego było możliwie jak najbardziej zbliżone do zachowania układu ciągłego, w którym prowadzony był proces strojenia, doboru wartości nastaw regulatora. Zaprezentowane zostanie zatem podejście z quasi-ciągłym opisem charakteryzującym zachowanie układu dyskretnego, które umożliwia zastosowanie metod ciągłych dla regulacji dyskretnej. Podejście z modelem quasi-ciągłym, które aproksymuje zachowanie układu dyskretnego umożliwi zastosowanie metod ciągłych syntezy układu do układów regulacji dyskretnej w czasie. Dla oceny jakości poszczególnych rozwiązań zaprezentowano wskaźnik całkowity ukazujący różnice między przebiegiem odpowiedzi skokowej w układzie quasi-ciągłym, a odpowiadającym mu przebiegiem w układzie dyskretnym.

Dyskretny regulator PID

W celu implementacji cyfrowego regulatora typu PID należy dokonać jego dyskretyzacji, a właściwie zapisać regulator ciągły (2) dla dyskretnych chwil czasu. Określenie dyskretyzacja z wykorzystaniem transformaty \mathcal{Z} rezerwujemy dla operacji wyznaczenia dyskretnego modelu obiektu regulacji, który zdefiniowany jest modelem ciągłym w czasie $K(s)$. Podobnie wyglądająca operacja dla regulatora nazywana będzie w pracy zapisem dyskretnym dla odróżnienia tych dwóch mechanizmów. W poniższych punktach opisano najczęściej spotykane w literaturze metody przejścia z ciągłego opisu regulatora na odpowiedni opis dyskretny.

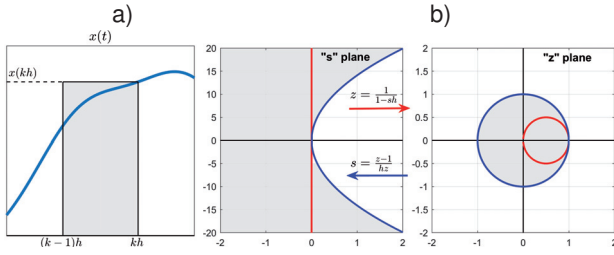
Metoda prostokątów oraz różnicy wstecznej

Do zaimplementowania dyskretnych odpowiedników operacji różniczkowania oraz całkowania w regulatorze (1) wykorzystane zostaną najprostsze algorytmy metod numerycznych.

Podstawową metodą dyskretnej aproksymacji różniczkowania jest wykorzystanie metod różnic skończonych, a zwłaszcza różnicy wstecznej, która gwarantuje realizowalność operacji różnicowania w rzeczywistych aplikacjach. Operacje różniczkowania danego sygnału $x(t)$ i jej aproksymacje różnicą wsteczną przy $\Delta t \rightarrow 0$ definiuje się jako:

$$(3) \quad \frac{d}{dt} x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

Operację całkowania natomiast, wchodzącą w skład części I regulatora, w najprostszy sposób można zdefini-



Rys. 1. Graficzna interpretacja a) metody prostokątów oraz b) przekształcenia Eulera (różnicy wstecznej) dla obszaru stabilnego modeli ciągłych w obszar stabilny modeli dyskretnych i odwrotnie iować używając metody prostokątów:

$$(4) \int_0^t x(\tau) d\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{\lfloor t/\Delta t \rfloor} x(i\Delta t) \Delta t$$

Na rys. 1a) zaprezentowano interpretację graficzną metody prostokątów.

Zaprezentowany w (4) przyrost czasu to w przypadku regulacji dyskretniej okres próbkowania: $\Delta t \rightarrow h$. Dla tak przyjętej konwencji obliczeń elementarne operacje różniczkowania (D) i całkowania (I), w postaci dyskretniej, można zapisać następująco:

$$(5) D : \lim_{\Delta t \rightarrow h} \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t} = \frac{x(kh) - x((k-1)h)}{h}$$

$$(6) I : \lim_{\Delta t \rightarrow h} \sum_{i=0}^{\lfloor kh/\Delta t \rfloor} x(i\Delta t) \Delta t = \sum_{i=0}^k x(ih)h$$

Przez $x(kh - nh) = x_{k-n} = z^{-n}x_k$ oznaczane będzie natomiast opóźnienie danego sygnału o n okresów próbkowania. Dla tak przeprowadzonego procesu dyskretyzacji ciągłych operatorów poszczególne składowe opisujące regulator PID (1) można opisać poniższymi zależnościami:

$$(7) u_k^P = k_c e_k,$$

$$(8) u_k^I = \frac{k_c}{T_I} \sum_{i=0}^k e_i h = u_{k-1}^I + \frac{k_c}{T_I} e_k h = z^{-1}u_k + \frac{k_c}{T_I} e_k h = \frac{k_c}{T_I} \frac{h}{1 - z^{-1}} e_k,$$

$$(9) u_k^D = k_c T_D \frac{e_k - e_{k-1}}{h} = k_c T_D \frac{1 - z^{-1}}{h} e_k$$

a wynikowy regulator cyfrowy jako:

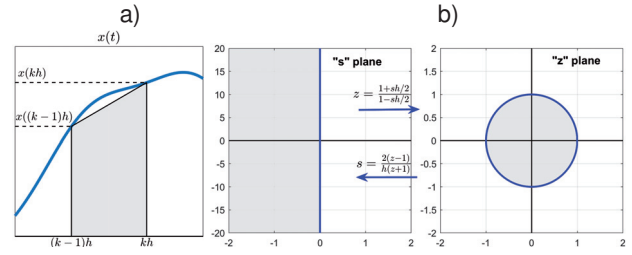
$$(10) u_k = k_c \left(1 + \frac{1}{T_I} \frac{h}{1 - z^{-1}} + T_D \frac{1 - z^{-1}}{h} \right) e_k$$

Niech $x_k = x(t)|_{t=kh} = x(kh)$ oraz $\bar{x}(z) = \mathcal{Z}\{x(kh)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kh)z^{-k}$ będzie transformata \mathcal{Z} (Laurenta) sygnału $x(t)$ dla danego $h > 0$. Wówczas, stosunek postaci operatorowej sterowania $\bar{u}(z)$ do postaci operatorowej sygnału uchybu regulacji $\bar{e}(z)$ można zapisać jako dyskretną transmitancję regulatora $D_1(z)$:

$$(11) D_1(z) = \frac{\bar{u}(z)}{\bar{e}(z)} = k_c \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

lub w postaci zależności na wartość sygnału sterującego w kolejnych dyskretnych chwilach czasu:

$$(12) u_k = u_{k-1} + k_c (b_0 e_k + b_1 e_{k-1} + b_2 e_{k-2})$$



Rys. 2. Graficzna reprezentacja a) metody całkowania trapezami i b) przekształcenie Tustina dla obszaru stabilnego modeli ciągłych w obszar stabilny modeli dyskretnych i odwrotnie

Konsekwencją wprowadzenia różnicy wstecznej i metody prostokątów jest możliwość zastosowania podstawienia Eulera:

$$(13) s \hat{=} \frac{d}{dt} \hat{=} \frac{1 - z^{-1}}{h} = \frac{1}{h} \frac{z - 1}{z}$$

dzięki któremu w prosty sposób otrzymuje się opis dyskretny regulatora (11) z zapisu ciągłego (2) :

$$(14) D_1(z) = C(s)|_{s=\frac{z-1}{h z}}$$

Na rys. 1b) zaprezentowano w jaki sposób podstawienie (13) odwzorowuje obszar stabilności z płaszczyzny "s" na płaszczyznę "z". Jak można zauważyć zawęża tę powierzchnię w stosunku do granicy stabilności układu dyskretnego, jaką jest okrąg jednostkowym i może to mieć istotny wpływ na jakość regulacji. Z drugiej strony podstawienie (przejście) odwrotne z płaszczyzny "z" na "s" można zdestabilizować układ.

Metoda trapezów

Dokładniejszą metodą numerycznego całkowania jest metoda trapezów, której graficzną interpretację przedstawiono na rys. 2a). Część całkująca w tym przypadku opisana jest zależnością:

$$(15) u_k^I = \frac{k_c}{T_I} \sum_{i=1}^k \frac{e_i + e_{i-1}}{2} h = u_{k-1}^I + \frac{k_c}{T_I} \frac{e_k + e_{k-1}}{2} h = z^{-1}u_k^I + \frac{k_c}{T_I} \frac{(1 + z^{-1})h}{2} e_k = \frac{k_c}{T_I} \frac{h(1 + z^{-1})}{2(1 - z^{-1})} e_k$$

Zastosowanie tej metody w regulatorze dyskretnym prowadzi do zapisu:

$$(16) u_k = k_c \left(1 + \frac{1}{T_I} \frac{h(1 + z^{-1})}{2(1 - z^{-1})} + T_D \frac{1 - z^{-1}}{h} \right) e_k$$

a w konsekwencji transmitancja dyskretna regulatora PID przyjmuje postać:

$$(17) D_2(z) = \frac{\bar{u}(z)}{\bar{e}(z)} = k_c \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}},$$

kłóra ma identyczną strukturę jak postać transmitancji $D_1(z)$ (11).

Podstawienie Tustina

Niech funkcja $x^*(t)$ będzie ciągiem impulsów o polach powierzchni określonych przez wartości $x(kh)$ [2, 14]:

$$(18) x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kh) \delta(t - kh) = \begin{cases} x(kh) & \text{dla } t = kh \\ 0 & \text{w innym przypadku} \end{cases}$$

Stosując do funkcji $x^*(t)$ transformatę Laplace'a otrzymujemy zależność:

$$(19) \quad \mathcal{L}\{x^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kh)\mathcal{L}\{\delta(t-kh)\} \\ = \sum_{k=0}^{\infty} x_k e^{-skh} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}$$

W konsekwencji stosując transformatę Laplace'a do dyskretnej funkcji $x^*(t)$ otrzymujemy, w alternatywny sposób, zależność określającą transformatę \mathcal{Z} sygnału $x(t)$. Jednocześnie, analizując zależności (19) można pokazać, że dyskretny operator opóźnienia z^{-1} może być rozumiany jako opóźnienie w czasie o jeden okres próbkowania h i można aproksymować go w dziedzinie operatora ciągłego następującą funkcją wymierną:

$$(20) \quad z^{-1} \hat{=} e^{-sh} = \frac{e^{-sh/2}}{e^{sh/2}} \approx \frac{1-sh/2}{1+sh/2}$$

lub odpowiednio przekształcając zależność (20) względem operatora s zdefiniować przekształcenie Tustina (transformatę biliniową):

$$(21) \quad s \hat{=} \frac{2}{h} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \frac{2}{h} \frac{z-1}{z+1}$$

Wykorzystanie (21) w części całkującej i różniczkującej w regulatorze (2) prowadzi do pełnego opisu regulatora cyfrowego PID:

$$(22) \quad u_k = k_c \left(1 + \frac{1}{T_I} \frac{h(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})} + T_D \frac{2(1-z^{-1})}{h(1+z^{-1})} \right) e_k$$

lub w postaci transmitancji dyskretnej:

$$(23) \quad D_3(z) = \frac{\bar{u}(z)}{\bar{e}(z)} = k_c \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - z^{-2}}$$

Postać ta jest odmienna od tych zaprezentowanych w (11) i (17). Warto także zauważyć, że wykorzystanie przekształcenia Tustina do członu całkującego skutkuje funkcją identyczną jak wykorzystanie w procesie całkowania metodą trapezów (15).

Powyższą transmitancję dyskretną regulatora $D_3(z)$ uzyskać można wykorzystując transformatę biliniową (21) do regulatora (2) i można zapisać całościowo jako podstawienie [2, 13]:

$$(24) \quad D_3(z) = C(s) \Big|_{s=\frac{2(z-1)}{h(z+1)}}$$

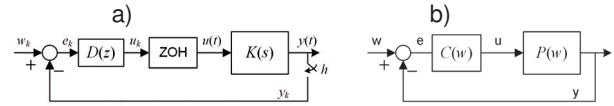
Metoda MPZ (ang. Matched Pole-Zero)

Kolejną metodą wykorzystywaną w literaturze [6, 13] do dyskretyzacji elementu ciągłego jest metoda MPZ. Jeśli postać idealnego regulatora PID dana jest transmitancją:

$$(25) \quad C(s) = k_c^* \frac{(s+c_1)(s+c_2)}{s}$$

przy $k_c^* = k_c T_D$ stosując własność $z \hat{=} e^{sh}$ oraz umieszczając zera oraz bieguny regulatora na dyskretnej płaszczyźnie w następujący sposób:

$$(26) \quad (s+a) \hat{=} \frac{z - e^{-ah}}{hz} = \frac{1 - e^{-ah} z^{-1}}{h}$$



Rys. 3. a) Bazowy układ regulacji dyskretnej w czasie oraz b) jego odpowiednik QCT wykorzystywany w procesie syntezy

otrzymuje się:

$$(27) \quad D_4(z) = k_d^* \frac{hz(z - e^{-c_1 h})(z - e^{-c_2 h})}{h^2 z^2 (z - e^{-0h})} \\ = k_d^* \frac{(1 - \beta_1 z^{-1})(1 - \beta_2 z^{-1})}{h(1 - z^{-1})} \\ = k_c \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

gdzie z warunku brzegowego odpowiedzi impulsowej:

$$(28) \quad \lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 - z^{-1}}{h} D_4(z)$$

otrzymujemy (wzmocnienie niskoczęstotliwościowe) $k_d^* = k_c^* \frac{c_1 c_2 h^2}{(1-\beta_1)(1-\beta_2)}$. Warto zauważyć, że w (26) dla $a \rightarrow 0$ otrzymuje się podstawienie Eulera. Otrzymana postać dyskretnej (27) posiada identyczną strukturę z $D_1(z)$ i $D_2(z)$.

Mechanizm quasi-ciągły (QCT)

Głównym celem pracy jest wypracowanie algorytmu strojenia regulatora dyskretnego w oparciu o metodologię algorytmu strojenia dla czasu ciągłego. W tym celu zaproponowany zostanie opis QCT (ang. Quasi-Continuous Time) układu otwartego (obiektu i regulatora), umożliwiający nastrojenie regulatora ciągłego i zarazem odwzorowujący działanie jego odpowiednika dyskretnego. Podejście to umożliwi przeniesienie wartości nastaw do realizacji dyskretnej regulacji. Przebiegi czasowe zamkniętego układu regulacji dyskretnej jak na rys. 3a) powinny być zbliżone do przebiegów jego odpowiednika QCT rys. 3b).

W układzie dyskretnym zakłada się występowanie ekstrapolatora zerowego rzędu ZOH (ang. Zero-Order Hold) o operatorowej funkcji przejścia jak w (31). W takiej konfiguracji układu, transmitancję dyskretną obiektu wyznaczyć można z następującej zależności:

$$(29) \quad H(z) = \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1 - e^{-sh}}{s} K(s) \right\} \Big|_{t=kh} \right\} \\ = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\{y(kh)\}$$

gdzie $y(kh) = y(t)|_{t=kh}$ oraz $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{K(s)/s\}$ jest odpowiedzią skokową obiektu. Model $H(z)$ jest dokładnym opisem dynamiki procesu regulacji w dyskretnych chwilach czasu. Poszukując aproksymacji quasi-ciągłej tego opisu można skorzystać z podstawienia Tustina uzyskując uciąglony w czasie opis przybliżony:

$$(30) \quad P(w) = H(z) \Big|_{z=\frac{2+wh}{2-wh}} \approx \left(1 - w \frac{h}{2} \right) K(w)$$

Dla podkreślenia transformaty przybliżonej, powstałej z transmitancji dyskretnej, użyto zmiennej w . Inny sposób tej aproksymacji zakłada, że element ekstrapolatora zerowego rzędu, wprowadza opóźnienie o wartości połowy okresu próbkowania [2, 8, 13]:

$$(31) \quad ZOH(s) = \frac{1 - e^{-sh}}{s} \hat{=} e^{-w \frac{h}{2}}$$

Zatem quasi-ciągłe przybliżenie transmitancji dyskretnej $H(z)$ ma postać:

$$(32) \quad P(w) = ZOH(w)K(w) \approx e^{-w\frac{h}{2}}K(w)$$

Warto zauważyć, że rozwinięcie w szereg Taylora, do wyrazów liniowych, opóźnienia zapisanego w (31) prowadzi do czynnika użytego w (30):

$$(33) \quad e^{-w\frac{h}{2}} \approx 1 - w\frac{h}{2}$$

Wykorzystanie odpowiedniego przybliżenia QCT w postaci (32) lub (30) uzależnione będzie od konkretnego przypadku obiektu i metody syntezy układu regulacji.

Kolejnym elementem jest stworzenie interpretacji ciągłej regulatora dyskretnego. W pracy korzystać będziemy z odwrotnego podstawienia Tustina. Generalnie regulator dyskretny, powstały z ciągłego, występuje w postaci dwóch ogólnych formuł jako $D_1(z)$ lub $D_3(z)$. Wykorzystanie do tych postaci odwrotnego podstawienia Tustina generuje quasi-ciągłe transmitancje regulatorów:

$$(34) \quad C_{QCT}(w) = D_1(z)|_{z=\frac{2+w\frac{h}{2}}{2-w\frac{h}{2}}} = k_c^* \frac{(w+c_1)(w+c_2)}{w(\frac{h}{2}w+1)}$$

$$= \frac{C(w)}{\frac{h}{2}w+1} \approx C(w)e^{-w\frac{h}{2}},$$

$$(35) \quad C_{QCT}(w) = D_3(z)|_{z=\frac{2+w\frac{h}{2}}{2-w\frac{h}{2}}} = k_c^* \frac{(w+c_1)(w+c_2)}{w} = C(w),$$

które będą wykorzystywane do nastrojenia regulatora PID. Nastawy regulatora wyznaczać można z dowolnych metod ciągłych bazujących na odpowiedzi obiektu, metodzie linii pierwiastkowych czy metod częstotliwościowych. Następnie, wyznaczone k_c^* , c_1 , c_2 lub odpowiednio k_c , T_I , T_D , z wykorzystaniem podstawienia Tustina umożliwiają powrót do formy dyskretnej:

$$(36) \quad D_5(z) = C_{QCT}(w)|_{w=\frac{2(z-1)}{h(z+1)}}$$

Do prezentacji możliwości syntezy układu regulacji z wykorzystaniem opisu quasi-ciągłego zastosowane zostaną dwie metody strojenia regulatora. Wybrano dwie odmienne metody, bazujące na różnych technikach wyznaczania nastaw oraz charakteryzujące się finalnie różną jakością regulacji.

Strategie strojenia regulatora

Dla przykładowego obiektu wieloinercyjnego:

$$(37) \quad K(s) = \frac{k}{(Ts+1)^3} = \frac{1}{(7s+1)^3},$$

który sterowany będzie w układzie zamkniętym regulatorem dyskretnym PID dobrane zostaną nastawy na podstawie aproksymacji quasi-ciągłej układu dyskretnego w czasie. W pracy wykorzystane zostaną dwie metody.

"Metoda 1" to tzw. nastawy Zieglera-Nicholsa z [3] wykorzystujące zachowanie układu zamkniętego, z regulatorem proporcjonalnym, na granicy stabilności. W procesie strojenia wyznaczane jest więc wzmocnienie graniczne k_{gr} oraz wartość okresu drgań $T_{osc} = 2\pi/\omega_\pi$ sygnału regulowanego $y(t)$. Transmitancja toru głównego $L(s) = C(s)K(s)$ układu regulacji na granicy stabilności spełnia poniższy warunek:

$$(38) \quad k_{gr} : L(j\omega_\pi) = -1$$

Tablica 1. Tabela nastaw dla regulatora PID

kryterium	k_c	T_I	T_D
Metoda 1	$0.6k_{gr}$	$T_{osc}/2$	$T_{osc}/8$
Metoda 2	$1.2\tau/(\kappa\tau_o)$	$2\tau_o$	$\tau_o/2$

dla $L(s) = k_{gr}K(s)$.

"Metoda 2" to nastawy wynikające z zależności przedstawionych także w [3] ale zdefiniowane dla analizy odpowiedzi obiektu regulacji na wymuszenie skokowe, a więc na podstawie układu otwartego. Do wyznaczenia nastaw wykorzystuje się parametry κ , τ , τ_o inercji z opóźnieniem:

$$(39) \quad G(s) = \frac{\kappa}{\tau s + 1} e^{-s\tau_o},$$

które identyfikowane są w procesie analizy tej odpowiedzi czasowej obiektu. W porównaniu z [3] zmodyfikowano jednak sposób wyznaczenia parametrów modelu zastępczego $G(s)$. Zamiast metody stycznej w punkcie przegięcia użyto metody dwóch punktów. Wprowadzona modyfikacja sprawiła, że przebiegi czasowe w układzie sterowania różnią się od "Metody 1", wykazując mniejszą oscylacyjność i krótszy czas regulacji. Wzory pozwalające wyznaczyć nastawy regulatora PID wybranymi metodami zaprezentowano w tabeli 1.

W procesie wyznaczania nastaw dla regulatora dyskretnego kluczowe jest określenie aproksymacji ciągłej. Dla zaprezentowania istoty problemu przeprowadzono doświadczenia uwzględniające różne schematy postępowania przy projektowaniu regulatora dyskretnego.

Wariant 'v0' - "naiwny"

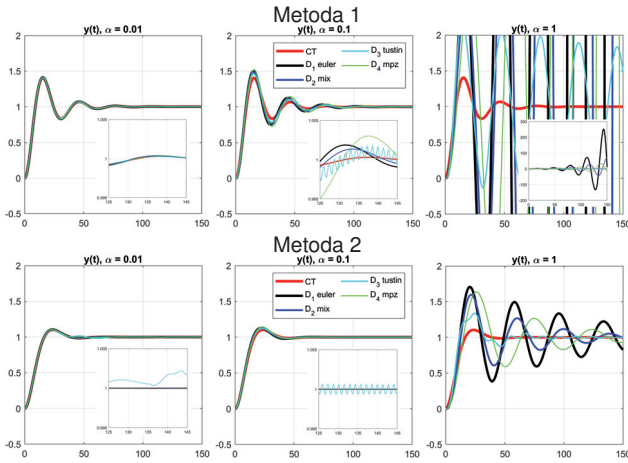
W najprostszym podejściu nie uwzględnia się w żaden sposób okresu próbkowania w procesie syntezy regulatora dyskretnego. Dlatego też ten schemat postępowania nazwano "naiwnym". Wykorzystuje się w tym podejściu ciągły model obiektu regulacji $K(s)$ (37) oraz regulator bazowy $C(s)$:

$$(40) \quad L(s) = C(s)P(s), \quad P(s) = K(s)$$

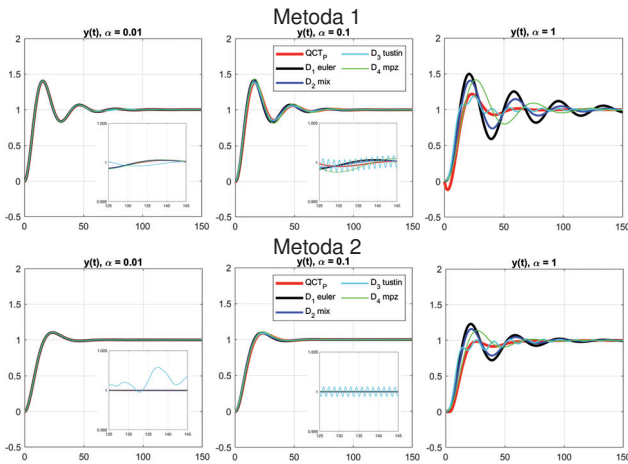
Przykładowe przebiegi czasowe dla różnych okresów próbkowania przedstawiono na rys. 4. Wykorzystano w tych symulacjach różne realizacje regulatora dyskretnego $D_1 - D_4$ opisane wcześniej. Linia czerwoną "CT" (ang. Continuous Time) oznaczono zachowanie układu ciągłego, wykorzystanego do wyznaczenia nastaw regulatora dyskretnego.

Wartość okresu próbkowania uzależniona została od wartości stałej czasowej obiektu regulacji $h = \alpha T$. Dla małego okresu próbkowania $\alpha = 0.01$ czy nawet $\alpha = 0.1$ tak nastrojony regulator dyskretny spełnia swoje zadanie a realizacja ciągła (linia czerwona - CT) może posłużyć do strojenia regulatora dyskretnego. Dla dużych częstotliwości próbkowania reprezentacja ciągła obiektu $K(s)$ oraz regulatora $C(s)$ może posłużyć do syntezy układu dyskretnego. Nie ma także praktycznie różnic w sposobie implementacji dyskretnej regulatora D_1, D_2, D_4 , poza metodą D_3 wynikającą z podstawienia Tustina (24). W implementacji tej biegun o wartości -1 powoduje zjawisko "dzwonienia" regulatora i w konsekwencji powstanie niegasnących drgań przebiegu odpowiedzi układu $y(t)$, widocznych na powiększeniu. Rozwiązaniem tego problemu jest wprowadzenie dodatkowego filtra na składowej różniczkującej regulatora, jednak nie jest to przedmiotem badań.

Dla istotnie większych okresów próbkowania jak np. $\alpha = 1$ podejście to jest niepoprawne, układ dyskretny zachowuje się zupełnie inaczej niż realizacja ciągła a finalnie może stracić stabilność dla agresywnych nastaw regulatora tj. dla



Rys. 4. Podejście "naïwne" (v0), wpływ próbkowania $h = \alpha T$, dla "Metody 1" oraz "Metody 2"



Rys. 5. Metoda QCT z modelem procesu $P(w)$ (v1), wpływ próbkowania $h = \alpha T$, dla kryterium "Metody 1" oraz "Metody 2".

zapewniających mniejszy stopień stabilności jak w "Metodzie 1".

Wariant 'v1' - z quasi-ciągłym modelem obiektu

Podejście to uwzględnia okres próbkowania w przybliżeniu ciągłym transmitancji dyskretnej obiektu. Dokładna realizacja dyskretnej obiektu wynikałaby z (29). W poszukiwaniu nastaw dyskretnej regulatora, wykorzystana zostanie aproksymacja ciągła w postaci (30) lub (32).

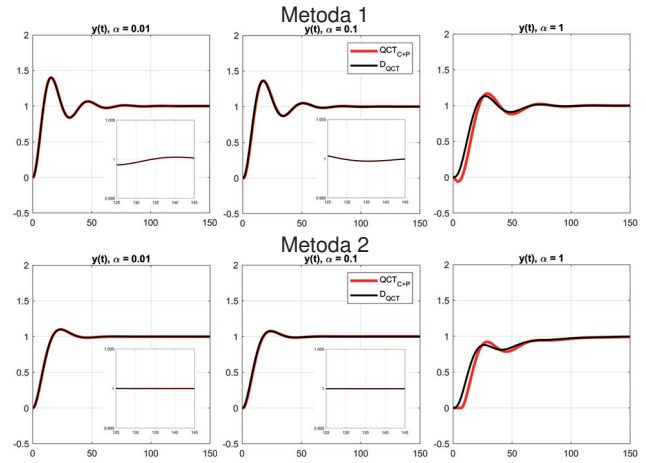
$$(41) \quad L(w) = C(w)P(w),$$

$$(42) \quad P(w) = \left(1 - w \frac{h}{2}\right) K(w) \approx e^{-w \frac{h}{2}} K(w),$$

$$(43) \quad K(w) = K(s)|_{s=w}$$

Wyznaczone nastawy regulatora $C(w)$ i jego implementacja dyskretna skutkuje przebiegami czasowymi przedstawionymi na rys. 5.

Na przedstawionych przebiegach czasowych można zauważyć wyraźną poprawę przybliżenia QCT_P , uwzględniającą w nim quasi-ciągły obiekt regulacji $P(w)$, do przebiegów w układzie dyskretnym także dla średniej wielkości okresu próbkowania $\alpha = 0.1$. W dalszym ciągu realizacja dyskretnej regulatora z podstawieniem Tustina $D_3(z)$ powoduje "dzwonienie" regulatora, a dla dużego okresu próbkowania zbieżność przebiegu quasi-ciągłego QCT_P i przebiegów w układzie dyskretnym nieco pogarsza się.



Rys. 6. Metoda QCT z modelem procesu $P(w)$ i $C_{QCT}(w)$ ($P^*(w)$ v2) - jak w (44) i (45), wpływ próbkowania $h = \alpha T$, dla dwóch metod strojenia.

Wariant 'v2' - z quasi-ciągłym modelem toru głównego

Podejście to, obok uwzględnienia okresu próbkowania h w modelu obiektu, zakłada także uwzględnienie okresu h w quasi-ciągłej reprezentacji regulatora. Docelowe struktury dyskretne regulatorów $D_1(z)$, $D_2(z)$ oraz $D_4(z)$ są identyczne. W szczególności wartości parametrów b_i ($i = 0, 1, 2$) oraz k_c tych regulatorów będą się różnić, gdyż wynikają z różnych mechanizmów zapisu dyskretnego. Jednakże, docelowa struktura regulatora jest taka sama i nie posiada negatywnych właściwości regulatora o postaci $D_3(z)$ uzyskanego z wykorzystaniem podstawienia Tustina. Zatem, dalsza analiza modelu quasi-ciągłego będzie przeprowadzona dla powtarzającej się struktury regulatora dyskretnego (11), (17) i (28).

Zauważono, że w (34), po uciążeniu postaci dyskretnej regulatora $D_1(z)$, w zapisie C_{QCT} wyróżnić można idealny regulator PID (2) o formie zero-biegunowej (25) oraz filtr dolnoprzepustowy ze stałą czasową $h/2$. Do poszukiwania nastaw regulatora quasi-ciągłego wykorzystany zostanie zatem układ otwarty o postaci:

$$(44) \quad L(w) = C_{QCT}(w)P(w) = \frac{C(w)}{\frac{h}{2}w + 1} P(w) = C(w)e^{-w \frac{h}{2}} P(w) = C(w)P^*(w),$$

gdzie

$$(45) \quad P^*(w) = \left(\frac{1 - wh/2}{1 + wh/2}\right) K(w) \approx e^{-wh} K(w),$$

$$(46) \quad K(w) = K(s)|_{s=w}$$

Uwzględnienie filtra w regulatorze, zgodnie z zależnością (33), prowadzi do zwiększenia opóźnienia zastępczego o kolejne $h/2$ w porównaniu z (42). Prowadzi to do zmiany nastaw regulatora $C(w)$ oraz aktualizacji współczynników b_i w $D_1(z)$ a w konsekwencji do przebiegów czasowych w układzie dyskretnym i jego odpowiedniku quasi-ciągłym przedstawionych na rys. 6.

Jak można zauważyć na rysunkach dla małego i średniego okresu próbkowania zbieżność przebiegów czasowych jest bardzo duża. Podobna sytuacja jest dla dużego ($\alpha = 1$), wręcz "patologicznego" i niewłaściwego okresu próbkowania. Przykład ten pokazuje, że najważniejszym podejściem jest to z uciążeniem regulatora dyskretnego poprzez podstawienie Tustina i uwzględnienie tym samym okresu próbkowania h także w modelowaniu regulatora quasi-ciągłego.

Tablica 2. Wartości całkowego wskaźnika jakości (47) dla czasu $t_m \rightarrow \infty$ w zależności od okresu próbkowania, metody strojenia regulatora oraz mechanizmu dyskretyzacji.

Wartości dla regulatorów $D_1 - D_4$ odpowiednio dla mechanizmu strojenia 'v0'/v1', wartości dla realizacji D_5 odpowiadają mechanizmowi strojenia 'v2', "-" układ niestabilny

α	0.01	0.1	1
Metoda 1			
D_1	0.3 / 0.22	3.63 / 2.21	— / 20.4
D_2	0.24 / 0.16	2.92 / 1.62	— / 11.27
D_3	4.5 / 4.0	2.43 / 1.25	300.6 / 7.57
D_4	0.33 / 0.17	4.22 / 1.61	— / 10.41
D_5	0.09	0.66	4.89
Metoda 2			
D_1	0.09 / 0.09	0.98 / 0.86	48.24 / 10.85
D_2	0.07 / 0.06	0.75 / 0.65	22.01 / 7.7
D_3	4.44 / 3.76	1.05 / 1.0	8.46 / 6.74
D_4	0.09 / 0.05	0.96 / 0.49	27.65 / 4.64
D_5	0.05	0.42	4.52

Jakość modelowania przebiegów dyskretnych

Dla obiektywnego porównania otrzymanych wyników zastosowano całkowity wskaźnik jakości:

$$(47) \quad J = \int_0^{t_m} |y_c(t) - y_d(t)| dt$$

obrazujący jak przebieg w układzie regulacji dyskretniej w czasie $y_d(t)$ różni się od przebiegu w układzie quasi-ciągłym $y_c(t)$, wykorzystanym do jego syntezy. Wartości tego wskaźnika zaprezentowano w tabeli 2.

Dla przykładów z regulatorami $D_1 - D_4$ pierwsza wartość dotyczy wskaźnika jakości J dla metody syntezy 'v0' natomiast druga dla metody 'v1'. Wiersz dla regulatora D_5 prezentuje wartości wskaźnika dla podejścia 'v2'. W trzeciej kolumnie tabeli dla 'Metody 1' w wariancie syntezy regulatora 'v0' uzyskano niestabilne warianty układów regulacji dyskretniej, dla której wartość wskaźnika zmierza do nieskończoności (oznaczone symbolem '—' w tabeli). Analiza pozostałych wartości tego wskaźnika pokazuje, że najlepsze rezultaty, najmniejszą wartość wskaźnika J , otrzymuje się wykorzystując podejście 'v2' z regulatorem dyskretnym D_5 , a więc uwzględniając okres próbkowania zarówno w quasi-ciągłym modelu obiektu jak i regulatorze. Dodatkowo w tabeli wyróżnionych zostało kilka innych wartości wskaźnika J , które w stosunku do minimalnej wartości dla D_5 nieznacznie się od niej różnią - ich wzrost wartości mieści się w zakresie 20% wartości optymalnej.

Z analizy wartości w tabeli 2 wynika, że dla odpowiednio małych okresów próbkowania czasami wystarczającym rozwiązaniem jest zastosowanie w projektowaniu regulatora dyskretnego podejścia z modyfikacją obiektu uwzględniając połowę okresu próbkowania. Dla bardzo małych okresów próbkowania, w stosunku do dominującej stałej czasowej równie dobrym rozwiązaniem jest podejście 'naiwne'. Wniosek ten jest zgodny z intuicją, gdyż dla małych okresów h , czyli dużych częstotliwości próbkowania, dyskretny układ regulacji zachowuje się praktycznie jak układ ciągły w czasie. Jednak niezależnie od jakości próbkowania, wielkości okresu próbkowania h , względnie najlepszym podejściem jest to uwzględniające w procesie syntezy układu QCT informacji o próbkowaniu zarówno w obiekcie regulacji jak i regulatorze. Podejście takie umożliwi wykorzystanie bogactwa metod strojenia układów ciągłych w czasie do syn-

Tablica 3. Wartości nastaw regulatora PID dla wybranych metod strojenia i różnych wariantów syntezy modelu QCT układu regulacji dla wybranych okresów próbkowania $h = \alpha T$

α	0.1			1		
	v0	v1	v2	v0	v1	v2
Metoda 1						
k_c	4.80	4.73	4.66	4.80	1.92	1.55
T_I	12.69	12.77	12.86	12.69	18.58	23.40
T_D	3.17	3.19	3.21	3.17	4.64	5.85
Metoda 2						
k_c	2.20	2.19	2.18	2.20	1.53	1.17
T_I	16.06	16.13	16.20	16.06	23.06	30.06
T_D	4.01	4.03	4.05	4.01	5.76	7.51

tezy dyskretnego regulatora. Jednocześnie gwarantuje, że zaprojektowany w ten sposób regulator dyskretny pozwoli uzyskać jakość regulacji obserwowaną w układzie QCT.

Wartości nastaw regulatora quasi-ciągłego PID dla dwóch wybranych okresów próbkowania, przy proponowanych w pracy metodach strojenia, przedstawiono w tabeli 3. Ujęto w niej także trzy warianty tworzenia modelu quasi-ciągłego ('v0', 'v1' i 'v2'). Wartości nastaw regulatora dla danej metody i mechanizmu 'v0' nie zmieniają się wraz ze wzrostem okresu próbkowania h (wzrostem α). Dla pozostałych wariantów syntezy można zauważyć, że wraz ze wzrostem okresu próbkowania znacznie zmniejsza się wzmocnienie regulatora k_c oraz wzrastają stałe T_I i T_D . Podobny efekt zmiany parametrów regulatora zaobserwować można także przy kolejnych wariantach tworzonego modelu quasi-ciągłego: "naiwny", uwzględniający okresu próbkowania w obiekcie oraz uwzględniający okres próbkowania w obiekcie i regulatorze. W przypadku układu z najszybszym próbkowaniem ($\alpha = 0.01$) wartości nastaw regulatora, nie ujęte w tabeli, dla wszystkich wariantów modelu QCT są niemalże identyczne i pokrywają się z wartościami nastaw dla danej metody i mechanizmu "naiwnego".

Podsumowanie

Motywacją do napisania tej pracy była chęć wykorzystania ciągłych metod strojenia regulatora PID w procesie syntezy dyskretnego w czasie układu regulacji. Przeanalizowano w tym celu różne postacie opisu quasi-ciągłego będącego zastępczym modelem dla układu dyskretnego. Zaprezentowano także różne metody zapisu dyskretnego elementu sterującego bazującego na klasycznym ciągłym regulatorze PID.

Z przeprowadzonych analiz, wykorzystujących przebiegi czasowe oraz wskaźnik całkowity wynika, że dla bardzo małych okresów próbkowania (a więc dużych częstotliwości próbkowania) w porównaniu do dominującej stałej czasowej obiektu, wystarczające jest przeniesienia nastaw regulatora ciągłego PID do opisu dyskretnego. Dla wzrastającego okresu próbkowania istotne staje się uwzględnienie jego wartości w procesie obliczania nastaw dla regulacji dyskretniej. Dokonuje się tego wykorzystując opis quasi-ciągły powstający z zastosowania podstawienia Tustina do dyskretniej postaci obiektu oraz regulatora. Jest to pełne i najwłaściwsze podejście. Pośrednie rozwiązanie uwzględnia próbkowanie tylko w obiekcie regulacji i jest wystarczające tylko dla dostatecznie małych okresów próbkowania.

W podejściu pełnym otrzymuje się opis quasi-ciągły układu dyskretnego zawierający obiekt ciągły, regulator idealny PID oraz opóźnienie o pełnym okresie próbkowania. Nastawy "ciągle" wyznaczone na podstawie powyższego

układu otwartego, zastosowane do regulatora dyskretnego gwarantują, że przebiegi w układzie dyskretnym są bardzo zbliżone do jego reprezentacji quasi-ciągłej.

Posługując się pełnym podejściem quasi-ciągłym, a więc uwzględniając okres próbkowania w reprezentacji obiektu oraz regulatora, do obliczania nastaw dla regulatora dyskretnego w czasie wykorzystać można metody oraz kryteria strojenia przewidziane dla ciągłego regulatora PID. Przedstawiona koncepcja jednocześnie zapewnia kontrolę nad przebiegami czasowymi w docelowym układzie dyskretnym już na etapie projektowania.

Autorzy: dr inż. Robert Bieda, dr inż. Rafał Grygiel, Politechnika Śląska w Gliwicach, Katedra Automatyki i Robotyki, 44-100 Gliwice, Polska, e-mail: robert.bieda@polsl.pl, rafal.grygiel@polsl.pl

LITERATURA

- [1] T. Kaczorek, *Teoria układów regulacji automatycznej*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1977
- [2] R. Gessing, *Podstawy automatyki*, Politechnika Śląska, Gliwice, 2005
- [3] J. G. Ziegler and N. B. Nichols: Optimum Settings for Automatic Controllers, *Trans. ASME*, Vol. 64, 1942, s. 759-768
- [4] W. Findeisen (red.), *Poradnik inżyniera - automatyka*, Wydanie drugie zmienione, Warszawa, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1973.
- [5] F. Vatansever and M. Hatun: s-to-z Transformation Tool for Discretization. *Gazi University Journal of Science Part C: Design and Technology*. 9. (2021). 773 - 784. 10.29109/gujsc.1003694.
- [6] N. Hori, R. Cormier, Jr and K. Kanai: Matched pole-zero discrete-time models. *Control Theory and Applications*, IEE Proceedings D. 139. (1992). 273 - 278. 10.1049/ipd.1992.0036.
- [7] R. Cormier: Matched Z-transform models under a new classification using the Euler operator, Master of Engineering, Thesis, Department of Mechanical Engineering, McGill University, Montréal, Canada, 1989.
- [8] M. Blachuta, R. Bieda, R. Grygiel: High Performance Single and Double Loop Digital and Hybrid PID-Type Control for DC/AC Voltage Source Inverters. *Energies* 2022, 15, 785. <https://doi.org/10.3390/en15030785>
- [9] T. Żabiński, Strojenie regulatorów PID dla serwomechanizmów, *Pomiary Automatyka Robotyka*, 4/2008, str. 56-63
- [10] Åström K. J., Wittenmark B.: *Computer Controlled Systems: Theory and Design*, 3rd edition. Dover Publications, Inc. Mineola, New York, 2011.
- [11] Makino H., Ohde T.: Motion Control of the Direct Drive Actuator, *Annals of the CIRP*, 1991, Vol. 40/1, s. 375-378.
- [12] Koren Y., Lo C.C.: Advanced Controllers for Feed Drives, *Annals of the CIRP*, 1992, Vol. 41/2, p. 689-698
- [13] G. Franklin, J. D. Powell, A. Emami-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 6th ed., 2010
- [14] Fang Lin Luo, Hong Ye and Muhammad Rashid, *Digital Power Electronics and Applications*, Elsevier Academic Press, 2005