MINUT 2021 (3), s. 61–73
ISSN 2719-3063

Elwira MATEJA–LOSA[1]

[1]Katedra Zastosowań Matematyki i Metod Sztucznej Inteligencji, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

Kilka słów o ciągu Fibonacciego

Streszczenie. Artykuł ma na celu zaprezentowanie słynnego matematycznego ciągu Fibonacciego, który można odnaleźć w bardzo wielu, niekiedy zaskakujących, miejscach w otaczającym nas świecie. W pracy omówiono ciekawe własności ciągu Fibonacciego oraz jego reminiscencje w różnych odległych od siebie dziedzinach życia.

Słowa kluczowe: ciąg Fibonacciego, złota liczba, złoty kąt, złota proporcja, złota spirala.

1. Wstęp

Definicja ciągu pojawia się już na etapie szkoły średniej ze szczególnym uwzględnieniem ciągu arytmetycznego i geometrycznego. Pojęcie to ponownie pojawia się na kursie matematyki na studiach technicznych, gdzie jest wzbogacone o definicję granicy ciągu. Ciągi są lubiane przez uczniów, ponieważ w różnej formie towarzyszą każdemu z nas w życiu codziennym. Wiemy, że istnieją ciągi skończone (o skończonej liczbie elementów, np. numer konta bankowego, numer karty kredytowej, hasło do konta, PESEL) i nieskończone (o nieskończonej liczbie elementów, np. ciąg liczb naturalnych, ciąg cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby π). Z matematycznego punktu widzenia układ liczb lub innych obiektów (niekoniecznie matematycznych) tworzy ciąg, jeżeli każdemu elementowi przypiszemy jednoznacznie odpowiadające mu miejsce w ciągu, czyli liczbę naturalną. Przypomnijmy definicję ciągu.

Definicja 1. *Ciągiem liczbowym nazywamy funkcję określoną na zbiorze liczb naturalnych lub jego podzbiorze o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych.*

Przyjmuje się następujące oznaczenia:

- a_1, a_2, a_3,... a_n, ... to kolejne wyrazy ciągu,
- a_n nazywamy ogólnym wyrazem ciągu, natomiast $\{a_n\}$ to oznaczenie ciągu,
- n przy wyrazie a_n nazywamy wskaźnikiem, ponieważ określa, jakie miejsce w ciągu zajmuje dany wyraz.

Autor korespondencyjny: Elwira Mateja-Losa(Elwira.Mateja@polsl.pl).
Data wpłynięcia: 26.02.2021.

Omówimy szczególny przypadek ciągu nieskończonego, zwanego ciągiem Fibonacciego, od nazwiska włoskiego matematyka Leonarda z Pizy zwanego Fibonaccim. Fibonacci w książce pt. „Liber abaci" („Księga rachunków" z 1202 roku) opisał dany ciąg. Pozostaje odpowiedzieć na pytanie, dlaczego jest to słynny ciąg matematyczny i warto poświęcić mu uwagę? Warto wzbogacić swoją wiedzę o ten ciąg, ponieważ seria liczb omawianego ciągu występuje wszędzie wokół nas: w przyrodzie, anatomii ludzkiego ciała, sztuce, muzyce, fizyce, no i oczywiście w matematyce.

2. Ciąg Fibonacciego

Przyjmijmy, że dwa pierwsze wyrazy ciągu Fibonacciego są równe 1 (w niektórych źródłach jest to 0 i 1, co jest kwestią umowy), każdy następny wyraz powstaje przez zsumowanie dwóch poprzednich wyrazów ciągu. Wyrazy ciągu Fibonacciego oznacza się poprzez F_n i nazywane są *liczbami Fibonacciego.* Obliczymy kilka początkowych wyrazów ciągu:

$$
\begin{aligned}
F_1 &= 1,\\
F_2 &= 1,\\
F_3 &= F_1 + F_2 = 1 + 1 = 2,\\
F_4 &= F_2 + F_3 = 1 + 2 = 3,\\
F_5 &= F_3 + F_4 = 2 + 3 = 5,\\
F_6 &= F_4 + F_5 = 3 + 5 = 8,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
F_n &= F_{n-2} + F_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Tabela 1. Liczby Fibonacciego

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584

Ciąg Fibonacciego jest ciągiem rekurencyjnym tzn. definiującym sam siebie (wartość kolejnego wyrazu wyznaczana jest na postawie wartości wyrazów poprzednich). Formalny zapis ciągu jest następujący:

$$
F_n = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n = 1 \\ 1 & \text{dla} \quad n = 2 \\ F_{n-2} + F_{n-1} & \text{dla} \quad n > 2 \end{cases}.
$$

Wyprowadźmy wzór na sumę n pierwszych wyrazów ciągu Fibonacciego. Korzystając z definicji ciągu Fibonacciego, możemy zapisać, że:

$$
F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \qquad \text{dla} \qquad n \geq 1
$$

lub

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1},$$

więc

$$F_1 = F_3 - F_2,$$

$$F_2 = F_4 - F_3,$$

$$F_3 = F_5 - F_4,$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n,$$

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}.$$

Po dodaniu równań stronami otrzymamy:

$$F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n = F_3 - F_2 + F_4 - F_3 + F_5 - F_4 + \ldots + F_{n+1} - F_n + F_{n+2} - F_{n+1}.$$

Część wyrazów z prawej strony równania się zredukuje i ostatecznie dostaniemy:

$$F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n = F_{n+2} - F_2.$$

Zapisując lewą stronę powyższego równania skrótowo (przy użyciu symbolu Σ) oraz korzystając z faktu, że $F_2 = 1$, możemy zapisać wzór na sumę n pierwszych wyrazów ciągu Fibonacciego:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1. \tag{1}$$

Ciekawą własnością wyrazów ciągu Fibonacciego jest fakt, że jeżeli wydzielimy dowolne dwa kolejne wyrazy ciągu Fibonacciego, to ich iloraz dąży do pewnej liczby równej w przybliżeniu 1,618. Liczba ta jest zwana **złotą liczbą** (**złotą proporcją** lub **świętą proporcją**) i oznaczana przez φ. Im większe wyrazy ciągu wydzielimy, tym lepsze przybliżenie otrzymamy [patrz tab. 2]. Wzmianka o φ pojawia się już w 1650 r. p.n.e w jednym z najstarszych papirusów matematycznych — papirusie Rhinda (Ahmesa).

Tabela 2. Ilorazy $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ wyrazów ciągu Fibonacciego

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{F_{n+1}}{F_n}$	1	2	1,5	1,6667	1,6	1,625	1,6154	1,6191	1,6177	1,6182	1,61798	1,6181

Przybliżenie złotej liczby otrzymaliśmy, dzieląc wyraz następny ciągu przez poprzedni (czyli $\frac{F_{n+1}}{F_n}$). Jeśli wydzielimy wyraz poprzedni przez następny (czyli $\frac{F_n}{F_{n+1}}$), to otrzymamy przybliżenie odwrotności złotej liczby $\frac{1}{\varphi} \approx 0,618$, która jest często oznaczana jako Φ [patrz tab. 3].

Oznacza to, że ciąg ten zachowuje się podobnie jak ciąg geometryczny. Zwróćmy uwagę na fakt, że podobnie, a nie dokładnie tak samo, będzie zachowywało się nasze przybliżenie. W ciągu geometrycznym jeśli znamy pierwszy wyraz ciągu i jego iloraz (w ciągu geometrycznym iloraz dwóch kolejnych wyrazów ciągu jest stały), to $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Tabela 3. Ilorazy $\frac{F_n}{F_{n+1}}$ wyrazów ciągu Fibonacciego

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{F_n}{F_{n+1}}$	1	0,5	0,6667	0,625	0,6154	0,619	0,6174	0,6182	0,6178	0,6181	0,618	0,618

W naszym przypadku zapiszemy $F_n = a \cdot q^{n-1}$ i podstawimy do wzoru na n–ty wyraz:

$$\begin{gathered} F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \\ F_n = a \cdot q^{n-1} \\ F_{n-2} = a \cdot q^{(n-2)-1} = a \cdot q^{n-3} \\ F_{n-1} = a \cdot q^{(n-1)-1)} = a \cdot q^{n-2} \\ a \cdot q^{n-1} = a \cdot q^{n-3} + a \cdot q^{n-2} \qquad |: a \\ q^{n-1} = q^{n-3} + q^{n-2} \qquad |: q^{n-3} \\ \frac{q^{n-1}}{q^{n-3}} = \frac{q^{n-3}}{q^{n-3}} + \frac{q^{n-2}}{q^{n-3}} \\ q^2 = 1 + q \end{gathered}$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe:

$$\begin{gathered} q^2 - q - 1 = 0 \\ \Delta = 5, \qquad \sqrt{\Delta} = \sqrt{5} \\ q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618 \\ q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,618. \end{gathered}$$

Pytanie jest następujące: które z rozwiązań należny wybrać? Zwróćmy uwagę, że q_1 jest złotą liczbą. Wybieramy oba rozwiązania, ciąg Fibonacciego jest sumą dwóch ciągów geometrycznych:

$$F_n = a_1 \cdot q_1^{n-1} + a_2 \cdot q_2^{n-1}. \tag{2}$$

Obliczyliśmy q_1 i q_2. Pozostaje jeszcze obliczyć a_1 i a_2. Wstawiając odpowiednio dla $n = 1$, $F_1 = 1$ oraz dla $n = 2$, $F_2 = 1$ do wzoru 2, otrzymujemy do rozwiązania następujący układ równań:

$$\begin{cases} 1 = a_1 + a_2 \\ 1 = a_1 \cdot q_1 + a_2 \cdot q_2. \end{cases} \tag{3}$$

Ostatecznie otrzymujemy:

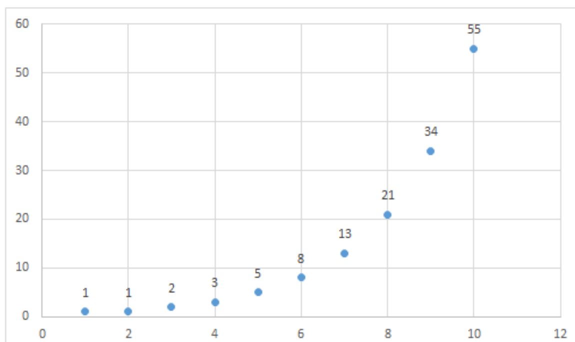
$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \\ a_2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}. \end{cases} \tag{4}$$

Po podstawieniu do wzoru (2) i doprowadzeniu do najprostszej postaci mamy tzw. wzór Bineta, zwany czasem wzorem Eulera–Bineta:

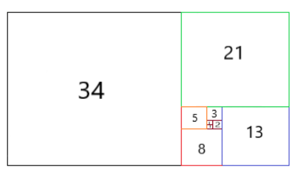
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{5}$$

Wzór ten został podany w 1843 roku przez francuskiego matematyka J.P.M. Bineta. Zwróćmy uwagę, że jest to wzór ogólny na n–ty wyraz ciągu Fibonacciego (nie wymaga znajomości wyrazów poprzednich naszego ciągu). Wzór jest złożony, jednak drugi jego człon szybko zbiega do zera, można więc podać wzór przybliżony na n–ty wyraz ciągu Fibonacciego:

$$F_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$



Rysunek 1. Wykres funkcji dla początkowych 10 wyrazów ciągu Fibonacciego



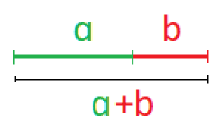
Rysunek 2. Ciąg kwadratów, których długości boków równe są kolejnym liczbom Fibonacciego

Ciąg można przedstawić na wykresie (rys. 1) lub jako ciąg kwadratów, których długości boków są kolejnym liczbami Fibonacciego (rys. 2).
Zwróćmy uwagę, że stosunek dłuższego boku prostokąta przedstawionego na rysunku 2 do krótszego boku wynosi φ; prostokąt taki nazywamy *złotym prostokątem*. Złoty prostokąt charakteryzuje się tym, że po dorysowaniu kolejnego kwadratu o boku równym dłuższemu z boków prostokąta otrzymujemy nowy złoty prostokąt. Postępując odwrotnie, tzn. odcinając od złotego prostokąta kwadrat o boku równym krótszemu bokowi prostokąta, otrzymuje się prostokąt, którego boki nadal pozostają w złotym stosunku.

Definicja 2. *Złoty podział (złota proporcja, boska proporcja) to podział odcinka na dwie części tak, by stosunek długości dłuższej z nich do krótszej był taki sam, jak całego odcinka do części dłuższej:*

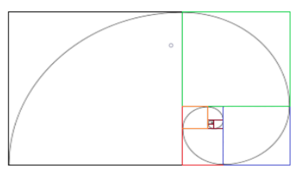
$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \varphi.$$

Geometrycznie związek ten przedstawiono na rys. 3.



Rysunek 3. Złoty podział odcinka

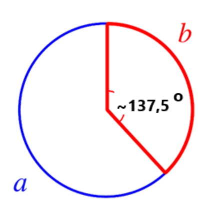
Kolejnym pojęciem związanym z ciągiem Fibonacciego jest spirala Fibonacciego zbudowana z ćwiartek okręgów, których promienie są kolejnymi liczbami Fibonacciego. Spiralę tę przedstawiono na rys. 4. Przybliżmy sobie jeszcze jedno pojęcie, a mianowicie pojęcie *złotego kąta*.



Rysunek 4. Spirala Fibonacciego

Definicja 3. *Złoty kąt to kąt środkowy oparty na mniejszym z dwóch łuków powstałych w wyniku złotego podziału okręgu.*

Miara złotego kąta w przybliżeniu wynosi 137,5 stopnia lub 2,399963 radianów i nie da się jej wyrazić ułamkiem zwykłym (jest liczbą niewymierną). Dopełnienie kąta złotego do kąta pełnego wynosi w przybliżeniu $\frac{5}{8}$, albo $\frac{8}{13}$ itd., a dokładność zwiększa się wraz z wykorzystaniem kolejnych liczb Fibonacciego.



Rysunek 5. Złoty kąt

3. Własności liczb Fibonacciego

W rozdziale tym omówimy kilka z licznych właściwości liczb Fibonacciego.

1. Suma kwadratów kolejnych wyrazów ciągu Fibonacciego też jest liczbą Fibonacciego [patrz tab. 4]. Zależność tę zapisujemy jako:

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}. \tag{6}$$

Tabela 4. Zilustrowanie wzoru (6) dla $n = 1, 2, 3, 4, 5$

n	F_n	F_{n+1}	$F_n^2 + F_{n+1}^2$	F_{2n+1}
1	1	1	2	F_3
2	1	2	5	F_5
3	2	3	13	F_7
4	3	5	34	F_9
5	5	8	89	F_{11}
6	8	13	233	F_{13}
7	13	21	610	F_{15}

2. Różnica kwadratu dowolnego wyrazu ciągu i kwadratu wyrazu ciągu o dwa miejsca w lewo jest też liczbą Fibonacciego [patrz tab. 5]:

$$F_n^2 - F_{n-2}^2 = F_{2(n-1)} \qquad \text{dla} \qquad n > 2. \tag{7}$$

Tabela 5. Zilustrowanie wzoru (7) dla $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$

n	F_n	F_{n-2}	$F_n^2 - F_{n-2}^2$	$F_{2(n-1)}$
3	2	1	3	F_4
4	3	1	8	F_6
5	5	2	21	F_8
6	8	3	55	F_10
7	13	5	144	F_{12}
8	21	8	377	F_{14}
9	34	13	987	F_{16}

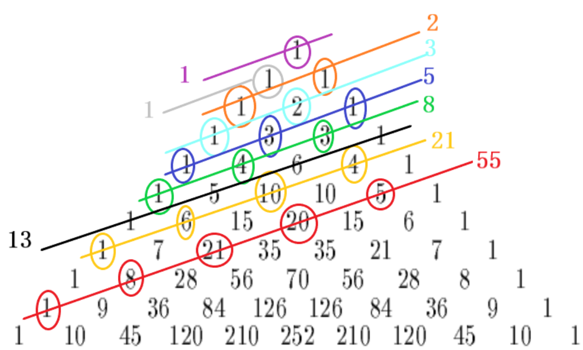
3. Trójkąt Pascala

Definicja 4. Trójkąt Pascala *to trójkątna tablica składająca się z liczb ułożonych według następującego schematu: w wierzchołku trójkąta oraz na jego dwóch bokach są jedynki. Reszta liczb powstaje w ten sposób, że liczba będąca w kolejnym rzędzie jest sumą dwóch liczb, które znajdują się bezpośrednio nad nią (rys. 6).*

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Rysunek 6. Sześć pierwszych wierszy trójkąta Pascala

Trójkąt ten ma wiele interesujących własności, nas jednak interesują tylko fakty związane z ciągiem Fibonacciego. Na rys. 7 przedstawiono graficznie ten związek. Sumy liczb na prostych są kolejnymi liczbami Fibonacciego. Czytelnik może w ramach ćwiczenia sprawdzić kolejne sumy.



Rysunek 7. Sumy wyrazów tworzące ciąg Fibonacciego na trójkącie Pascala

4. ***Wzór Cassiniego*** został odkryty w 1680 roku przez D. Cassiniego, prawdopodobnie jednak wzór ten znał już w 1608 roku J. Kepler

$$F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n. \tag{8}$$

Zilustrujmy działanie wzoru (8).

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad \underset{F_4}{\underline{3}}, \quad \underset{F_5}{\underline{5}}, \quad \underset{F_6}{\underline{8}}, \quad 13, \quad 21, \quad 34, \quad 55, \quad 89, \quad 144, \quad 233, \quad 377, \quad \ldots$$

Wybierzmy konkretny wyraz ciągu, policzmy iloczyn wyrazów sąsiednich, a następnie odejmijmy od niego kwadrat wybranego wyrazu. Wynikiem obliczeń będzie 1 lub -1 w zależności od tego, czy wybrany wyraz był liczbą parzystą, czy nieparzystą. Wyniki ujęto w tab. 6.

5. ***Tożsamość Catalana*** została podana przez E.Ch. Catalana w 1879 roku. Mówi ona, co się stanie, jeśli wybierzemy wyraz ciągu (podobnie jak w przypadku wzoru Cassiniego), a następnie cofniemy się np. o dwa (trzy, cztery itd.) wyrazy w lewo i dwa (trzy, cztery itd.) w prawo, potem te wyrazy wymnożymy i odejmiemy od ich iloczynu kwadrat wybranego na początku wyrazu. W tab. 7 przedstawiono wyniki przesunięcia o 2 miejsca, w tab. 8 — o 3 miejsca, w tab. 9 — o 4 miejsca.

Tabela 6. Zilustrowanie wzoru 8

dla	1, 1, 2	mamy	$1 \cdot 2 - 1^2 = 2 - 1 = 1$
dla	1, 2, 3	mamy	$1 \cdot 3 - 2^2 = 3 - 4 = -1$
dla	2, 3, 5	mamy	$2 \cdot 5 - 3^2 = 10 - 9 = 1$
dla	3, 5, 8	mamy	$3 \cdot 8 - 5^2 = 24 - 25 = -1$
dla	5, 8, 13	mamy	$5 \cdot 13 - 8^2 = 65 - 64 = 1$
dla	8, 13, 21	mamy	$8 \cdot 21 - 13^2 = 168 - 169 = -1$

Zależność tę wyraża wzór:

$$F_n^2 - F_{n-r} \cdot F_{n+r} = (-1)^{n-r} \cdot F_r^2, \tag{9}$$

gdzie n to wybrany wyraz ciągu Fibonacciego, natomiast r wskazuje, o ile miejsc jest przesunięcie. Zilustrujmy przesunięcie o 2 pozycje.

$$1,\quad 1,\quad \underset{F_3}{\underline{2}},\quad 3,\quad \underset{F_5}{\underline{5}},\quad 8,\quad \underset{F_7}{\underline{13}},\quad 21,\quad 34,\quad 55,\quad 89,\quad 144,\quad 233,\quad 377,\quad \ldots$$

Tabela 7. Przesunięcie o dwa miejsca od wybranego wyrazu ciągu Fibonacciego

dla	1, 2, 5	mamy	$1 \cdot 5 - 2^2 = 5 - 4 = 1$
dla	1, 3, 8	mamy	$1 \cdot 8 - 3^2 = 8 - 9 = -1$
dla	2, 5, 13	mamy	$2 \cdot 13 - 5^2 = 26 - 25 = 1$
dla	3, 8, 21	mamy	$3 \cdot 21 - 8^2 = 63 - 64 = -1$
dla	5, 13, 34	mamy	$5 \cdot 34 - 13^2 = 170 - 169 = 1$
dla	8, 21, 55	mamy	$8 \cdot 55 - 21^2 = 440 - 441 = -1$

Zilustrujmy przesunięcie o 3 pozycje.

$$1,\quad \underset{F_2}{\underline{1}},\quad 2,\quad 3,\quad \underset{F_5}{\underline{5}},\quad 8,\quad 13,\quad \underset{F_8}{\underline{21}},\quad 34,\quad 55,\quad 89,\quad 144,\quad 233,\quad 377,\quad \ldots$$

Tabela 8. Przesunięcie o trzy miejsca od wybranego wyrazu ciągu Fibonacciego

dla	1, 3, 13	mamy	$1 \cdot 13 - 3^2 = 13 - 9 = 4$
dla	1, 5, 21	mamy	$1 \cdot 21 - 5^2 = 21 - 25 = -4$
dla	2, 8, 34	mamy	$2 \cdot 34 - 8^2 = 68 - 64 = 4$
dla	3, 13, 55	mamy	$3 \cdot 55 - 13^2 = 165 - 169 = -4$
dla	5, 21, 89	mamy	$5 \cdot 89 - 21^2 = 445 - 441 = 4$
dla	8, 34, 144	mamy	$8 \cdot 144 - 34^2 = 1152 - 1156 = -4$

Ciąg Fibonacciego ma o wiele więcej ciekawych i zaskakujących właściwości (np. suma dowolnych dziesięciu kolejnych wyrazów jest podzielna przez 11, żadne dwie kolejne liczby ciągu nie mają wspólnych

Tabela 9. Przesunięcie o cztery miejsca od wybranego wyrazu ciągu Fibonacciego

dla	1, 5, 34	mamy	$1 \cdot 34 - 5^2 = 34 - 25 = 9$
dla	1, 8, 55	mamy	$1 \cdot 55 - 8^2 = 55 - 64 = -9$
dla	2, 13, 89	mamy	$2 \cdot 89 - 13^2 = 178 - 169 = 9$
dla	3, 21, 144	mamy	$3 \cdot 144 - 21^2 = 432 - 441 = -9$
dla	5, 34, 233	mamy	$5 \cdot 233 - 34^2 = 1165 - 1156 = 9$

dzielników), z których większość można udowodnić, korzystając ze wzoru ogólnego. Celem tego artykułu jest zachęcenie czytelnika do własnych poszukiwań i badań. Nadmieńmy jeszcze, że od 1963 roku jest wydawany przez The Fibonacci Association kwartalnik *The Fibonacci Quarterly* zajmujący się tylko tematyką związaną z ciągiem Fibonacciego [6].

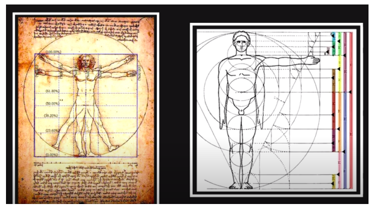
4. Liczby Fibonacciego wokół nas

W rozdziale tym zaprezentujemy przykłady występowania liczb Fibonacciego w otaczającym nas świecie.

- U wielu roślin na poszczególnych poziomach wzrostu liczba liści i rozgałęzień są liczbami ciągu Fibonacciego. W wielu kwiatach ilość płatków wyraża się jedną z liczb Fibonacciego, dlatego trudno znaleźć czterolistną koniczynę, znacznie łatwiej trójlistną. Na rys. 8 przedstawiono zdjęcie anturium, lilii (1 płatek), wilczomlecza (2 płatki), irysa (3 płatki), orlika (5 płatków) oraz rudbekii (13 płatków).
  Różyczki brokuła i kalafiora układają się spiralnie, owoc ananasa układa się w linie spiralne, podobnie jest w szyszkach sosny. Liczba spiral prawo– i lewoskrętnych to również liczby Fibonacciego. W ananasie jest 8 spiral w jedną i 13 w przeciwną stronę. Spiralne wzory słonecznika i stokrotki szczelnie i ciasno wypełniają tarczę bez pustych przestrzeni. Rośliny „kochają” liczby Fibonacciego, ponieważ rozwój taki pozwala im optymalnie wykorzystać nasłonecznienie. Każdy nowy liść wyrasta pod kątem około $137,5^\circ$ (złoty kąt). Wzrost owoców daje przewidywalną matematycznie ilość sekcji wzrostu w owocach np. w bananie (3 sekcje), w jabłku (5 sekcji), grejpfrucie (13 sekcji).

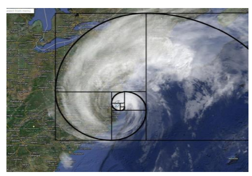
Rysunek 8

- W anatomii ludzkiego ciała znajdziemy złoty podział i liczbę φ, nie u każdego będą one idealnie zachowane. Na przykład stosunek wzrostu człowieka do odległości od stóp do pępka wynosi φ, wysokość twarzy do jej szerokości też wynosi φ. Grafika po lewej stronie na rys. 9 to człowiek witruwiański Leonarda da Vinci, ukazujący idealne proporcje ludzkiego ciała bazujące na złotym podziale. Interesujący jest również fakt, że odkrywca mechaniki działania DNA i twórca urządzenia do pomiarów fal harmonicznych serca Dan Winter, uważa, że struktura naszego DNA opiera się na złotym podziale. Krew i DNA zasilane są przez idealny transfer (kompresję) ładunku elektrycznego, który podąża ścieżką wytyczoną przez złotą spiralę. To właśnie złoty podział umożliwia harmonijny i niezwykle wydajny przepływ energii.



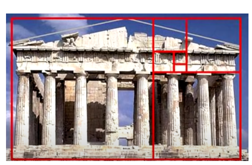
Rysunek 9. Ludzkie ciało a złota proporcja. Źródło: [8]

- Huragany formują się zgodnie ze złotą proporcją.



Rysunek 10. Huragan Irene. Źródło: [9]

- Fasada Partenonu (rys. 11), jak również wiele elementów na niej i w innych miejscach są określane przez niektórych jako zawierające się w złotych prostokątach. Projektantem tego monumentalnego budynku był Fidiasz (żyjący w V wieku p.n.e. grecki rzeźbiarz). Panuje przekonanie, że stosowane dziś oznaczenie złotej liczby, litera φ, pochodzi od pierwszej litery imienia Fidiasza (gr. $\mathit{\Phi EI\Delta IA\Sigma}$). Współczesny szwajcarski architekt Le Corbusier oparł swoją filozofię projektowania na złotym podziale i ciągu Fibonacciego.



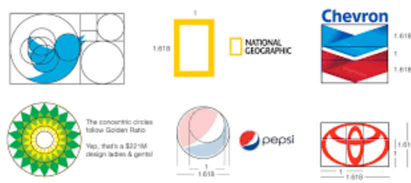
Rysunek 11. Fasada Partenonu na ateńskim akropolu. Źródło: [10]

- W muzyce znany jest Kanon D–dur Pachelbela [11]. Zapis nutowy jest skonstruowany według liczb Fibonacciego i którego motyw można spotkać w wielu współczesnych utworach muzycznych (m.in.: Vitamin C — The Graduation Song, Bob Marley and the Wailers —No Woman No Cry, The Beatles — Let It Be, Green Day — Basket Case, Matchbox 20 — Push, U2 — With or Without You).

- Motyw ciągu Fibonacciego wykorzystany został także, w utworach literackich np. w książce *Kod Leonarda da Vinci* Dana Browna, w powieści *Gniazdo światów* Marka Huberatha, w filmie *Nowy początek* Denisa Villeneuve i pewnie wielu innych utworach.

- Ciąg liczb Fibonacciego jest używany przez wielu inwestorów na całym świecie w analizie technicznej, a ściślej w teorii fal Elliotta [3]. Liczby Fibonacciego w inwestycjach najczęściej używane są jako zniesienia wyznaczające poziomy ceny (w pionie) oraz jako poziomy docelowe ceny w czasie (w poziomie). Traderzy używają zniesień Fibonacciego do wyznaczania linii wsparć i oporów oraz miejsc docelowych (czyli miejsc realizacji zysków oraz zleceń obronnych (stop loss) [4, 5].

- Współcześnie projektuje się również przedmioty oparte na złotym podziale. Większość kart, które zazwyczaj nosi się w portfelu, ma standardowy wymiar ($85,6 \times 53,98$ mm), który jest bardzo bliski złotemu podziałowi (karty bankomatowe, karty z programów lojalnościowych, dowody osobiste, prawo jazdy). Złoty podział można odnaleźć w logotypach wielu firm (Apple, Bp, Toyoty, Pepsi itp.). Twórcy stron internetowych również wykorzystują złoty podział podczas tworzenia makiet projektowanych stron internetowych.



Rysunek 12. Logo firmy a złoty podział. Źródło: [12]

5. Podsumowanie

Artykuł miał na celu zaprezentowanie i zainteresowanie czytelnika niezwykłym ciągiem Fibonacciego, którego reminiscencje występują w tak wielu miejscach. Pozostaje odpowiedzieć na pytanie, czy jest to rezultat postępującej optymalizacji, przystosowania się organizmów żywych w przyrodzie, czy też metoda prób i błędów, w działalności człowieka będąca wynikiem dążenia do harmonii wynikającej z natury, czy może zamysł twórcy wszechświata? Jedną z ciekawszych opinii na ten temat wysunął Johannes Kepler (XVII–wieczny matematyk i astronom), który powiedział, że „twierdzenie Pitagorasa i złoty podział odcinka to dwa największe skarby geometrii. Jeśli pierwszy z nich to złoty samorodek, to drugi staje się bezcennym kamieniem szlachetnym”.

Podziękowania

Autorka pragnie podziękować recenzentom za trud włożony w recenzje.

Literatura

1. Ł. Fijołek, *Liczby Fibonacciego na rynku FOREX, czyli Harmonic Trading bez tajemnic*, Wydawnictwo Dobry eBook, Kraków 2010.
2. R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka konkretna*, PWN, Warszawa 2006, s. 324-336.
3. A.S. Posamentier, I.Lehmann, *Niezwykłe liczby Fibonacciego: piękno natury i potęga matematyki*, Prószyński i S-ka, Warszawa 2014.

4. *www.edukacjagieldowa.pl/gieldowe-abc/analiza-techniczna/narzedzia-analizy-technicznej/zniesienia-fibonacciego/*
5. *https://* $funduszowe.pl/ciag_fibonacciego_na_gieldzie, strony, 12, 39.php$
6. *https://www.fq.math.ca/*
7. *http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fib.html*
8. *https://akademiaducha.pl/tag/anatomia-czlowieka/*
9. *http://www.wykop.pl/link/859055/huragan-irene-i-ciag-fibonacciego/*
10. *https://pl.pinterest.com/pin/356488126726176925/*
11. *https://www.youtube.com/watch?v=MXIEnFt7j1U*
12. *https://pl.pinterest.com/pin/124974958388725574/*
13. *https://vimeo.com/9953368*