

Rafał BROCIEK¹, Grażyna WYRTKI²

¹Katedra Zastosowań Matematyki i Metod Sztucznej Inteligencji, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

²Wydział Matematyki Stosowanej, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

Fraktale i ich zastosowania

Streszczenie. Artykuł ten ma na celu wyjaśnienie czym właściwie są fraktale i jak często można je spotkać w otaczającym nas świecie. Praca prezentuje, jak pozornie bezużyteczne obiekty geometryczne nazywane fraktalami, wykorzystuje się we współczesnej nauce oraz innych dziedzinach życia.

Słowa kluczowe: fraktal, geometria fraktalna, obiekty fraktalopodobne, wymiar fraktalny.

1. Wstęp

Zapewne część z Czytelników spotkała się już z pojęciem fraktali, czy to na lekcji matematyki, informatyki, czy w jakimś artykule na stronie internetowej. W większości przypadków fraktale były nam przedstawione jako pięknie wyglądające grafiki, nie będące niczym więcej tylko ciekawostką matematyczną. Poniższy artykuł ma na celu przybliżenie pojęcia fraktala oraz przedstawienie wykorzystania fraktali we współczesnym świecie.

W pierwszej części artykułu zostaną przedstawione podstawowe pojęcia takie jak fraktal, czy wymiar fraktalny. W dalszej części opisane zostaną wybrane fraktale, zaś końcowa część artykułu poświęcona zostanie przedstawieniu kilku zastosowań fraktali. Więcej informacji na temat fraktali znaleźć można w [1, 5, 6, 8].

2. Fraktal – co to jest?

Pierwszą próbę opisania i nazwania fraktali podjął Benoît Mandelbrot w 1967 roku w pracy „Jaka jest długość wybrzeża Wielkiej Brytanii? Statystyczne samopodobieństwo i wymiar ułamkowy”. Opracowanie to, jak też kolejne publikacje dotyczące fraktali oraz wymiaru fraktalnego uświadomiły innym naukowcom, że fraktale to nie tylko ciekawostka naukowa, ale także sposób na postrzeganie i rozumienie zjawisk

dziejących się wokół nas. To właśnie Mandelbrot jako pierwszy sformułował definicję fraktala, którą poniżej przytoczymy:

Definicja fraktala (Mandelbrot)

Fraktalem nazywamy zbiór, którego tzw. wymiar fraktalny (wymiar Hausdorfa-Besicovitcha) jest większy od wymiaru topologicznego.

Żeby w pełni zrozumieć powyższą definicję należałoby zapoznać się z gałęzią matematyki zwaną topologią. Z dziedziną tą studenci matematyki zapoznawani są w ramach studiów dopiero na późniejszych latach. Ponieważ niniejszy artykuł skierowany jest nie tylko do studentów matematyki (a może przede wszystkim do osób, które matematyki nie studiowały, bądź nie studiują), więc pozwolimy sobie pominąć pojęcie wymiaru topologicznego. Zainteresowanych Czytelników odsyłamy do [3]. Spróbujemy natomiast przedstawić pojęcie fraktala w sposób jak najbardziej przystępny.

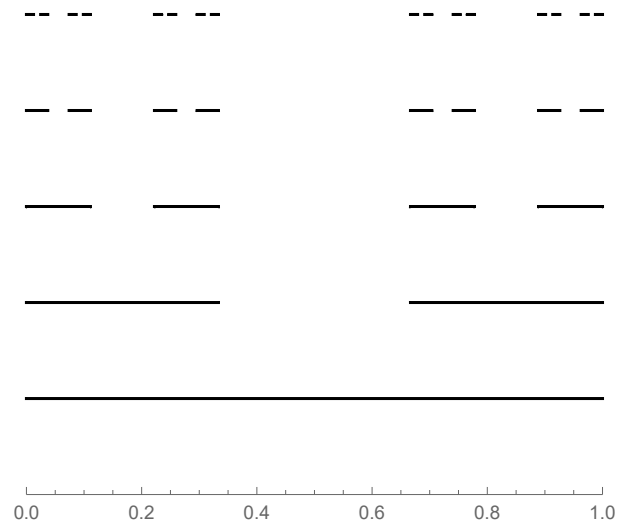
Fraktale to obiekty geometryczne, które mogą być samopodobne i są nieskończenie złożone. W przypadku fraktali samopodobnych (w pracy skupimy się głównie na tego typu fraktalach), oznacza to, że ich mniejsze fragmenty przypominają całość obiektu. Taką właściwość można dostrzec w przyrodzie, dla przykładu kalafior. Tworzą go wiązki jego kwiatów, które przypominają całość kalafiora, ale także składają się z coraz mniejszych wiązek kwiatów przypominających pomniejszoną całość kalafiora. Innym przykładem mogą być drzewa, których gałęzie przypominają strukturę ich całość. Obiekty fraktalopodobne można spotkać w otaczającym nas świecie od wielu lat. Mimo tego, fraktale są na tyle skomplikowanymi strukturami, że nie posiadają swojej prostej definicji. Na ten moment matematycy proponują określać fraktale jako zbiory charakteryzujące się: nietrywialną strukturą w każdej skali, budową nie dającą się prosto opisać językiem geometrii euklidesowej.

Wymiar fraktalny, o którym wspomniano w poprzednim akapicie, jest sposobem na określenie miary fraktala. Jest on uogólnieniem wymiaru euklidesowego i obrazuje on w jakim stopniu dany obiekt geometryczny wypełnia przestrzeń. W przypadku fraktali samopodobnych możemy zdefiniować pojęcie wymiaru samopodobieństwa:

$$W_f = \frac{\ln p}{\ln k}, \quad (1)$$

gdzie W_f to wymiar samopodobieństwa, p - liczba kopii początkowej figury, k - odwrotność skali podobieństwa do początkowej figury.

Przykładem ilustrującym zastosowanie powyższego wzoru jest obliczenie wymiaru samopodobieństwa dla zbioru Cantora, nazwanego tak od nazwiska niemieckiego matematyka Gregora Cantora, który opisał ten szczególny obiekt geometryczny w 1883 roku. Zbiór Cantora tworzymy poprzez podzielenie odcinka na 3 części, usunięcie środkowej części i powtórzeniu poprzednich kroków dla nowo powstałych odcinków. Na rysunku 1 przedstawiony został zbiór Cantora dla pięciu początkowych iteracji. Wymiar samopodobieństwa dla zbioru Cantora wynosi $W_f = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,309$. Te liczby nie są przypadkowe, w pierwszym kroku powstają dwie kopie początkowego odcinka, a każdy następny odcinek zmniejsza się 3 razy w porównaniu do tego z poprzedniego kroku. Wymiar fraktalny dla tego fraktala ma wartość mniejszą od jedynki, wynika z tego, że w granicy nie będzie już odcinków, a jedynie bezwymiarowe punkty. Wymiar fraktala możemy interpretować jako stopień wypełnienia przestrzeni, w której jest osadzony.

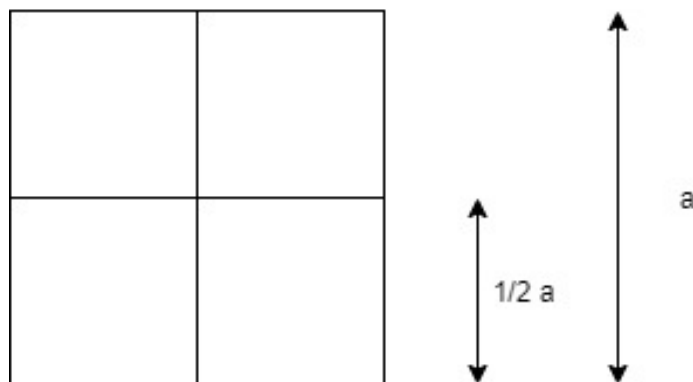


Rysunek 1. Zbiór Cantora po iteracji $i = 0, 1, 2, 3, 4$ (patrzac od dołu rysunku)

Policzmy teraz wymiar samopodobieństwa kwadratu, który fraktalem nie jest. Podzielmy kwadrat na cztery mniejsze kwadraty. Każdy z mniejszych kwadratów jest podobny do wyjściowego w skali $k' = \frac{1}{2}$ (zobacz rysunek 2). W wyniku podziału powstają $p = 4$ takie kwadraty. Stąd otrzymujemy:

$$W_f = \frac{\ln 4}{\ln 2} = \log_2 4 = 2.$$

Wymiar fraktalny kwadratu wyniósł 2 i jest równy jego wymiarowi topologicznemu.



Rysunek 2. Podział kwadratu na cztery równe części

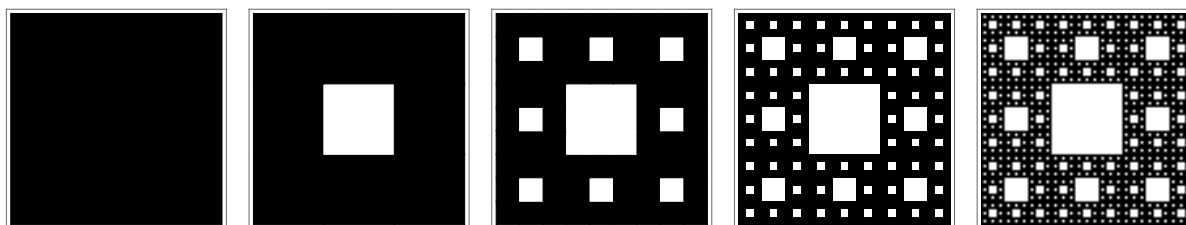
3. Przykłady wybranych fraktali

Rozdział ten poświęcimy zaprezentowaniu i opisaniu przykładów wybranych fraktali.

3.1. Dywan Sierpińskiego

Dywan Sierpińskiego jest jednym z dwóch obiektów geometrii fraktalnej, które wymyślił polski matematyk – Waław Sierpiński. Przy okazji tego fraktala wspomnijmy kilka słów o jego Autorze. Waław Sierpiński (1882–1969) był wybitnym polskim matematykiem, który w szczególności upodobał sobie następujące dziedziny matematyki: teorię mnogości – zajmowała się ona zagadnieniem nieskończoności – oraz teorię liczb – zajmowała się badaniem właściwości liczb. Zainteresował tą tematyką innych polskich matematyków, dzięki czemu w okresie międzywojennym skupili się na badaniu teorii mnogości i jej zastosowań. Tak wielkie zainteresowanie teorią mnogości zaowocowało powstaniem pierwszego specjalistycznego czasopisma matematycznego „Fundamenta Mathematica”, którego Sierpiński był współtwórcą. Autorzy publikujący w czasopiśmie, w tym Sierpiński, stali się przedstawicielami warszawskiej szkoły matematycznej. Natomiast dzięki swojemu zainteresowaniu teorią liczb Waław Sierpiński znacząco przyczynił się do złamania szyfru bolszewików podczas wojny polsko bolszewickiej. Sam matematyk podczas swojego życia opublikował ponad 700 prac naukowych i około 30 książek opisujących różne zagadnienia matematyczne.

Dywan Sierpińskiego otrzymuje się z kwadratu - dzieli się go na dziewięć identycznych, mniejszych kwadratów (w skali $k' = \frac{1}{3}$ do wyjściowego kwadratu), a następnie usuwa się środkową część bez brzegów. Dalej powtarza poprzednie czynności rekurencyjnie na każdym z ośmiu pozostałych kwadratów. Na rysunku 3 przedstawiony został dywan Sierpińskiego dla iteracji $i = 0, 1, 2, 3, 4$.



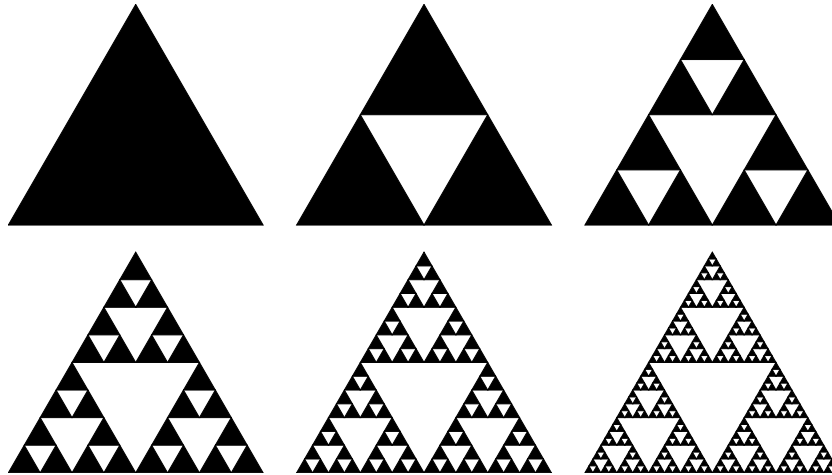
Rysunek 3. Dywan Sierpińskiego dla iteracji $i = 0, 1, 2, 3, 4$

Możemy zauważyć, że w wyniku podziału wyjściowego kwadratu na dziewięć mniejszych kwadratów oraz usunięciu kwadratu środkowego (bez brzegu), otrzymamy zbiór, który zawiera w sobie osiem mniejszych kwadratów ($p = 8$), a każdy z nich jest podobny do wyjściowego w skali $k' = \frac{1}{3}$. Stąd wymiar samopodobieństwa dywanu Sierpińskiego wynosi $W_f = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1,8928$. Przykład ten pokazuje, że wymiar fraktalny nie musi być liczbą mniejszą od 1, zaś kolejne zbiory nie muszą dążyć do bezwymiarowej struktury (w przeciwieństwie do poprzedniego przykładu – zbioru Cantora).

3.2. Trójkąt Sierpińskiego

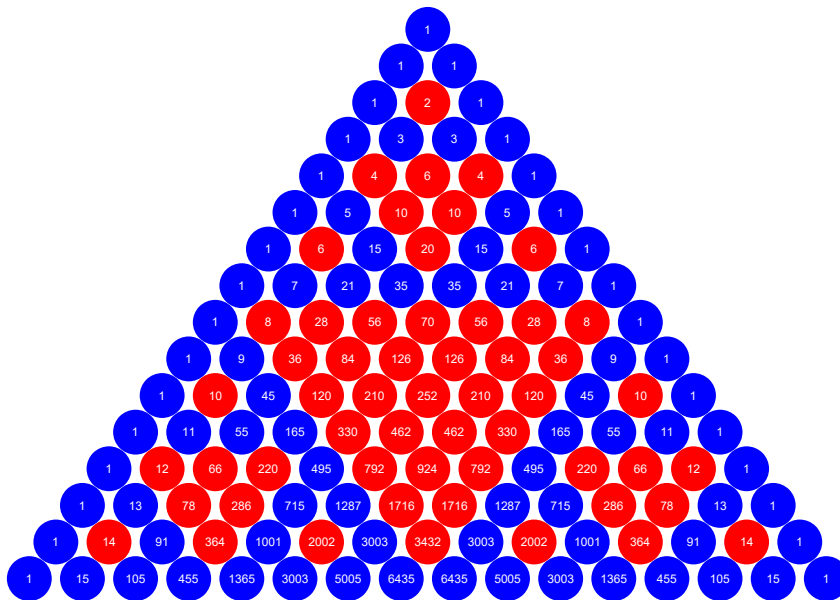
To jeden z bardziej znanych fraktali. Stworzył go wcześniej już wspomniany polski matematyk Waław Sierpiński w 1915 roku. Ciekawym jest fakt, że Sierpiński stworzył ten zbiór na długo przed powstaniem pojęcia fraktala. Struktura tego obiektu geometrii fraktalnej opiera się na trójkącie równobocznym. W trójkącie takim wyznacza się środki boków i łączy je odcinkami. Dzięki temu powstają 4 mniejsze

trójkąty przystające do siebie i podobne do pierwowzoru. W następnym kroku należy usunąć środkowy trójkąt bez brzegów i powtórzyć poprzednie czynności z pozostałymi trójkątami. Wymiar samopodobieństwa trójkąta Sierpińskiego wynosi $W_f = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,585$. Rysunek 4 przedstawia kolejne etapy tworzenia trójkąta Sierpińskiego dla $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.



Rysunek 4. Trójkąt Sierpińskiego dla iteracji $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

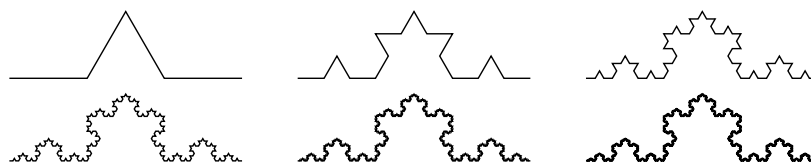
Fraktal ten ma także ciekawą właściwość: można go utworzyć z trójkąta Pascala, kolorując liczby nieparzyste innym kolorem niż parzyste (zobacz rysunek 5). Oczywiście rysunek 5 przedstawia tylko fragment nieskończonej struktury.



Rysunek 5. Trójkąt Sierpińskiego utworzony na bazie trójkąta Pascala

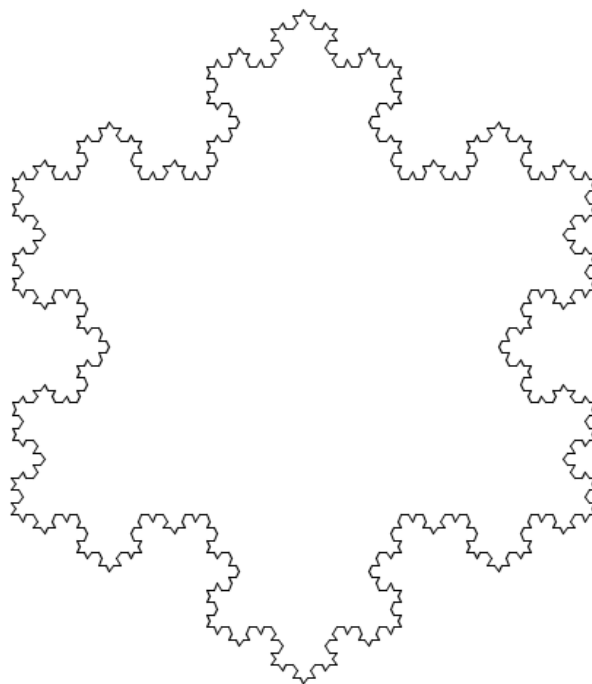
3.3. Krzywa Kocha

Kolejnym przykładem fraktala jest krzywa Kocha. Jest to krzywa fraktalna, która jest nieskończenie długa. Mimo to można narysować pewne jej przybliżenie. Pierwszy raz została opisana przez Helgego von Kocha w 1904 roku w pracy „Sur une courbe continue sans tangente obtenue par une construction géométrique élémentaire”. Krzywa Kocha powstaje poprzez podzielenie odcinka na 3 równe części, usunięcie środkowej części bez końców i zastąpienie jej dwoma identycznymi odcinkami nachylonymi do siebie pod kątem 60° , tak żeby razem z usuniętym wcześniej odcinkiem tworzyły trójkąt równoboczny. Wymiar fraktalny krzywej Kocha wynosi $W_f = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,261$. Na poniższym rysunku zaprezentowano pierwszych sześć kroków konstrukcji krzywej Kocha.



Rysunek 6. Krzywa Kocha dla iteracji $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Łącząc ze sobą trzy identyczne wycinki krzywej Kocha pod kątem 60° można stworzyć obiekt przypominający płatek śniegu. Z tego powodu taki obiekt geometryczny nazywany jest płatkami Kocha (rysunek 7).

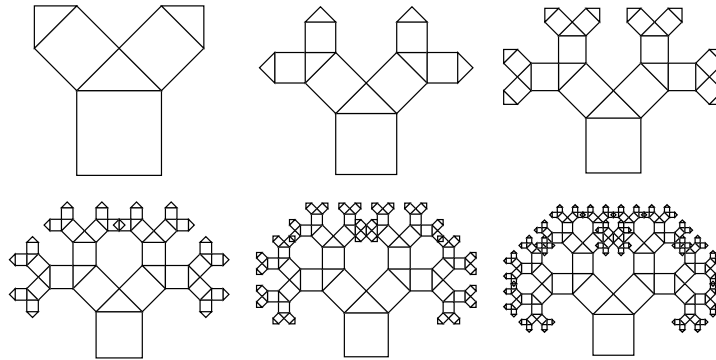


Rysunek 7. Czwarty krok płatków Kocha

3.4. Drzewo pitagorejskie

Fraktal ten składa się z kwadratów oraz trójkątów, a swoją konstrukcję opiera na twierdzeniu Pitagorasa. Swoim wyglądem przypomina drzewo, stąd nazwa tego wyjątkowego tworu. Aby skonstruować taki

obiekt należy zacząć od narysowania kwadratu. Następnie należy dorysować dowolny trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątną będzie bokiem poprzednio narysowanego kwadratu. W kolejnym kroku należy dorysować kwadraty oparte na bokach będących przyprostokątnymi trójkąta. Proces ten powtarzamy z kolejnymi kwadratami. W przypadku, gdy do konstrukcji zastosujemy trójkąt równoramienny, otrzymane „drzewo” będzie symetryczne. Gdyby przyjąć natomiast trójkąt prostokątny, różnoboczny, wówczas „drzewo” byłoby „pochylone”. Kolejne sześć etapów konstrukcji drzewa pitagorejskiego (symetrycznego) można zobaczyć na rysunku 8. Rysunek 9 prezentuje zaś drzewo pitagorejskie w przypadku użycia trójkąta różnobocznego.



Rysunek 8. Kolejne kroki konstrukcji symetrycznego drzewa pitagorejskiego

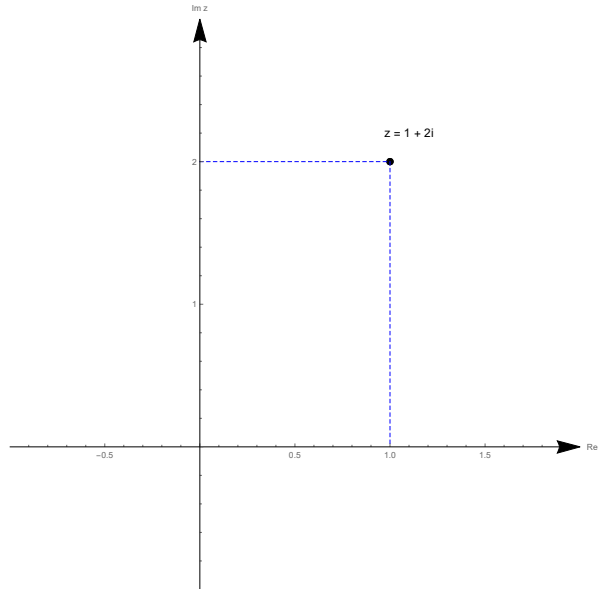


Rysunek 9. Drzewo pitagorejskie oparte na różnobocznym trójkącie prostokątnym. Źródło: *matematyczny-swiat.pl*

3.5. Zbiór Mandelbrota

Ten wyjątkowy twór został odkryty w 1980 roku, czyli dwa lata przed publikacją pracy Mandelbrota pod tytułem „The Fractal Geometry of Nature”. Mimo nazwy jaką mu nadano to nie Mandelbrot wymyślił sposób konstrukcji tego zbioru. Tożsamość prawdziwego twórcy nie jest znana. Zanim przejdziemy do opisu zbioru Mandelbrota, krótko wyjaśnimy czym są liczby zespolone (uwaga ta dotyczyć będzie Czytelników nie znających tego zbioru liczb). Liczby zespolone możemy przedstawić w postaci algebraicznej $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, zaś i jest jednostką urojoną. Zbiór liczb zespolonych będziemy oznaczać przez \mathbb{C} . Liczba zespolona i posiada następującą własność $i^2 = -1$ (co w przypadku liczb rzeczywistych nie ma miejsca). Liczbę a nazywamy częścią rzeczywistą liczby z i oznaczamy $Re z$, zaś y nazywamy

częścią urojoną liczby z , co oznaczamy Imz . Zauważmy, że $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (jeżeli w postaci algebraicznej liczb zespolonych $z = a + bi$ przyjąć $b = 0$, wówczas dostaniemy liczby rzeczywiste). Podsumowując, liczbę zespoloną $z = a + bi$ możemy utożsamiać z uporządkowaną parą liczb rzeczywistych (a, b) , a co za tym idzie zaznaczyć na płaszczyźnie, zwanej płaszczyzną Gaussa, w postaci punktu. Współrzędną a zaznaczać będziemy na osi poziomej, zaś współrzędną b na osi pionowej. Dla przykładu, na rysunku 10 zaznaczono na płaszczyźnie Gaussa liczbę $z = 1 + 2i$.



Rysunek 10. Płaszczyzna Gaussa z zaznaczoną liczbą $z = 1 + 2i$

Po tym zwięzłym wprowadzeniu do zbioru liczb zespolonych, przejdźmy do przedstawienia zbioru Mandelbrota (zwanego również żukiem Mandelbrota). Jest to zbiór liczb zespolonych p , dla których zdefiniowany poniżej ciąg rekurencyjny:

$$\begin{cases} z_0 = 0, \\ z_{n+1} = z_n^2 + p, \end{cases} \quad (2)$$

nie jest rozbieżny, tzn. $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \neq \infty$. Zbiór Mandelbrota jest podzbiorem liczb zespolonych, zatem zbiór ten będzie rysowany na płaszczyźnie Gaussa (rysunek 11).

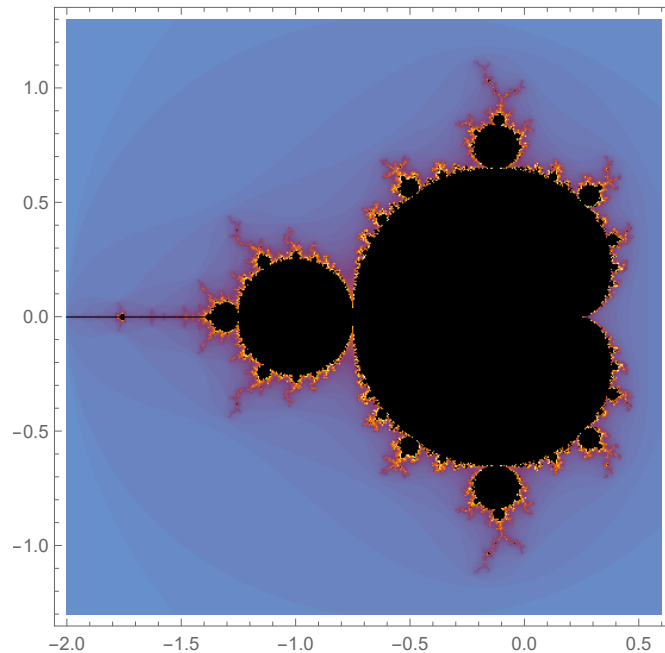
Jak się okazuje to właśnie brzeg zbioru Mandelbrota jest fraktalem o wymiarze fraktalnym $W_f = 2$. Dowód tego faktu można znaleźć w [9].

3.6. Zbiór Julii

Zbiór Julii podobnie jak zbiór Mandelbrota jest podzbiorem płaszczyzny zespolonej. Jego nazwa pochodzi od francuskiego matematyka Gastona Julii. Wypełniony zbiór Julii tworzą punkty p , dla których ciąg opisany wzorem:

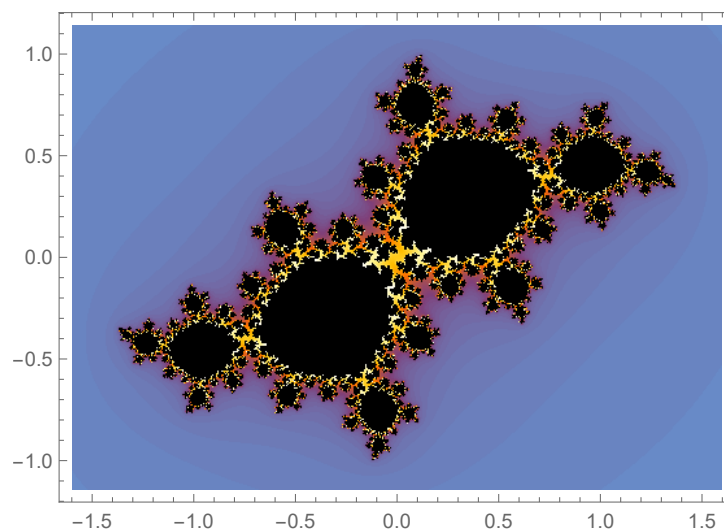
$$\begin{cases} z_0 = p, \\ z_{n+1} = z_n^2 + c, \end{cases} \quad (3)$$

nie dąży do nieskończoności, gdzie c to liczba zespolona, która jest nazywana parametrem zbioru. Brzeg wypełnionego zbioru Julii nazywamy po prostu zbiorem Julii. W dalszej części artykułu, dla uproszczenia,



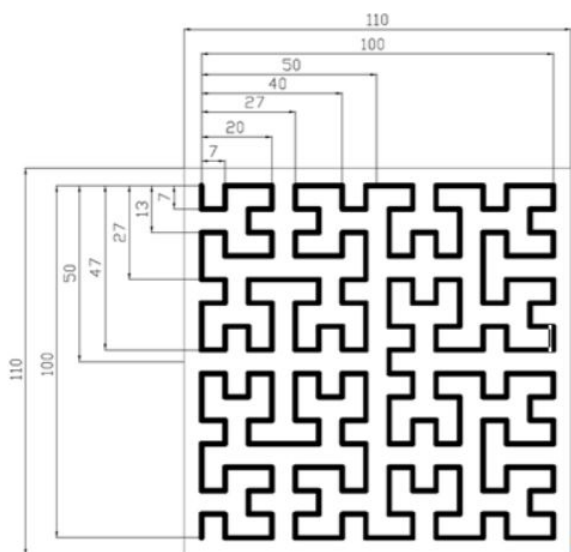
Rysunek 11. Zbiór Mandelbrota

będziemy używać pojęcia zbioru Julii. Wzór 3 jest bardzo podobny do wzoru definiującego zbiór Mandelbrota, ale teraz zamiast zmieniać wartość dodawaną w każdym kroku ciągu, zmienia się jego wartość początkową. Z racji konstrukcji wzoru na ciąg i użycia w nim stałej c , można zauważyć, że zbiór Julii nie posiada stałego wyglądu. Ciekawą zależnością jest to, że alternatywnie zbiór Mandelbrota definiuje się jako punkty, które w rodzinie zbiorów Julii dają zbiory spójne. Na rysunku 12 przedstawiony został zbiór Julii dla parametru $c = -0,39 - 0,59i$.

Rysunek 12. Zbiór Julii dla parametru $c = -0,39 - 0,59i$

4. Zastosowania fraktali

Fraktale dzięki swoim wyjątkowym cechom znalazły zastosowanie w wielu różnych dziedzinach życia. Przykładowo dzięki fraktalom możemy bez ograniczeń korzystać z telefonów komórkowych, praktycznie każdy telefon jest dzisiaj wyposażony w antenę fraktalną. Polega to na tym, że sama antena zamiast standardowej prostej konstrukcji wykorzystuje kształty pojawiające się w znanych nam fraktalach. Dzięki temu antena skuteczniej wypełnia przestrzeń zajmowaną przez nią, a to zapewnia lepszą transmisję energii do fali radiowej. Ta właściwość jest bardzo przydatna, bo dzięki temu antena fraktalna nadaje sygnał na dużo większą odległość niż zwykła antena tej samej wielkości. Inną przewagą jaką może pochwalić się antena fraktalna jest to, że zazwyczaj jest ona wielopasmowa. Jest to możliwe dzięki cechom samopodobieństwa fraktali. Anteny fraktalne mogą się także poszczycić w miarę prostą konstrukcją oraz tym, że właściwości anteny można uzyskać za pomocą jej konstrukcji, a nie poprzez dodawanie nowych komponentów.



Rysunek 13. Schemat ideowy anteny fraktalnej Hilberta czwartego rzędu. Źródło: [10]

Bez geometrii fraktalnej również chodzenie do kina nie byłoby tak ekscytujące i zjawiskowe. To dzięki fraktalom możemy na ekranie zobaczyć realistyczne i piękne krajobrazy jednej z planet w drugiej części filmu „Star Trek”, przerażający huragan Grace z „Gniewu Oceanu”, czy realistycznie wyglądające wybuchy lawy podczas kultowej już sceny pojedynku Obi-Wana Kenobiego i Anakina Skywalkera z 3 części „Gwiezdnych Wojen”. To właśnie fraktale pozwalają na tworzenie spektakularnych efektów specjalnych z wykorzystaniem grafiki komputerowej.

Fraktale znajdują także zastosowanie w kompresji obrazów. Kompresja fraktalna to system kompresji stratnej, która bazuje na podobieństwie różnych fragmentów danego obrazu. Pozwala to na zapisanie tylko kilku elementów obrazu i przekształceń, które trzeba będzie wykonać po dekompresji obrazu. Niestety metoda ta jest bardzo czasochłonna i z tego powodu jest rzadko stosowana. Niemniej jednak ten sposób zapisu wielokrotnie przewyższa kompresję JPG.

Czasami również coś, co z pozoru wydaje się być chaotyczne i nieprzewidywalne, tak naprawdę może mieć wiele wspólnego z fraktalami. Dla przykładu skoki notowań giełdowych, choć pozornie wydają się być nieregularne, tak naprawdę w dłuższym okresie czasu okazują się posiadać cechy fraktali. Dzięki



Rysunek 14. Kadr z filmu „Star Wars”. Źródło: *Wikipedia.org*

zaobserwowaniu takich zależności opracowano narzędzia do analizy, a nawet prognozowania wahań cen na giełdzie. Dziś analiza fraktalna jest jednym z podstawowych narzędzi wykorzystywanych do badania giełdy, zachowań cen walut czy wahań cen.

Kolejnym przykładem zastosowania fraktali jest badanie rytmu bicia serca człowieka, tak zwanego rytmu zatokowego. Otóż okazuje się, że u zdrowego człowieka czas pomiędzy uderzeniami serca minimalnie się różni. Nie są to duże różnice, natomiast jeżeli przyjrzeć się wykresowi takich zmian w czasie można znaleźć cechy, które normalnie obserwuje się w fraktalach. Ciekawą obserwacją jest fakt, że w przypadku ciężkich zaburzeń rytmu serca lub w okresie poprzedzającym ustąpienie funkcji życiowych, uderzenia serca następują w idealnych odstępach czasu, a zmienność rytmu zatokowego nie zachowuje swoich cech samopodobieństwa dla osób przed zawałem. Pierwszy zauważył te zależności dr Ary Goldberger – profesor medycyny na Uniwersytecie Medycznym Harvarda – dostrzegł on podobieństwo ilustracji łańcucha górskiego z pracy Mandelbrota „The fractal geometry of nature” i wykresu tachogramu (graficznym przedstawieniem zmienności rytmu zatokowego w czasie). Było to znamienne odkrycie, ponieważ dzięki temu po raz pierwszy spostrzeżono, że nie tylko struktury przestrzenne wykazują porządek fraktalny. Więcej na ten temat można znaleźć w artykułach naukowych autorstwa Ary Goldbergera, np. w [4].

Jednym z najbardziej zaskakujących odkryć związanych z geometrią fraktalną było dostrzeżenie struktury fraktalnej w budowie wybitnych dzieł literatury. Zespół złożony z polskich informatyków, matematyków, fizyków oraz literaturoznawców przeanalizował sto trzynaście utworów literatury w różnych językach i z różnych epok. Wśród nich były dzieła Dostojewskiego, Sienkiewicza, Tolkiena, Joyce’a, a także Biblia – jako jedyna nie analizowana w rodzimym języku. We wszystkich pozycjach znaleziono cechy samopodobieństwa pod względem organizacji długości zdań. Naukowcy doszli do wniosku, że fraktalność dzieł może mieć związek z aktywnością ludzkiego mózgu oraz jego interpretacją rzeczywistości. Literatura w końcu jest pewnym „odbiciem” rzeczywistości, a ta pełna jest struktur fraktalnych. Największy zachwyt w zespole naukowców wzbudził multifraktal powstały po analizie „Finneganów tren” Jamesa Joyce’a. Było to o tyle niezwykle, gdyż utwór ten nie opiera się na klasycznej narracji, lecz na ciągu skojarzeń pojawiającym się w głowie pisarza. Naukowcy uważają, że Joyce nie pisał książki, a raczej ją konstruował w taki sposób by przypominała dźwięki natury takie jak na przykład szum rzeki, który to również ma strukturę fraktalną [2].

Po więcej interesujących informacji dotyczących fraktali odsyłamy do artykułów [7, 11–13].

Literatura

1. M. F. Barnsley, *Fractals Everywhere: New Edition*, DOVER PUBN INC 2012.
2. S. Drożdż, P. Oświęcimska, A. Kulig, J. Kwapień, K. Bazarnik, I. Grabska-Gradzińska, J. Rybicki, M. Stanuszek, *Quantifying origin and character of long-range correlations in narrative texts*, Information Science 331 (2016), pp. 32–44, doi: 10.1016/j.ins.2015.10.023.
3. R. Engelking, *Topologia ogólna*, PWN, Warszawa 2012.
4. A.L. Goldberger, L.A.N. Amaral, J.M. Hausdorff, P.Ch. Ivanov, C.-K. Peng, H.E. Stanley, *Fractal dynamics in physiology: Alterations with disease and aging*, Proceedings of the National Academy of Sciences 99 (2002), pp. 2466-2472, doi: 10.1073/pnas.012579499.
5. A. Katunin, *Fraktale. Matematyczne potwory, które odmieniły postrzeganie świata*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2021.
6. J. Kudrewicz, *Fraktale i chaos* (wydanie 5), Wydawnictwo WNT 2021.
7. M. Malinowska, *Antena fraktalna - badanie wpływu stopnia iteracji drzewa fraktalnego na częstotliwości rezonansowe oraz dobroć anten*, Zeszyty Naukowe Akademii Morskiej w Gdyni 95 (2016), s. 54–64.
8. H. Peitgen, *Granice chaosu. Fraktale, tom I-II*, Wydawnictwo Naukowe PWN 1995.
9. M. Shishikura, *The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets*, Annals of Mathematics 147 (1998), pp. 225–267.
10. C. Szymczak, W. Sikorski, *Projektowanie i optymalizacja anten UHF do monitoringu wyładowań niezupełnych w transformatorze energetycznym*, Przegląd Elektrotechniczny 10 (2016), pp. 75–79, doi:10.15199/48.2016.10.18.
11. http://home.agh.edu.pl/zobmat/2020/III_kac_greg/index.html#basics
12. <https://naukawpolsce.pap.pl/aktualnosci/news%2C77847%2Cfragment-jak-calosc-dlaczego-fizykw-fascynuja-fraktale.html>
13. <http://scienceofhealing.pl/uncategorized/fraktale-i-rytm-serca/>