MINUT 2022 (5), s. 56–75
ISSN 2719-3063

Lech BARTŁOMIEJCZYK[1], Jakub J. LUDEW[1], Michał RÓŻAŃSKI[1], Adrian SMUDA[1], Roman WITUŁA[1]

[1]Katedra Matematyki, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

Równania rekurencyjne, szeregi oraz iloczyny nieskończone – zadania i problemy III

Streszczenie. W prezentowanej części trzeciej pracy, stanowiącej kontynuację części drugiej trylogii pod wspólnym tytułem: „Wybór zadań i problemów o ciągach, równaniach rekurencyjnych, szeregach oraz iloczynach nieskończonych”, przedstawiamy rozwiązania (pełne, bądź częściowe) wielu zadań i problemów z części pierwszej tej pracy. W wybranych rozwiązaniach sformułowano nowe zadania i problemy badawcze.

Słowa kluczowe: ciągi, równania rekurencyjne, monotoniczność, punkty skupienia, granice, przebieg zmienności funkcji, szeregi liczbowe, iloczyny nieskończone, nierówności dla sum szeregów, wartości iloczynów nieskończonych.

W wszystkich trzech częściach stosujemy następujące standardowe oznaczenia:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}, \qquad \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}, \qquad \mathbb{Z} = \{x :\, x \in \mathbb{N}_0 \,\vee\, -x \in \mathbb{N}\},$$

$$\mathbb{Q} - \text{ zbiór liczb wymiernych, } \mathbb{R} - \text{ zbiór liczb rzeczywistych, } \mathbb{R}_+ := \{x :\, x \in \mathbb{R} \wedge x > 0\},$$

$$\mathbf{z} := \left\{\{a_n\} \subset \mathbb{R}_+ :\, \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty\right\}, \quad \mathbf{r} := \left\{\{a_n\} \subset \mathbb{R}_+ :\, \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \wedge \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty\right\},$$

$$\mathbf{z}_0 = \left\{\{a_n\} \subset (0,1) :\, \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty\right\}, \quad \mathbf{r}_0 = \left\{\{a_n\} \subset (0,1) :\, \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \wedge \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty\right\},$$

gdzie dla ciągów nieskończonych: $a_n \in \mathbb{R}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, stosujemy specjalne oznaczenie: $\{a_n\}$. Ponadto zapis: $\{a_n\} \subset X$, gdzie $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, oznacza, że $(\forall n \in \mathbb{N}) :\, a_n \in X$. W sytuacji niebudzącej wątpliwości dla szeregów liczbowych $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (odpowiednio $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$) będziemy stosować uproszczony zapis $\sum a_n$ (odpowiednio $\sum\limits_{n\geqslant n_0} a_n$). Piszemy też dla zwięzłości zapisu, że $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ jest ciągiem zerowym, jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, czyli gdy $\{a_n\}$ jest ciągiem zbieżnym do zera.

Podkreślmy, że w prezentowanych rozwiązaniach zadań z części pierwszej pracy korzystano wybiórczo z literatury cytowanej w treściach odpowiednich zadań, zamieszczonej w części pierwszej pracy.

Autor korespondencyjny: M. Różański (michal.rozanski@polsl.pl).
Data wpłynięcia: 23.11.2022.

17. Ustalmy $s > 1$. Jeśli $\{a_n\} \in \mathbf{z}$, $\sum a_n = g$ i $\prod(1 + a_n) = s$, to jak wynika z dowodu zadania 16:

$$1 + g < s < e^g,$$

czyli:

$$\ln s < g < s - 1.$$

Pokażemy, że $A_s^\Pi = (\ln s, s-1)$. Z dowodu zadania 16 dostajemy, że dla każdego $g > 0$: jeśli $1 + g < s < e^g$, czyli $\ln s < g < s - 1$, to istnieje ciąg $\{a_n\} \in \mathbf{z}$ taki, że $\sum a_n = g$ i $\prod(1 + a_n) = s$. Podobnym rozumowaniem pokazujemy, że dla każdego $s \in (0, 1)$, $B_s^\Pi = (1 - s, -\ln s)$.

Wskazówka. Przypadek $s \in (0, e^{-1})$ wymaga rozważenia dwóch przypadków:

a) $\{a_n\} \in \mathbf{z}_0 \wedge \sum a_n = g \wedge g \in (0,1) \wedge 1 - g < s < e^{-g}$, czyli $g \in (1 - s, 1)$,

b) $\{a_n\} \in \mathbf{z}_0 \wedge \sum a_n = g \wedge g \geqslant 1 \wedge 0 < s < e^{-g}$, czyli $g \in [1, -\ln s)$.

18. W. Sierpiński w książce [6] podaje lemat:

Lemat 1. *Niech $a_n \in \mathbb{R}$, $a_n > -1$ dla $1 \leqslant n \leqslant k$. Wówczas jeśli $\sum_{n=1}^{k} a_n \leqslant 0$, to:*

$$\prod_{n=1}^{k}(1 + a_n) \leqslant 1. \tag{1}$$

Z tego lematu wynika następujący wniosek:

Wniosek. Niech $a_n \in \mathbb{R}$, $a_n > -1$, dla $1 \leqslant n \leqslant k$, $\alpha > 0$. Jeśli $\sum_{n=1}^{k} a_n \leqslant -\alpha$, to $\prod_{n=1}^{k}(1 + a_n) \leqslant e^{-\alpha}$.

Istotnie, z założenia mamy, że dla każdego $t \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność:

$$t\frac{\alpha}{t} + \sum_{n=1}^{k} a_n \leqslant 0,$$

a stąd i z (1) otrzymujemy:

$$\left(1 + \frac{\alpha}{t}\right)^t \prod_{n=1}^{k}(1 + a_n) \leqslant 1.$$

Z ostatniej zależności, po przejściu z t do nieskończoności dostajemy:

$$e^\alpha \prod_{n=1}^{k}(1 + a_n) \leqslant 1,$$

skąd:

$$\prod_{n=1}^{k}(1 + a_n) \leqslant e^{-\alpha}. \tag{2}$$

W oparciu o (1) i powyższy wniosek udowodnimy następujące lematy sformułowane jako polecenia w zadaniu 18.

Lemat 2. *Niech $a_n \in \mathbb{R}$, $a_n > -1$, $n \in \mathbb{N}$. Jeśli $\liminf\limits_{k\to\infty} \left\{ \prod\limits_{n=1}^{k} (1+a_n) \right\} > 0$, to $\liminf\limits_{k\to\infty} \left\{ \sum\limits_{n=1}^{k} a_n \right\} > -\infty$.*

Dowód. Przypuśćmy przeciwnie, że $\liminf\limits_{k\to\infty} \left\{ \sum\limits_{n=1}^{k} a_n \right\} = -\infty$. Wówczas dla każdego $\alpha > 0$ istnieje nieskończenie wiele $k \in \mathbb{N}$ takich, że $\sum\limits_{n=1}^{k} a_n \leqslant -\alpha$. Zatem na mocy wcześniejszego wniosku istnieje nieskończenie wiele $k \in \mathbb{N}$ takich, że:

$$\prod_{n=1}^{k} (1+a_n) \leqslant e^{-\alpha},$$

a stąd $\liminf\limits_{k\to\infty} \left\{ \prod\limits_{n=1}^{k} (1+a_n) \right\} = 0$ i mamy sprzeczność z założeniem. A więc $\liminf\limits_{k\to\infty} \left\{ \sum\limits_{n=1}^{k} a_n \right\} > -\infty$. □

Uwaga. Lematu 2 nie da się odwrócić, tzn. z ograniczoności z dołu ciągu sum częściowych $\left\{ \sum\limits_{n=1}^{k} a_n \right\}_{k=1}^{\infty}$, gdzie $a_n > -1$, $n \in \mathbb{N}$, nie musi wynikać jeszcze ograniczoność z dołu odpowiedniego ciągu iloczynów częściowych $\left\{ \prod\limits_{n=1}^{k} (1+a_n) \right\}_{k=1}^{\infty}$.

Przykład. Ustalmy ciąg zerowy $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0,1)$ taki, że $\sum \alpha_n^2 = \infty$. Ciąg $\{a_n\}$ tworzymy następująco:

$$a_n = \begin{cases} 2\alpha_k & \text{gdy } n = 3k-2,\ k \in \mathbb{N}, \\ -\alpha_k & \text{gdy } n = 3k-1 \vee n = 3k,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Wystarczy zauważyć, że $\sum a_n = 0$ oraz, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy:

$$(1+2\alpha_n)(1-\alpha_n)^2 < (1+\alpha_n)^2(1-\alpha_n)^2 = (1-\alpha_n^2)^2 < 1-\alpha_n^2,$$

skąd:

$$\prod_{n=1}^{3k} (1+a_n) = \prod_{n=1}^{k} [(1+2\alpha_n)(1-\alpha_n)^2] < \prod_{n=1}^{k} (1-\alpha_n^2).$$

Ponieważ $\sum \alpha_n^2 = \infty$, więc $\prod (1-\alpha_n^2) = 0$, a stąd $\prod (1+a_n) = 0$.

Lemat 3. *Niech $a_n \in \mathbb{R}$, $a_n > -1$, $n \geqslant 1$. Jeśli $\limsup\limits_{k\to\infty} \left\{ \sum\limits_{n=1}^{k} a_n \right\} < \infty$, to $\limsup\limits_{k\to\infty} \left\{ \prod\limits_{n=1}^{k} (1+a_n) \right\} < \infty$.*

Dowód. Ustalmy liczbę $M > 0$ tak, by dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zachodziło oszacowanie $\sum\limits_{n=1}^{k} a_n \leqslant M$, czyli $\sum\limits_{n=1}^{k} a_n - \frac{1}{2}(2M) \leqslant 0$. Wówczas z lematu 1 wynika, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{2M} \prod_{n=1}^{k} (1+a_n) \leqslant 1,$$

tj.

$$\prod_{n=1}^{k}(1+a_n) \leqslant 2^{2M}.$$

□

Uwaga. Lematu 3 nie da się odwrócić. Oto stosowny przykład.

Przykład. Ustalmy ciąg zerowy $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0,1)$ taki, że $\sum \alpha_n^2 = \infty$. Konstruujemy ciąg $\{a_n\}$ przyjmując:

$$a_n = \begin{cases} -\alpha_k & n = 3k-2,\ k \in \mathbb{N}, \\ \alpha_k & n = 3k-1,\ k \in \mathbb{N}, \\ \frac{\alpha_k^2}{1-\alpha_k^2} & n = 3k,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Sprawdzamy, że:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{1-\alpha_n^2} = \infty$$

oraz:

$$\prod_{n=1}^{3k}(1+a_n) = \prod_{n=1}^{k}\left[(1-\alpha_n)(1+\alpha_n)\left(1+\frac{\alpha_n^2}{1-\alpha_n^2}\right)\right] = 1,$$

skąd:

$$\prod (1+a_n) = 1.$$

19. Ponieważ $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \alpha^{A_n^{(\varepsilon)}} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \exp\left[A_n^{(\varepsilon)} \ln \alpha\right]$ więc problem sprowadza się do zbadania zbieżności szeregów postaci:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \exp\left(-yA_n^{(\varepsilon)}\right), \quad \text{gdzie } y > 0.$$

Można pokazać, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$, jeśli $n \geqslant 2$, to:

$$A_n^{(-1)} = \ln\ln n + C_1 + O\left(\frac{1}{n \ln n}\right),$$
$$A_n^{(0)} = \ln n + C + O\left(\frac{1}{n}\right),$$
$$A_n^{(1)} = \frac{1}{2}\ln^2 n + C_2 + O\left(\frac{\ln n}{n}\right),$$

gdzie C, C_1, C_2 to pewne stałe (zob. np. [4]). Zatem wystarczy zbadać zbieżność szeregów:

$$A_{-1} =: \sum_{n=2}^{\infty} \exp\left(-y \ln\ln n\right),\ A_0 =: \sum_{n=2}^{\infty} \exp\left(-y \ln n\right),\ A_1 =: \sum_{n=2}^{\infty} \exp\left(-\frac{y}{2}\ln^2 n\right).$$

Mamy:

$$A_{-1} = \sum_{n=2}^{\infty} (\ln n)^{-y} = \infty \text{ dla każdego } y > 0,$$

$$A_0 = \sum_{n=2}^{\infty} n^{-y} \begin{cases} = \infty & \text{dla } y \in (0,1], \\ < \infty & \text{dla } y > 1, \end{cases}$$

$$A_1 = \sum_{n=2}^{\infty} n^{-\frac{y}{2}\ln n} < \infty \text{ dla każdego } y > 0,$$

skąd dostajemy:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \alpha^{A_n^{(-1)}} = \infty \text{ dla każdego } \alpha \in (0,1),$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \alpha^{A_n^{(0)}} \begin{cases} = \infty & \text{dla } \alpha \in [e^{-1}, 1), \\ < \infty & \text{dla } \alpha \in (0, e^{-1}), \end{cases}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \alpha^{A_n^{(1)}} < \infty \text{ dla każdego } \alpha \in (0,1).$$

15. a) Rozważymy jedynie przypadek $p = 1$. Połóżmy $\alpha_k =: 1 + k^{-1}$ dla $k \in \mathbb{N}$. Ponieważ $\sum n^{-\alpha} < \infty$ dla każdego $\alpha > 1$, więc każdemu α_k, gdzie $k \in \mathbb{N}$, można przyporządkować liczbę naturalną n_k, taką, że $\sum\limits_{n > n_k} n^{-\alpha_k} < k^{-2}$. Ciąg $\{a_n\}$ konstruujemy w następujący sposób. Niech $\{p_k\}$ będzie ciągiem wszystkich kolejnych liczb pierwszych. Wskaźnikom $s = p_k^i$, $k, i \in \mathbb{N}$ będą przypisane elementy $a_s := (i + n_k)^{-\alpha_k}$. Pozostałym elementom a_s przyporządkujemy kolejne elementy ciągu $\{2^{-n}\}$. Łatwo można sprawdzić, że $\{a_n\} \in \mathbf{z}$. Istotnie, mamy:

$$\sum a_n = \sum_{k \geqslant 1} \sum_{n > n_k} n^{-\alpha_k} + \sum 2^{-n} < \sum k^{-2} + 1 < \infty.$$

Pokażemy jeszcze, że $\sum a_n^{\alpha} = \infty$ gdy $\alpha < 1$. W tym celu ustalmy $\alpha \in (0,1)$. Ponieważ $\lim \alpha_k = 1$, więc istnieje $k_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $\alpha \alpha_{k_0} < 1$, a stąd:

$$\sum a_n^{\alpha} \geqslant \sum_{n > n_{k_0}} n^{-\alpha \alpha_{k_0}} = \infty.$$

20. Niech $\{a_k\} \in \mathbf{r}_0$, $\sum a_k^2 < \infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right) = \infty$. Mamy związki:

$$\prod_{k=1}^{n} (1 - a_k) = \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} \left[1 + \frac{a_k}{1-a_k}\right]} \geqslant \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1-a_k}\right)^n} \geqslant \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1-a_k}\right), \tag{3}$$

$$\exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1-a_k}\right) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{1-a_k}\right) \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} a_k\right). \tag{4}$$

Ze zbieżności szeregu $\sum a_k^2$ wynika zbieżność szeregu $\sum \frac{a_k^2}{1-a_k}$, a stąd i z (4):

$$\exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1-a_k}\right) > A \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} a_k\right), \tag{5}$$

gdzie $A = \exp\left(-\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{1-a_k}\right)$. Z (3), (5) i tego, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right) = \infty$ dostajemy, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} (1 - a_k) = \infty$. Niech $\{a_k\} \in \mathbf{r}_0$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right) < \infty$. Ponieważ:

$$\prod_{k=1}^{n} (1 - a_k) \leqslant \left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (1 - a_k)}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k\right)^n \leqslant \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} a_k\right),$$

więc:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 - a_k) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} a_k\right) < \infty.$$

21. Niech $\{a_n\} \in \mathbf{r}$. Pokażemy wpierw, że istnieje podciąg $\{a_{n_i}\}$ taki, że $\sum a_{n_i} = \infty$ oraz $\lim\limits_{i\to\infty} (n_{i+1} - n_i) = \infty$. W tym celu określimy cztery pomocnicze ciągi $\{t_i\}$, $\{k_i\}$, $\{p_i\}$ oraz $\{s_i\}$ liczb naturalnych według następującej reguły:

$$t_1 = 1, \quad k_1 = \min\left\{k \in \mathbb{N} \,\middle|\, \sum_{n=0}^{k} a_{n+t_1} \geqslant 1\right\}, \quad p_1 = t_1 + k_1 + 2.$$

Zauważmy, że:

$$\sum_{n \geqslant p_1} a_n = \sum_{n \geqslant 0} a_{p_1+2n} + \sum_{n \geqslant 0} a_{p_1+2n+1},$$

skąd:

$$\text{albo } \sum_{n \geqslant 0} a_{p_1+2n} = \infty, \text{ albo } \sum_{n \geqslant 0} a_{p_1+2n+1} = \infty.$$

Niech:

$$s_1 = \min\left\{s \in \{0,1\} \,\middle|\, \sum_{n \geqslant 0} a_{p_1+2n+s} = \infty\right\}, \quad t_2 = p_1 + s_1,$$

$$k_2 = \min\left\{k \in \mathbb{N} \,\middle|\, \sum_{n=0}^{k} a_{2n+t_2} \geqslant 1\right\}, \quad p_2 = t_2 + 2k_2 + 3.$$

Mamy:

$$\sum_{n \geqslant p_2} a_n = \sum_{n \geqslant 0} a_{p_2+3n} + \sum_{n \geqslant 0} a_{p_2+3n+1} + \sum_{n \geqslant 0} a_{p_2+3n+2},$$

skąd:

$$\text{albo } \sum_{n \geqslant 0} a_{p_2+3n} = \infty, \text{ albo } \sum_{n \geqslant 0} a_{p_2+3n+1} = \infty, \text{ albo } \sum_{n \geqslant 0} a_{p_2+3n+2} = \infty.$$

Połóżmy:

$$s_2 = \min\left\{ s \in \{0,1,2\} \,\Big|\, \sum_{n\geqslant 0} a_{p_2+3n+s} = \infty \right\}.$$

Ogólnie, przyjmujemy:

$$t_i = p_{i-1} + s_{i-1}, \quad k_i = \min\left\{ k \in \mathbb{N} \,\Big|\, \sum_{n=0}^{k} a_{in+t_i} \geqslant 1 \right\},$$
$$p_i = t_i + ik_i + i + 1, \quad i > 1.$$

Zachodzi wzór:

$$\sum_{n\geqslant p_i} a_n = \sum_{s=0}^{i} \sum_{n\geqslant 0} a_{p_i+(i+1)n+s},$$

a stąd otrzymujemy:

$$\sum_{n\geqslant 0} a_{p_i+(i+1)n+s} = \infty \text{ dla pewnego } s \in \{0,1,\dots,i\}.$$

Kładziemy:

$$s_i = \min\left\{ s \in \{0,1,\dots,i\} \,\Big|\, \sum_{n\geqslant 0} a_{p_i+(i+1)n+s} = \infty \right\}.$$

Z opisanego wyżej algorytmu wynika, że wystarczy przyjąć:

$$\{n_i\} = \bigcup_{i\geqslant 1} \{t_i, t_i+i, t_i+2i, \dots, t_i+k_i i\}.$$

Teraz udowodnimy, że dla każdego $x > 0$ istnieje podciąg $\{a_{n_i}\}$ taki, że:

$$\sum a_{n_i} = x \quad \text{oraz} \quad \lim_{i\to\infty} (n_{i+1} - n_i) = \infty.$$

Dla ustalonego $x > 0$ definiujemy:

$$k_1 = \min\left\{ k \in \mathbb{N} \,|\, \forall n \geqslant k:\ a_n < \frac{x}{2} \right\}, \quad t_1 = \max\left\{ t \in \mathbb{N} \,|\, t \geqslant k_1 \text{ oraz } \sum_{n=k_1}^{t} a_n < x \right\},$$
$$x_1 = x - \sum_{n=k_1}^{t_1} a_n, \quad k_2 = \min\left\{ k \in \mathbb{N} \,|\, k \geqslant t_1 + 2 \text{ oraz } \forall n \geqslant k:\ a_n < \frac{x_1}{2} \right\}.$$

Mamy:

$$\sum_{n\geqslant k_2} a_n = \sum_{n\geqslant 0} a_{k_2+2n} + \sum_{n\geqslant 0} a_{k_2+2n+1},$$

skąd:

$$\text{albo } \sum_{n\geqslant 0} a_{k_2+2n} = \infty, \text{ albo } \sum_{n\geqslant 0} a_{k_2+2n+1} = \infty.$$

Niech:

$$s_1 = \min\left\{ s \in \{0,1\} \,\Big|\, \sum_{n\geqslant 0} a_{k_2+2n+s} = \infty \right\}, \quad p_1 = k_2 + s_1,$$

$$t_2 = \max\left\{ t \in \mathbb{N} \,\Big|\, \sum_{n=0}^{t} a_{p_1+2n} < x_1 \right\}, \quad x_2 = x_1 - \sum_{n=0}^{t_2} a_{p_1+2n}.$$

Ogólnie, dla $i \in \mathbb{N}$, $i > 2$ połóżmy:

$$k_i = \min\left\{ k \in \mathbb{N} \,|\, k \geqslant p_{i-2} + (i-1)t_{i-1} + i \text{ oraz } \forall n \geqslant k : \ a_n < \frac{x_{i-1}}{2} \right\}.$$

Mamy:

$$\sum_{n\geqslant k_i} a_n = \sum_{s=0}^{i-1} \sum_{n\geqslant 0} a_{k_i+in+s},$$

skąd wynika, że:

$$\sum_{n\geqslant 0} a_{k_i+in+s} = \infty \text{ dla pewnego } s \in \{0,1,\ldots,s-1\}.$$

Niech:

$$s_{i-1} = \min\left\{ s \in \{0,1,\ldots,i-1\} \,\Big|\, \sum_{n\geqslant 0} a_{k_i+in+s} = \infty \right\}, \quad p_{i-1} = k_i + s_{i-1},$$

$$t_i = \max\left\{ t \in \mathbb{N} \,\Big|\, \sum_{n=0}^{t} a_{p_{i-1}+in} < x_{i-1} \right\}, \quad x_i = x_{i-1} - \sum_{n=0}^{t_i} a_{p_{i-1}+in}.$$

Jak łatwo jest zauważyć zachodzi nierówność $x_i < \frac{x_{i-1}}{2}$, skąd $x_i < \frac{x}{2^i}$, a więc $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = 0$. Zatem:

$$x = \sum_{n=k_1}^{t_1} a_n + \sum_{i\geqslant 2} \sum_{n=0}^{t_i} a_{p_{i-1}+in}.$$

Ponieważ dla każdego $i \in \mathbb{N}$ mamy $p_i - (p_{i-1} + it_i) = i + s_i \geqslant i$, więc wystaczy przyjąć:

$$\{n_i\}_{i=1}^{\infty} = \{n : k_1 \leqslant n \leqslant t_1\} \cup \bigcup_{i\geqslant 2} \{n \in \mathbb{N} \,|\, n = p_{i-1} + ik,\ 0 \leqslant k \leqslant t_i\}.$$

22. b) Ciąg $\{a_n\}$ definiujemy indukcyjnie w następujący sposób. Niech $a_1 = 1$. Jeśli dla pewnego $s \in \mathbb{N}$ określone są już elementy $a_1, \ldots, a_s$ i $a_s = \frac{1}{n^2}$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, to przyjmujemy:

$$a_{s+1} = a_{s+2} = \ldots = a_{s(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Pokażemy, że ciąg $\{a_n\}$ spełnia oczekiwany warunek. Ustalmy rosnący ciąg $\{n_i\} \subset \mathbb{N}$ taki, że:

$$M = \limsup_{i\to\infty} \frac{n_{i+1}}{n_i} < +\infty.$$

Niech $i_0 \in \mathbb{N}$ będzie dobrane tak, by:

$$n_{i+1} < (M+1)n_i \quad \text{dla każdego } i \in \mathbb{N},\ i \geqslant i_0. \tag{6}$$

Ustalmy dowolnie $s \in \mathbb{N}$ o własności:

$$s > n_i \ \wedge\ a_s = \frac{1}{k^2} \ \wedge\ a_{s+1} = \frac{1}{(k+1)^2}$$

dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, $k > M$. Wówczas mamy:

$$a_{s+1} = a_{s+2} = \ldots = a_{s(k+1)^{k+1}} = \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Udowodnimy, że wśród elementów $a_{s+1}, a_{s+2}, \ldots, a_{s(k+1)^{k+1}}$ jest co najmniej $(k+1)$-elementów podciągu $\{a_{n_i}\}$. W tym celu połóżmy:

$$i_t =: \max\{i \in \mathbb{N} \,|\, n_i \leqslant s(k+1)^t\} \quad \text{dla } 0 \leqslant t \leqslant k.$$

Wystarczy udowodnić, że:

$$n_{i_t+1} \in \{s(k+1)^t + 1, s(k+1)^t + 2, \ldots, s(k+1)^{t+1}\}.$$

Istotnie, gdyby dla pewnego $t:\ 0 \leqslant t \leqslant k$ było $n_{i_t+1} > s(k+1)^{t+1}$, to:

$$\frac{n_{i_t+1}}{n_{i_t}} > \frac{s(k+1)^{t+1}}{s(k+1)^t} = k+1 > M+1,$$

a to jest sprzeczne z założeniem (6).

23. Połóżmy $\delta_n = 1 + n^{-1}$, $n \geqslant 1$. Definiujemy pomocnicze ciągi liczb naturalnych $\{s_n\}$, $\{k_n\}$ oraz $\{t_n\}$ w następujący sposób:

$$s_1 = \min\left\{ s \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{s+3}{s} < \delta_1 \right\},$$

$$k_1 = \min\left\{ k \in \mathbb{N} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{k} a_{i(2s_1+1)+1} > 1 \right\}, \quad t_1 = k_1(2s_1+1)+1,$$

i ogólnie, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$:

$$s_{n+1} = \min\left\{ s \in \mathbb{N} \,\middle|\, s > \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} k_i s_i \text{ oraz } \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} k_i(s_i+1) + s + 3}{\sum\limits_{i=1}^{n} k_i s_i + s} < \delta_{n+1} \right\},$$

$$k_{n+1} = \min\left\{ k \in \mathbb{N} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{k} a_{i(2s_{n+1}+1)+t_n} > 1 \right\}, \quad t_{n+1} = k_{n+1}(2s_{n+1}+1) + t_n.$$

Ciąg $\{\varepsilon_n\}$ definiujemy według następującej reguły:

$$+\underbrace{(\underbrace{+-+-\ldots-}_{2s_1})+(\underbrace{+-+-\ldots-}_{2s_1})+\ldots+(\underbrace{+-+-\ldots-}_{2s_1})}_{k_1}$$

i ogólnie, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ przyjmujemy:

$$+(\underbrace{+-+-\ldots-}_{2s_{n-1}})+$$

$$+\underbrace{(\underbrace{+-+-\ldots-}_{2s_n})+\ldots+(\underbrace{+-+-\ldots-}_{2s_n})}_{k_n-\text{razy}}+$$

$$+(\underbrace{+-+-\ldots-}_{2s_{n+1}})+$$

Uwaga. Algorytm tworzenia ciągów $\{s_n\}$ $\{k_n\}$ i $\{t_n\}$, a przez to i ciągu $\{\varepsilon_n\}$ powstał w oparciu o dwie poniższe nierówności:

1° $A > B > 0 \Longrightarrow \frac{A+1}{B} > \frac{A+2}{B+1}$,

2° $\begin{cases} s > t \geqslant 0 \\ A > B > 0 \\ n \geqslant \frac{B}{2} \end{cases} \Longrightarrow \frac{A+t(n+1)+2}{B+tn} > \frac{A+s(n+1)+2}{B+sn}$.

Warto jeszcze zauważyć, że z definicji ciągów $\{s_n\}$, $\{k_n\}$ oraz $\{t_n\}$ i z nierówności 2° wynika nierówność:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n+1} k_i(s_i+1)+2}{\sum\limits_{i=1}^{n+1} k_i s_i} < \delta_{n+1}. \tag{7}$$

Istotnie, z definicji ciągów $\{s_n\}$, $\{k_n\}$, $\{t_n\}$ mamy:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} k_i(s_i+1)+s_{n+1}+3}{\sum\limits_{i=1}^{n} k_i s_i + s_{n+1}} < \delta_{n+1}. \tag{8}$$

Z kolei z nierówności 2° wynika, że:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} k_i(s_i+1)+s_{n+1}+3}{\sum\limits_{i=1}^{n} k_i s_i + s_{n+1}} \geqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{n+1} k_i(s_i+1)+2}{\sum\limits_{i=1}^{n+1} k_i s_i}. \tag{9}$$

Z (8) i (9) dostajemy (7).

27. a) Ustalmy ciąg $\{b_n\} \in r$ taki, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^k = \infty$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Połóżmy:

$$c_n := \min\left\{\frac{b_n}{2}, \frac{1}{n^2}\right\},$$
$$\phi(n) := \max\{k \in \mathbb{N} \,|\, (b_n - kc_n) \geqslant 0\}$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Łatwo jest zauważyć, że:

$$b_n - \phi(n)c_n \leqslant c_n. \tag{10}$$

Ciąg $\{a_n\}$ definiujemy następująco:

$$b_1, \underbrace{-c_1, \ldots, -c_1}_{\phi(1) \text{ razy}}, b_2, \underbrace{-c_2, \ldots, -c_2}_{\phi(2) \text{ razy}}, \ldots, b_k, \underbrace{-c_k, \ldots -c_k}_{\phi(k) \text{ razy}}, \ldots$$

Mamy:

$$0 \leqslant \sum a_n = \sum (b_n - \phi(n)c_n) \overset{(10)}{\leqslant} \sum c_n \leqslant \sum n^{-2} < \infty$$

oraz dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$\begin{aligned}
&\sum a_n^{2k} = \sum (b_n^{2k} + \phi(n)c_n^{2k}) \geqslant \sum b_n^{2k} = \infty \\
&\sum a_n^{2k+1} = \sum (b_n^{2k+1} - \phi(n)c_n^{2k+1}) = \sum (b_n^{2k+1} - \phi(n)c_n c_n^{2k}) \geqslant \\
&\geqslant \sum (b_n^{2k+1} - \phi(n)c_n^{2k}) \geqslant \sum \left(b_n^{2k+1} - b_n\left(\frac{b_n}{2}\right)^{2k}\right) = \\
&= (1 - 2^{-2k}) \sum b_n^{2k+1} = \infty.
\end{aligned}$$

b) Wystarczy przyjąć:

$$a_n = \begin{cases} b_k, & n = 2k-1,\, k \in \mathbb{N}, \\ -b_k, & n = 2k,\, k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

gdzie $\{b_k\}$ jest dowolnym elementem rodziny $\mathbf{r}$ o własności:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^k = \infty \quad \text{dla każdego } k \in \mathbb{N}.$$

26. Z twierdzenia Lagrange'a otrzymujemy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje $r_n^* \in (r_{n+1}, r_n)$ takie, że:

$$r_n^{1-p} - r_{n+1}^{1-p} = (1-p)(r_n^*)^{-p} a_n > (1-p)\frac{a_n}{r_n^p}.$$

Stąd:

$$r_1^{1-p} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(r_n^{1-p} - r_{n+1}^{1-p}\right) > (1-p) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n^p},$$

czyli:

$$(1-p)^{-1}\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right]^{1-p} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n^p}. \tag{11}$$

Pokażemy teraz, że stała $(1-p)^{-1}$ występująca w (11) jest najlepsza. Niech $\alpha \in (0,1)$, $a_n = \alpha^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Wówczas:

$$(1-p)^{-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)^{1-p} = \frac{(1-p)^{-1}}{(1-\alpha)^{1-p}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n^p} = \frac{(1-\alpha)^p}{1-\alpha^{1-p}},$$

skąd wobec (11) dostajemy:

$$\frac{1-\alpha}{1-\alpha^{1-p}} < (1-p)^{-1}$$

co jest równoważne nierówności:

$$1-p < \frac{1-\alpha^{1-p}}{1-\alpha}.$$

Stosując regułę de l'Hospitala otrzymujemy:

$$\lim_{\alpha \to 1} \frac{1-\alpha^{1-p}}{1-\alpha} = 1-p.$$

32. Przypadek szeregu. Nie naruszając ogólności rozważań można przyjąć, że $\{a_n\} \subset \mathbb{R}_+$. Wówczas ciąg $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{Z}$ definiujemy indukcyjnie tak, by: $x - \lambda_1 a_1 > 0$ oraz

$$\lambda_n a_n < x - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j a_j \leqslant (\lambda_n + 1)\, a_n \tag{12}$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Zauważmy, że dla ustalonego $\lambda_1 \in \mathbb{Z}$ tak, by:

$$x - \lambda_1 a_1 > 0$$

ciąg $\{\lambda_n\}_{n=2}^{\infty} \subset \mathbb{Z}$ spełniający warunek (12) jest określony jednoznacznie. Ponadto z (12) wynikają nierówności:

$$0 \leqslant \lambda_{n+1} a_{n+1} \leqslant x - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j \leqslant a_n,$$

co ze zbieżności do zera ciągu $\{a_n\} \subset \mathbb{R}_+$, implikuje równość $x = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j$.

Przypadek iloczynu. Niech $x > 0$. Tak jak wyżej założymy, że $\{a_n\} \subset \mathbb{R}_+$. Ustalmy liczbę $N \in \mathbb{N}$ tak, by $\prod\limits_{j=1}^{N} a_j < x$ oraz $a_n < 1$ dla $n \in \mathbb{N}$, $n > N$. Kładziemy $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_N = 1$. Istnieje $\mu_{N+1} \in \mathbb{N}$

takie, że $\mu_{N+1}a_{N+1} < x\left(\prod_{j=1}^{N} a_j\right)^{-1} \leqslant (\mu_{N+1}+1)a_{N+1}$. Mając, dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, określone liczby μ_j dla indeksów $j = 1, 2, \ldots, N+n-1$ tak, by:

$$x\left(\prod_{j=1}^{N+n-1} \mu_j a_j\right)^{-1} > 1, \tag{13}$$

przyjmujemy jako μ_{N+n} liczbę naturalną jednoznacznie określoną przez warunek:

$$\mu_{N+n}a_{N+n} < x\left(\prod_{j=1}^{N+n-1} \mu_j a_j\right)^{-1} \leqslant (\mu_{N+n}+1)a_{N+n}. \tag{14}$$

W ten sposób mamy indukcyjnie określony ciąg $\{\mu_n\} \subset \mathbb{N}$, który wobec (13), (14) oraz założenia $a_n \to 0$, gdy $n \to \infty$, jest rozbieżny do ∞. Pozostaje zauważyć, że wobec (14) mamy:

$$1 < x\left(\prod_{j=1}^{n} \mu_j a_j\right)^{-1} \leqslant 1 + \frac{1}{\mu_n}$$

i to dla każdego indeksu $n \in \mathbb{N}$, $n > N$.

Przejdźmy teraz do dowodu twierdzenia, które uogólnia przedstawiony wyżej wynik o aproksymacji dowolnego $x \in \mathbb{R}$ przy pomocy sumy ustalonego szeregu pomnożonego przez ciąg mnożników całkowitych (zależny od x). W tym celu ustalmy ciąg zerowy $\{a_n\} \subset (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ oraz liczbę $x \in \mathbb{R}$. Ze względu na sposób wyboru ciągu $\{\varepsilon_n\}$ (przypomnijmy, że każdy ε_n, $n \in \mathbb{N}$, należy do zbioru $M = \{\varepsilon x_n : n \in \mathbb{N}_0 \text{ i } \varepsilon = \pm 1\}$), można założyć, że $\{a_n\} \subset \mathbb{R}_+$ oraz, że $x \geqslant 0$. Ciąg $\{\varepsilon_n\}$ określimy indukcyjnie w następujący sposób. Kładziemy $\varepsilon_1 = -x_1$, gdy $x = 0$; natomiast, gdy $x > 0$, to dobieramy $k_1 \in \mathbb{N}_0$ tak, by:

$$x_{k_1}a_1 < x \leqslant x_{k_1+1}a_1$$

i kładziemy $\varepsilon_1 = x_{k_1}$. Gdy dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, określimy już liczby $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}$, wszystkie ze zbioru M i dodatnie, przy czym tak, że $x - \sum_{j=1}^{i} \varepsilon_j a_j > 0$ dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n-1$, to jako $k_n \in \mathbb{N}_0$ bierzemy liczbę całkowitą wyznaczoną warunkiem:

$$x_{k_n}a_n < x - \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon_j a_j \leqslant x_{k_n+1}a_n \tag{15}$$

i kładziemy $\varepsilon_n = x_{k_n}$. Ciąg $\{\varepsilon_n\}$ można więc uznać za określony. Zauważmy, że ciąg:

$$\mathbb{X} = \left\{x - \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_j\right\} \subset \mathbb{R}_+$$

jest nierosnący. Pokażemy, że $\mathbb{X}$ jest zbieżny do zera. Wprost z (15) dostajemy:

$$0 < x - \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_j \leqslant (x_{k_n+1} - x_{k_n})\, x_{k_n}^{-1}\, (x_{k_n} a_n)\,. \tag{16}$$

Gdyby istniał podciąg ciągu $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ rozbieżny do ∞, to na mocy założenia o zbieżności do zera ciągu $\{(x_{n+1} - x_n)x_n^{-1}\}$, otrzymujemy, że liczba zero jest punktem skupienia ciągu $\{(x_{k_n+1} - x_{k_n})x_{k_n}^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$. Jednocześnie z (15) i z ograniczoności ciągu $\mathbb{X}$ wynika ograniczoność ciągu $\{x_{k_n} a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Z ostatnich dwóch faktów oraz z (16) dostajemy, że pewien podciąg ciągu $\mathbb{X}$ jest zbieżny do zera, a w konsekwencji $\mathbb{X}$ jest zbieżny do zera gdyż jest monotoniczny. Gdyby ciąg $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ był ograniczony, to ograniczony byłby też ciąg $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, a przez to i ciąg $\{x_{k_n+1} - x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$, co wobec zbieżności do zera ciągu $\{a_n\}$, daje na mocy (16), zbieżność do zera ciągu $\mathbb{X}$. Ponieważ ciąg $\mathbb{X}$ jest dodatni (patrz (16)), więc z jego zbieżności do zera wynika, że nieskończenie wiele elementów ciągu $\{\varepsilon_n\}$ jest różnych od zera.

33. Ustalmy $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, liczby $a_i, b_i \in \mathbb{R}_+$, $1 \leqslant i \leqslant k$ oraz ciąg zerowy $\{d_n\} \subset \mathbb{R}_+$. Ponadto załóżmy, że $\xi \neq 0$, gdzie:

$$\xi := \left(\sum_{i=1}^{k} b_i^{-1} (\ln(a_i))^2 \right) - s^{-1} \left(\ln \left(\prod_{i=1}^{k} a_i \right) \right)^2$$

oraz $s = \sum\limits_{i=1}^{k} b_i$. Udowodnimy, że wówczas szereg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\sum_{i=1}^{k} b_i a_i^{d_n b_i^{-1}} \right) - s \prod_{i=1}^{k} a_i^{d_n s^{-1}} \right) \tag{17}$$

jest zbieżny dokładnie wtedy, gdy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n^2 < \infty$.

Niech $a \in \mathbb{R}_+$ i $b \in \mathbb{R}$. Z rozwinięcia w szereg Maclaurina funkcji exponent dostajemy:

$$a^b - 1 = \exp(\ln a^b) - 1 = b \ln a + \frac{1}{2}(b \ln a)^2 + \frac{1}{6}(b \ln a)^3 + \ldots = b \ln a + f(a,b)(b \ln a)^2,$$

gdzie dla ustalonego a zachodzi $f(a,b) \to \frac{1}{2}$, gdy $b \to 0$. Stąd szereg (17) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\sum_{i=1}^{k}\left(b_i + d_n \ln(a_i) + f(a_i, d_n b_i^{-1}) b_i^{-1}(d_n \ln(a_i))^2\right)\right) + \right.\\
&\qquad \left. -s\prod_{i=1}^{k}\left(1 + d_n s^{-1}\ln(a_i) + f(a_i, d_n s^{-1})(d_n s^{-1}\ln(a_i))^2\right)\right) =\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \left(\left(\sum_{i=1}^{k}\left(f(a_i, d_n b_i^{-1}) b_i^{-1} - f(a_i, d_n s^{-1}) s^{-1}\right)(\ln(a_i))^2\right) + \right.\\
&\qquad \left. -\sum_{i=1}^{k-1} s^{-1}\ln(a_i)\left(\sum_{j=i+1}^{k}\ln(a_j)\right)\right) + o(d_n^2) =\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} d_n^2 \left(\left(\sum_{i=1}^{k}\left(f(a_i, d_n b_i^{-1}) b_i^{-1} - f(a_i, d_n s^{-1}) s^{-1} + \frac{1}{2}s^{-1}\right)(\ln(a_i))^2\right) + \right.\\
&\qquad \left. -\frac{1}{2}s^{-1}\left(\ln\left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)\right)^2\right) + o(d_n^2).
\end{aligned}$$

Zauważmy, że współczynnik przy d_n^2 w powyższym szeregu dąży do $\frac{1}{2}\xi$ przy $n \to \infty$, a liczba ta, na mocy założenia, jest różna od zera.

Uwaga. Gdy $b_i = k^{-1}$ dla każdego $i = 1, 2, \ldots, k$ oraz co najmniej dwie spośród liczb $a_1, a_2, \ldots, a_k$, są różne, to $\xi \neq 0$ na mocy nierówności między średnimi ważonymi rzędu r (zob [3], str. 43).

34. Niech $\{\varepsilon_n\} \in \mathbf{z}$. Połóżmy $\alpha = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ oraz $\beta = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$. Przypuśćmy, że ciąg $\{a_n\}$ ma co najmniej dwa punkty skupienia. Wtedy $\alpha \neq \beta$, czyli istnieje indeks $N \in \mathbb{N}$ taki, że:

$$\sum_{n=N}^{\infty} \varepsilon_n < \frac{1}{2}(\beta - \alpha) \tag{18}$$

oraz $a_{n+1} \geqslant a_n - \varepsilon_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N$. Stąd w szczególności dostajemy:

$$a_n \geqslant a_m - \sum_{i=m}^{n} \varepsilon_i \tag{19}$$

dla dowolnych $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geqslant m \geqslant N$. Ale indeksy n oraz m $(n > m)$ mogą być dobrane tak, by:

$$|a_n - \alpha| < \frac{1}{4}(\beta - \alpha) \quad \text{oraz} \quad |a_m - \beta| < \frac{1}{4}(\beta - \alpha).$$

Zatem $a_m - a_n > \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$. Jednocześnie z (18) i (19) wynika nierówność $a_m - a_n < \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$ i mamy sprzeczność. Wniosek: ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny. Niech teraz $\{\varepsilon_n\} \in \mathbf{r}$. Ustalmy przedział domknięty i niepusty $I \subset \mathbb{R}$. Można dobrać ciąg mnożników $\{\alpha_n\} \subset \{\pm 1\}$ taki, że zbiorem punktów skupienia szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varepsilon_n$ jest przedział I. Połóżmy $b_1 = 0$ i $b_{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \varepsilon_k$ dla $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Wówczas $b_2 = \alpha_1 \varepsilon_1 \geqslant b_1 - \varepsilon_1$ oraz $b_{n+1} = b_n + \alpha_n \varepsilon_n \geqslant b_n - \varepsilon_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

35. Z zależności $(k+1)^{-s-1} < \int\limits_k^{k+1} x^{-s-1}dx < k^{-s-1}$ zachodzących dla każdego $k \in \mathbb{N}$, łatwo generujemy następujące nierówności:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-s-1} < s^{-1}n^{-s} < \sum_{k=n}^{\infty} k^{-s-1} \tag{20}$$

zachodzące dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Rzecz jasna z (20) wynika, że:

$$s^{-1} < a_n < s^{-1} + n^{-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

czyli, że ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny do s^{-1}. Zbadamy jeszcze monotoniczność ciągu $\{a_n\}$. W oparciu o (20) otrzymujemy oszacowanie:

$$a_n a_{n+1}^{-1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^s \left(1 + n^{-s-1}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-s-1}\right)^{-1}\right) > \left(1 - \frac{s}{n+1}\right)\left(1 + \frac{s}{n}\right) = 1 + \frac{s(1-s)}{n(n+1)},$$

skąd wynika, że ciąg $\{a_n\}$ jest malejący o ile tylko $s \leqslant 1$. Ponownie wykorzystując (20) dostajemy:

$$\begin{aligned}
a_n a_{n+1}^{-1} &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^s \left(1 + n^{-s-1}\left((n+1)^{-s-1} + \sum_{k=n+2}^{\infty} k^{-s-1}\right)^{-1}\right) > \\
&> \left(\frac{n}{n+1}\right)^s \left(1 + n^{-s-1}\left((n+1)^{-s-1} + s^{-1}(n+1)^{-s}\right)^{-1}\right) = \\
&= \left(\frac{n}{n+1}\right)^s + \left(\frac{n}{n+1} + \frac{n}{s}\right)^{-1} = \\
&= 1 - s(n+1)^{-1} + \frac{1}{2}s(s-1)(n+1)^{-2} + o(n^{-2}) + \left(\frac{n}{n+1} + \frac{n}{s}\right)^{-1} = \\
&= 1 + \frac{1}{2}s(1-s)n^{-2} + o(n^{-2}).
\end{aligned}$$

Stąd $\liminf\limits_{n\to\infty} n^{-2}(a_n a_{n+1}^{-1} - 1) \geqslant \frac{1}{2}s(1-s)$. Z innej strony znajdujemy też:

$$\begin{aligned}
a_n a_{n+1}^{-1} &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^s \left(1 + n^{-s-1}\left((n+1)^{-s-1} + \sum_{k=n+2}^{\infty} k^{-s-1}\right)^{-1}\right) < \\
&< \left(\frac{n}{n+1}\right)^s \left(1 + n^{-s-1}\left((n+1)^{-s-1} + s^{-1}(n+2)^{-s}\right)^{-1}\right) = \\
&= \left(\frac{n}{n+1}\right)^s + \left(\frac{n}{n+1} + \frac{n}{s}(n+1)^s(n+2)^{-s}\right)^{-1} = \\
&= 1 - s(n+1)^{-1} + \frac{1}{2}s(s-1)(n+1)^{-2} + o(n^{-2}) + \left(\frac{n}{n+1} + \frac{n}{s}(n+1)^s(n+2)^{-s}\right)^{-1} = \\
&= 1 + \frac{1}{2}s(1+s)n^{-2} + o(n^{-2}),
\end{aligned}$$

co implikuje oszacowanie $\limsup\limits_{n\to\infty} n^{-2}(a_n a_{n+1}^{-1} - 1) \leqslant \frac{1}{2}s(1+s)$.

36. Niech $\alpha > 0$. Ustalmy $\varepsilon \in (0, \alpha)$. Istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnego indeksu $n > N$ mają miejsce nierówności:

$$\alpha - \varepsilon \leqslant b_n b_{n+1}^{-1} \leqslant \alpha + \varepsilon,$$

skąd:

$$b_m^{-1}(\alpha - \varepsilon)^{n-m} \leqslant b_n^{-1} \leqslant b_m^{-1}(\alpha + \varepsilon)^{n-m}$$

dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$, $N < m < n$. Zatem otrzymujemy:

$$b_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} b_k^{-1} \right) \geqslant b_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} b_n^{-1} (\alpha - \varepsilon)^{k-n} \right) = (1 - \alpha + \varepsilon)^{-1}$$

oraz

$$b_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} b_k^{-1} \right) \leqslant b_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} b_n^{-1} (\alpha + \varepsilon)^{k-n} \right) = (1 - \alpha - \varepsilon)^{-1}.$$

W konsekwencji, ze względu na dowolność $\varepsilon > 0$, ciąg $\left\{ b_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} b_k^{-1} \right) \right\}$ jest zbieżny do $(1-\alpha)^{-1}$. Gdy $\alpha = 0$, to przy założeniach jak wyżej, mamy:

$$1 < b_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} b_k^{-1} \right) \leqslant b_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} b_n^{-1} (\alpha + \varepsilon)^{k-n} \right) = (1 - \alpha - \varepsilon)^{-1},$$

czyli ciąg $\left\{ b_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} b_k^{-1} \right) \right\}$ jest zbieżny do 1.

37. Rozpoczniemy od udowodnienia pierwszego z cytowanych twierdzeń. Indukcyjnie potrafimy skonstruować przeliczalną rodzinę $\{k_{i,n}\}_{n=1}^{\infty}$, $i \in \mathbb{N}$, rosnących ciągów liczb naturalnych spełniających, dla każdego $i \in \mathbb{N}$ następujące warunki:

$$\{k_{i+1,n}\}_{n=1}^{\infty} \subset \{k_{i,n}\}_{n=1}^{\infty}, \tag{21}$$

$$k_{i+1,1} > k_{i,2}, \tag{22}$$

$$\lim_{n\to\infty} t_{k_{i,n}}^{(i)} = \alpha_i := \limsup_{n\to\infty} t_{k_{i-1,n}}^{(i)}, \quad (k_{0,n} = n), \tag{23}$$

$$\alpha_j - t_{k_{i,n}}^{(j)} \leqslant 2^{-i} \quad \text{dla dowolnych } j, n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant j \leqslant i. \tag{24}$$

Przyjmijmy teraz $x_n = i^{-1}$, gdy $n = k_{i,1}$ oraz $x_m = -i^{-1}$, gdy $m = k_{i,2}$, zaś indeks i przebiega całe $\mathbb{N}$. Dla pozostałych indeksów $n \in \mathbb{N}$ kładziemy $x_n = 0$. Ze względu na (22), widzimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jest warunkowo zbieżny. Pokażemy, że również każdy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} t_n^{(i)} x_n$, $i \in \mathbb{N}$, jest zbieżny. W tym celu ustalmy $i, r \in \mathbb{N}$, $r > k_{i,1}$. Wówczas mamy:

$$\begin{aligned}\sum_{n=k_{i,1}}^{r} t_n^{(i)} x_n &= \sum_{\{j\colon k_{i,1} \leqslant k_{j,1} \leqslant r\}} j^{-1} t_{k_{j,1}}^{(i)} - \sum_{\{j\colon k_{i,1} \leqslant k_{j,2} \leqslant r\}} j^{-1} t_{k_{j,2}}^{(i)} = \\ &= \sum_{\{j\colon k_{i,1} \leqslant k_{j,1} \leqslant r\}} j^{-1} \alpha_i - \sum_{\{j\colon k_{i,1} \leqslant k_{j,2} \leqslant r\}} j^{-1} \alpha_i + \\ &+ \sum_{\{j\colon k_{i,1} \leqslant k_{j,1} \leqslant r\}} j^{-1} (t_{k_{j,1}}^{(i)} - \alpha_i) + \sum_{\{j\colon k_{i,1} \leqslant k_{j,2} \leqslant r\}} j^{-1} (\alpha_i - t_{k_{j,2}}^{(i)}).\end{aligned} \tag{25}$$

Ale z (21) i (22) wynika, że:

$$0 \leqslant \sum_{\{j\colon k_{i,1} \leqslant k_{j,1} \leqslant r\}} j^{-1} \alpha_i - \sum_{\{j\colon k_{i,1} \leqslant k_{j,2} \leqslant r\}} j^{-1} \alpha_i \leqslant j_w^{-1} \alpha_i, \tag{26}$$

gdzie $j_w := \max\{j \in \mathbb{N} : \ k_{j,1} \leqslant r\}$. Z kolei z (21) i (24) wnioskujemy, że mają miejsce następujące oszacowania (zachodzące dla każdego $r \in \mathbb{N}$):

$$\sum_{\{j\colon k_{i,1} \leqslant k_{j,1} \leqslant r\}} j^{-1} t_{k_{j,1}}^{(i)} - \alpha_i \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} j^{-1} 2^{-j} < \infty \tag{27}$$

oraz:

$$\sum_{\{j\colon k_{i,1} \leqslant k_{j,2} \leqslant r\}} j^{-1} \alpha_i - t_{k_{j,2}}^{(i)} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} j^{-1} 2^{-j} < \infty. \tag{28}$$

Podsumujmy, z (27) i (28) dostajemy bezwzględną zbieżność szeregów:

$$\sum_{\{j\colon k_{i,1} \leqslant k_{j,1}\}} j^{-1} t_{k_{j,1}}^{(i)} - \alpha_i \quad \text{oraz} \quad \sum_{\{j\colon k_{i,1} \leqslant k_{j,2}\}} j^{-1} \alpha_i - t_{k_{j,2}}^{(i)}.$$

Stąd oraz z (25) i (26) wynika zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n^{(i)} x_n$, co, ze względu na dowolność indeksu i, kończy dowód.

Teraz niech $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ będzie ciągiem nieograniczonym. Ustalmy podciąg $\{t_{k_n}\}$ taki, że $|t_{k_n}| > 2^n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Przyjmujemy $x_n = \operatorname{sgn}(t_{k_i}) 2^{-i}$, gdy $n = k_i$ oraz $i \in \mathbb{N}$; dla pozostałych indeksów $n \in \mathbb{N}$ kładziemy $x_n = 0$. Bez trudu sprawdzamy, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ jest bezwzględnie zbieżny, natomiast szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ jest rozbieżny.

43. a) Jeśli $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{n}{b_n} > 0$, to z następującego twierdzenia (zob. np. [2], [1], [5]):

Twierdzenie 1. *Jeśli szereg $\sum a_n$ o dodatnich wyrazach tworzących ciąg nierosnący jest zbieżny, to $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 0$.*

otrzymujemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ dla każdego ciągu nierosnącego $\{a_n\} \in \mathbf{z}$. Pokażemy, że jeśli $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{n}{b_n} = 0$, to istnieje ciąg nierosnący $\{a_n\} \in \mathbf{z}$ o własności $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n b_n > 0$.

Ustalmy wpierw podciąg rosnący $\{n_i\} \subset \mathbb{N}$ spełniający warunek $n_i < 2^{-i} b_{n_i}$. Ciąg $\{a_n\}$ konstruujemy następująco:

$$a_1 = \ldots = a_{n_1} := 1,$$
$$a_{n_i+1} = \ldots = a_{n_{(i+1)}} := b^{-1}_{n_{(i+1)}}, \qquad i \geqslant 1.$$

Łatwo można zauważyć, że otrzymany w ten sposób ciąg $\{a_n\}$ jest monotoniczny i zachodzi:

$$\sum a_n \leqslant n_1 + \sum_{i \geqslant 2} \frac{n_i}{b_{n_i}} \leqslant n_1 + \sum_{i \geqslant 2} 2^{-i} = n_1 + \frac{1}{2} < +\infty.$$

Mamy również:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n b_n \geqslant \limsup_{i\to\infty} a_{n_i} b_{n_i} = \limsup_{i\to\infty} 1 = 1.$$

b) (John H. Lindsey II) Załóżmy, że $\liminf\limits_{n\to\infty} n a_n = 0$. Niech $n_0 := 0$ i ustalmy $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, by $n_1 a_{n_1} < \frac{1}{2}$. Następnie indukcyjnie, mając ustalone $n_{k-1} \in \mathbb{N}$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ dobieramy $n_k \in \mathbb{N}$ przykładowo, jako najmniejszą liczbę naturalną $n_k > n_{k-1}$ spełniającą warunek:

$$n_k a_{n_k} < \min\left\{n_{k-1} a_{n_{k-1}}, 2^{-k}\right\}. \tag{29}$$

Mając określony ciąg $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ definiujemy $b_m = a_{n_k}$ dla każdego indeksu $m \in \mathbb{N}$ dla którego zachodzi:

$$n_{k-1} < m \leqslant n_k.$$

Oczywiście z (29) i faktu, że ciąg $\{n_k\}$ jest rosnący wynika, że ciąg $\{b_n\}$ jest nierosnący oraz, że:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=n_{k-1}+1}^{n_k} b_m = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=n_{k-1}+1}^{n_k} a_{n_k} = \sum_{k=1}^{\infty} (n_k - n_{k-1}) a_{n_k} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} n_k a_{n_k} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1,$$

czyli, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny.

Teraz załóżmy, że $\liminf\limits_{n\to\infty} n a_n = 2c > 0$. Wówczas istnieje $N \in \mathbb{N}$, takie że $n a_n > c$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N$. Ustalmy ciąg nierosnący $\{b_n\} \subset \mathbb{R}_+$ dla którego nierówność $b_n \geqslant a_n$ zachodzi dla nieskończenie wielu indeksów $n \in \mathbb{N}$. Możemy więc zdefiniować indukcyjnie ciąg $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ taki, że $n_0 = 0$, $n_1 > N$, $n_k > 2n_{k-1}$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$ oraz $b_{n_k} \geqslant a_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$. W rezultacie dostajemy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=n_{k-1}+1}^{n_k} b_m \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=n_{k-1}+1}^{n_k} b_{n_k} \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} (n_k - n_{k-1}) a_{n_k} \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} n_k a_{n_k} \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} c = \infty,$$

co kończy dowód.

45. Podamy teraz kilka wskazówek nawiązujących do dowodu faktu, że jeśli $\alpha > 41$, to jedynymi punktami skupienia ciągu $\{n^\alpha \sin n\}$ są $\pm\infty$. Najpierw zauważmy, że jeśli $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$, to istnieje $m \in \mathbb{N}$ takie, że:

$$\frac{n}{m+1} < \pi < \frac{n}{m}, \tag{30}$$

przy czym jeśli $n \to \infty$, to również $m \to \infty$, a ściślej jeśli tylko n jest dostatecznie duże, to:

$$\frac{n}{m} \sim \pi$$

albowiem:

$$\frac{n}{m} - \frac{n}{m+1} = \frac{n}{m(m+1)} < \frac{\pi}{m}.$$

Dla danego dowolnie $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 9$, niech $m \in \mathbb{N}$ będzie dobrane tak, by spełnione były nierówności (30). Wówczas $m \geqslant 2$ oraz:

$$\sin n = \sin\left(m\pi + m\left(\frac{n}{m} - \pi\right)\right) = (-1)^m \sin\left(m\left(\frac{n}{m} - \pi\right)\right).$$

Jeśli $m\left(\frac{n}{m} - \pi\right)$ jest dostatecznie małe, to:

$$|\sin n| \sim m\left(\frac{n}{m} - \pi\right) \geqslant m \cdot \frac{1}{m^{42}} = \frac{1}{m^{41}},$$

czyli:

$$n^{\alpha}|\sin n| \sim n^{\alpha} m\left(\frac{n}{m} - \pi\right) \geqslant \frac{n^{\alpha}}{m^{41}} = n^{\alpha-41}\left(\frac{n}{m}\right)^{41}.$$

Zauważmy jeszcze, że:

$$m\left(\frac{n}{m} - \pi\right) < m\left(\frac{n}{m} - \frac{n}{m+1}\right) = \frac{n}{m+1} < \pi,$$

czyli:

$$m\left(\frac{n}{m} - \pi\right) \in (0, \pi).$$

W przypadku, gdy $m\left(\frac{n}{m} - \pi\right) \sim \pi$, to:

$$(m+1)\left(\pi - \frac{n}{m+1}\right) = \pi - m\left(\frac{n}{m} - \pi\right)$$

jest dostatecznie małe.

Literatura

1. Adam M., Bajorska-Harapińska B., Hetmaniok E., Ludew J., Pleszczyński M., Różański M., Słota D., Słowik R., Smoleń B., Uryga J., Wituła R., *Szeregi liczbowe w analizie matematycznej i w teorii liczb*, Wyd. Politechniki Śląskiej, Gliwice 2021.
2. Knopp K., *Szeregi nieskończone*, PWN, Warszawa 1956.
3. Mitrinović D., *Elementarne nierówności*, PWN, Warszawa 1972.
4. Narkiewicz W., *Teoria liczb*, PWN, Warszawa 2003.
5. Prus-Wiśniowski F., *Szeregi rzeczywiste*, Wyd. Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego, Szczecin 2005.
6. Sierpiński W., *Działania nieskończone*, Spółdzielnia Wydawnicza „Czytelnik”, 1948.