

Barbara BILEY<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Institute of Mathematics, Silesian University of Technology, Gliwice, Poland

## Trójkąt Klaubera i spirala Ulama od kuchni

**Streszczenie.** Zarówno spirala Ulama, jak i trójkąt Klaubera służą do wizualizacji rozmieszczenia liczb pierwszych wśród liczb naturalnych. Różnią się one algorytmami definiującymi kolejność zapełniania kwadratowej sieci liczbami naturalnymi. Znane są również inne sposoby wizualizacji (na przykład spirala Sachsa), które w tym artykule zostaną pominięte.

Algorytmizacja budowy zarówno spirali Ulama, jak i trójkąta Klaubera umożliwia zidentyfikowanie trójkąta jako znacząco uproszczonej wersji spirali. Jednocześnie pozwala to na stworzenie pokrewnych im konstrukcji, odpowiednich do zademonstrowania nieoczywistych dla oryginalnych figur właściwości. Ponadto podaje się sposób dalszego uproszczenia trójkąta przez rozszerzenie jego dziedziny do półpłaszczyzny. Transformacje tej półpłaszczyzny przy pomocy wielomianów jednej zmiennej pozwoliły zidentyfikować zaobserwowaną przez Klaubera regularność jako pierwszy element w serii, umożliwiając także wskazanie kolejnych jej przedstawicieli.

**Słowa kluczowe:** liczby pierwsze, trójkąt Klaubera, spirala Ulama.

### 1. Wstęp

Spirala Ulama i trójkąt Klaubera służą od dawna do epatowania miłośników matematyki niezwykłymi właściwościami w rozkładzie liczb pierwszych. W niniejszym artykule wykazane zostają podobieństwa i różnice pomiędzy oboma podejściami. Podana zostaje także metoda algorytmizacji budowy obu figur. Algorytm ten, poprzez modyfikację parametrów, umożliwia tworzenie różnych wariantów podanych figur, w szczególności takich, które lepiej uwidaczniają obserwowane prawidłowości. Ponadto, rozszerzenie dziedziny figur do całej płaszczyzny wyjaśnia zaobserwowaną przez Klaubera regularność jako jedną z serii, jednocześnie wskazując na inne, przez niego niedostrzeżone. Ostatecznie następuje transformacja z geometrii w obszar równań wielomianów jednej zmiennej, co umożliwia obserwacje niezwykłych regularności również dla wielomianów wyższych stopni.

---

Autor korespondencyjny: B. Biley (Barbara.Biley@polsl.pl).  
Data wpłyścia: 04.12.2019.

## 2. Graficzne przedstawienia rozkładu liczb pierwszych

### 2.1. Rys historyczny

Zarówno szerzej znana spirala Ulama [1] (1963 r.), jak i nieco zapomniany trójkąt Klaubera [2] (1932 r.) służą temu samemu celowi: unaocznieniu istnienia reguły rządzącej rozkładem liczb pierwszych wśród liczb naturalnych. Reguła ta wciąż czeka na swojego odkrywcę, gdyż przedstawione dowody nie znalazły dotychczas powszechnej akceptacji [4].

### 2.2. Spirala Ulama

W 1963 Stanisław Ulam, podobno dla zabicia czasu w trakcie nudnej niasiadówki, na kratkowanej kartce papieru zaczął wypisywać kolejne liczby naturalne, układając je spiralnie:

5	4	3
6	1	2
7		

Rysunek 1. Początek spirali Ulama

Ponieważ posiedzenie się przedłużało, spirala rozrastała się.

37	36	35	34	33	32	31
38	17	16	15	14	13	30
39	18	5	4	3	12	29
	19	6	1	2	11	28
	20	7	8	9	10	27
	21	22	23	24	25	26

Rysunek 2. Ciąg dalszy spirali Ulama

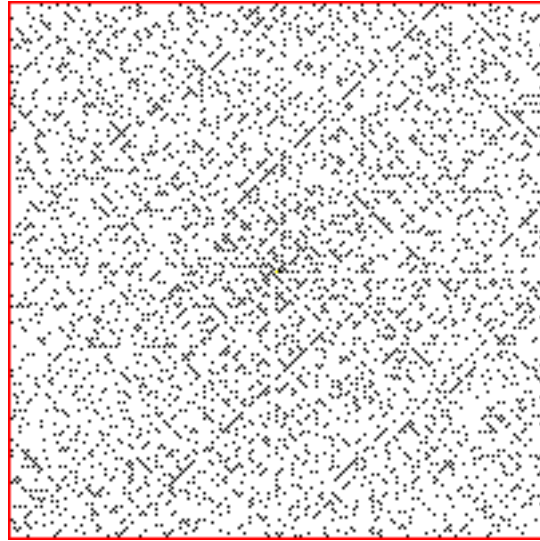
Zapewne w końcu zabrakło miejsca na kartce, zatem pozostało kontemplowanie tak powstałego dzieła. Ulam, jako matematyk, dostrzegł w tym zbiorze liczb zastanawiającą właściwość: liczby pierwsze miały tendencje do grupowania się wzdłuż linii ukośnych, nachylonych do osi kartki pod kątem  $\pm\pi/4$ .

<del>37</del>	<del>36</del>	<del>35</del>	<del>34</del>	<del>33</del>	<del>32</del>	<del>31</del>
38	<del>17</del>	<del>16</del>	<del>15</del>	<del>14</del>	<del>13</del>	30
39	18	<del>5</del>	<del>4</del>	<del>3</del>	12	<del>29</del>
<del>19</del>	6	<del>1</del>	<del>2</del>	<del>11</del>	28	
20	<del>7</del>	8	9	10	27	
21	22	<del>23</del>	24	25	26	

Rysunek 3. Zaobserwowana prawidłowość w rozmieszczeniu liczb pierwszych

Prawidłowość ta jest widoczna już dla małych wielkości spirali, przy większych rozmiarach zaś staje się rzucającym się w oczy zjawiskiem. Aby go w pełni unaocznnić, zachodzi potrzeba zmiany sposobu prezentacji rozkładu liczb pierwszych, gdyż stosowany powyżej zawodzi już przy liczbach rzędu  $10^3$ .

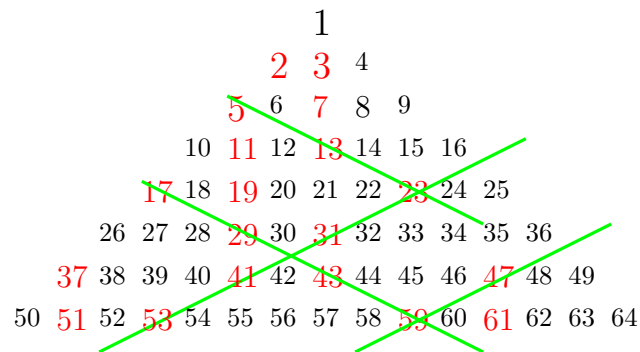
Powszechnie stosowanym sposobem jest zmniejszenie każdej liczby do rozmiaru punktu. Jeśli dana liczba jest liczbą pierwszą, wówczas przyporządkowuje się jej kolor czarny, natomiast wszystkie pozostałe punkty otrzymują kolor biały. Powyższy sposób umożliwia zmieszczenie na jednej stronie informacji o liczbach rzędu  $10^5$ .



Rysunek 4. Położenie liczb pierwszych na spirali Ulama złożonej z  $200^2 = 40000$  liczb.

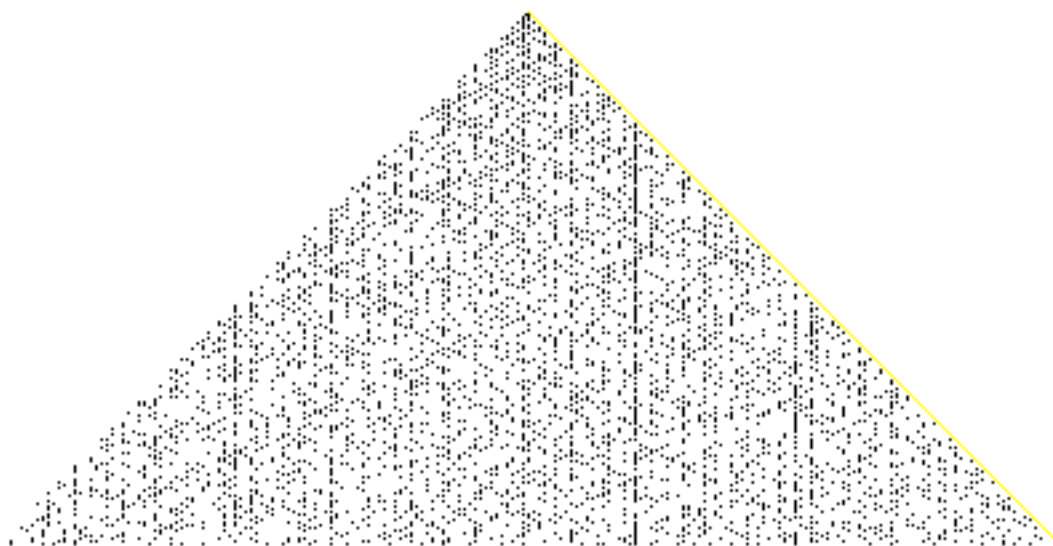
### 2.3. Trójkąt Klaubera

Bardzo podobne prawidłowości odkrył znacznie wcześniej, bo już w 1932 roku, Laurence Monroe Klauber. Jego sposób rozmieszczania kolejnych liczb naturalnych na płaszczyźnie był znacznie prostszy: liczebność kolejnych linii zwiększano o 2, jednocześnie wysuwając linie w lewo o jeden moduł. Zagęszczenie występowania liczb pierwszych obserwuje się w tym przypadku na liniach ukośnych pochyłonych pod kątem  $\alpha$ , dla którego  $\text{tg } \alpha = \pm \frac{1}{2}$  (pod warunkiem używania siatki kwadratowej do rozmieszczania liczb).



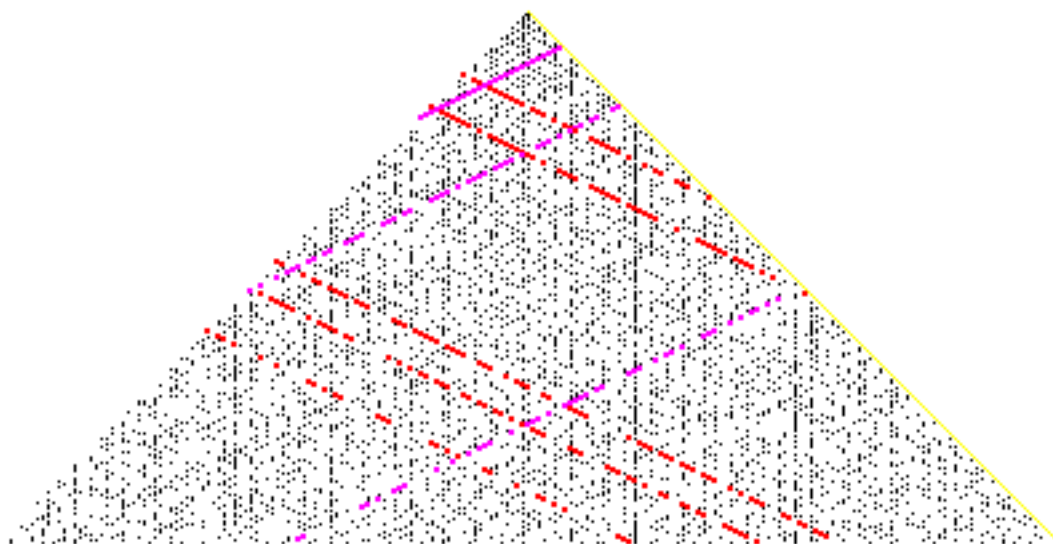
Rysunek 5. Początek trójkąta Klaubera.

W tym przypadku dostrzeżenie powyższej regularności w rozkładzie liczb pierwszych wymaga pewnej dozy spostrzegawczości (rys. 6).



Rysunek 6. Położenie liczb pierwszych w trójkącie Klaubera złożonego z  $200^2 = 40000$  liczb.

Z tego powodu, aby ułatwić percepcję, powyższy rysunek uzupełniono wyróżniając punkty na niektórych gęściej obsadzonych liniach (rys. 7).



Rysunek 7. Ten sam trójkąt z wyróżnieniem niektórych punktów.

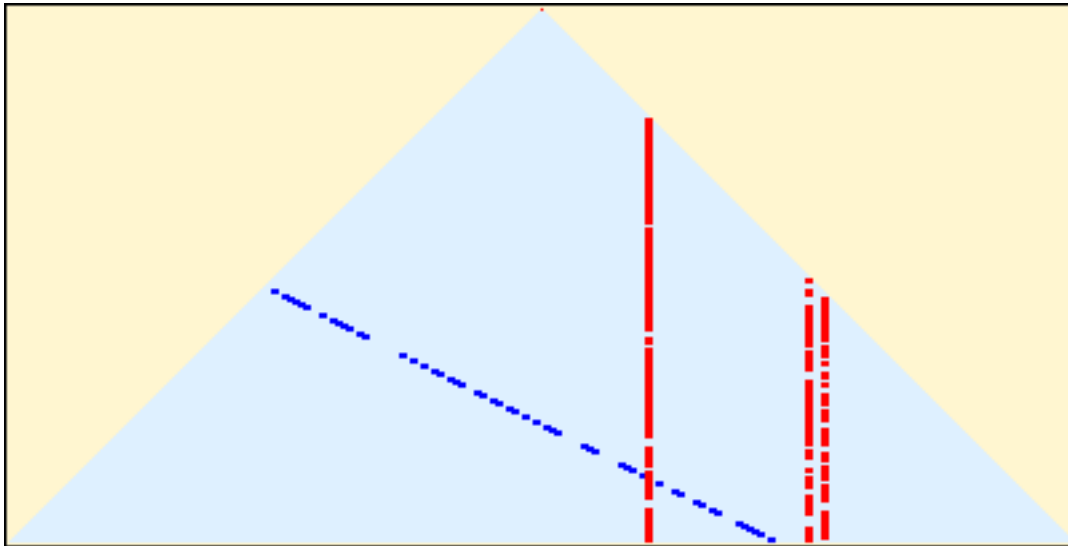
Na obu rysunkach dodatkowo zaznaczono kolorem żółtym prawą krawędź trójkąta. Inaczej byłaby ona niewidoczna, ponieważ nie ma tam liczb pierwszych, gdyż znajdują się tam wyłącznie kwadraty kolejnych liczb naturalnych.

## 2.4. Porównanie obu rozkładów

Można zadać pytanie, dlaczego pomimo niewątpliwego pierwszeństwa Klaubera, jest on dziś praktycznie pomijany, a nawet zapomniany? Powodów może być kilka. Niewątpliwie regularności na spirali

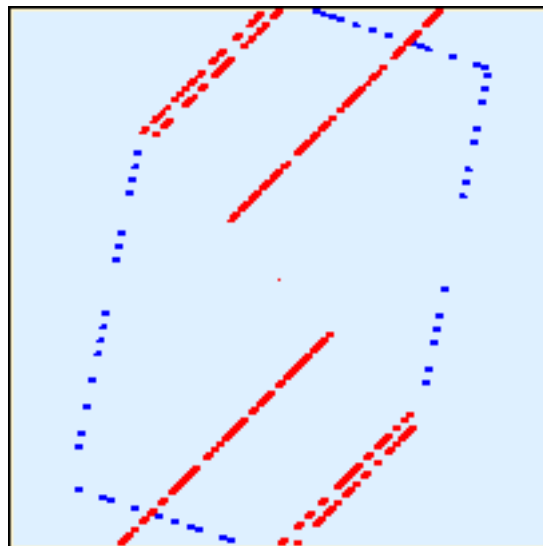
Ulama są na pierwszy rzut oka bardziej dostrzegalne. Dodatkowo ma ona przewagę poligraficzną: na tej samej powierzchni (prostokątna kartka lub ekran) można pomieścić dwukrotnie więcej punktów (i tym samym - informacji) używając spirali.

Tymczasem spirala Ulama ma wady nieobecne w trójkącie Klaubera. Porównajmy niektóre linie, zawierające znaczny udział liczb pierwszych, widoczne na obu figurach (rys. 8 i 9)



Rysunek 8. Trójkąt Klaubera z zaznaczonymi punktami leżącymi na niektórych liniach gęsto obsadzonych przez liczby pierwsze.

Te same punkty zaznaczono na spirali Ulama:



Rysunek 9. Spirala Ulama z zaznaczonymi identycznymi punktami jak w powyższym trójkącie Klaubera.

Jak widać, spirala Ulama działa na zasadzie kalejdoskopu, podwajając linie z trójkąta Klaubera i rozmieszczając je wg zasad symetrii osiowej. Linie ukośne (oznaczone kolorem niebieskim), które przecinają oś symetrii trójkąta zawierającego trójkąt Klaubera, w spirali Ulama są dodatkowo zginane pod kątem prostym  $\alpha = \pi/2$ .

Zadziwiająco również jest to, że linie ukośne na spirali Ulama, których odpowiednikami są linie pionowe w trójkącie Klaubera, nie zostały przez Klaubera w ogóle wzmiankowane jako fakt godny zauważenia. Przymuszczałnie potraktował je jako coś zbyt oczywistego, by zwracać na nie czyjąś uwagę. Natomiast w spirali Ulama są one centralnym wydarzeniem, dookoła którego jest koncentrowana cała uwaga. Dodatkowo, odpowiedniki linii ukośnych w trójkącie Klaubera (kolor niebieski) pozostały przez Ulama w jego spirali całkowicie niezauważone.

Podsumowując, spirala Ulama ma przewagę nad trójkątem Klaubera jedynie w zakresie estetyki, spowodowanej niezamierzoną symetryzacją. Natomiast do analizy zagadnienia rozmieszczenia liczb pierwszych wśród liczb naturalnych, spirala Ulama wnosi jedynie zbędne komplikacje.

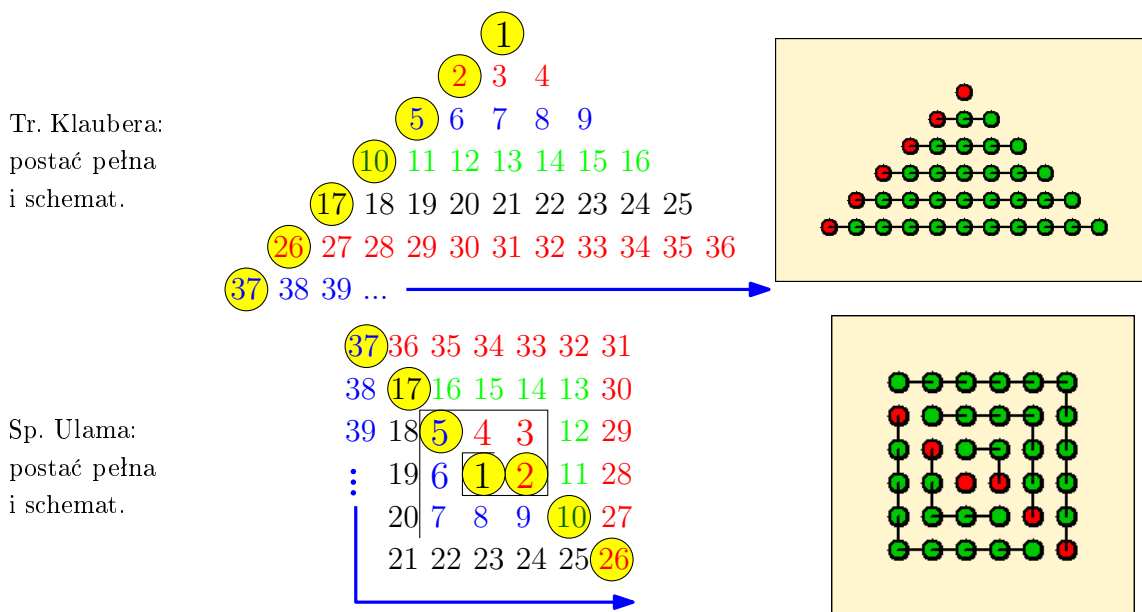
### 3. Modyfikacje figur Klaubera i Ulama

Poniżej zostaną przedstawione propozycje modyfikacji trójkąta Klaubera, mające na celu albo polepszenie widzialności zawartych w nim regularności, albo zrównanie go pod względem atrakcyjności wizualnej ze spiralą Ulama, przy zachowaniu zalet, wynikających z jego prostoty.

#### 3.1. Metoda modyfikacji

Najefektywniej modyfikacje można przeprowadzić rozpoznając wstępnie strukturę figur, a następnie algorytmizując ich tworzenie. Powstały w ten sposób algorytm będzie zawierać pewne parametry, które są charakterystyczne dla danych figur. Przy takim podejściu, modyfikacja metod sprowadza się jedynie do modyfikacji parametrów, które z kolei zmieniają działanie algorytmów tworzących figury. Całą resztą zajmie się szybkie programowalne liczydło (czytaj: komputer).

#### 3.2. Struktura figur



Na powyższych rysunkach zaznaczono:

- Sekcje, wyróżnione je czterema kolorami wg konwencji kartograficznej;

- Czołowe elementy sekcji umieszczono w żółtych kołach;
- Elementy parzyste mają ciemniejszy odcień.

Przy każdym rysunku zamieszczono odpowiadający mu schemat, na którym:

- Elementy w obrębie jednej sekcji są połączone odcinkami;
- Czołowe elementy sekcji oznaczono kolorem czerwonym.

### 3.3. Parametryzacja

Porównanie schematów obu figur umożliwi wyłowienie tych elementów wspólnych, które nie podlegają zmianom podczas przechodzenia od jednej figury do drugiej. Do takich elementów zaliczymy:

- Ilość liczb naturalnych zawartych w figurze;
- Ilość sekcji, na które jest podzielona figura;
- Numer elementu czołowego rozpoczynającego kolejną sekcję.

Zmianom natomiast podlegają:

Lp.	Parametr	Typ	tr. Klaubera	sp. Ulama
1	Moduł między elementami	wektor 2D	stały	zmienny
2	Moduł między sekcjami	wektor 2D	stały	zmienny
3	Kolejne elementy czołowe obok siebie	stała logiczna	tak	nie
4	Sekcja w kształcie odcinka	stała logiczna	tak	nie

Już porównując wartości tych parametrów, dostrzeżemy nadzwyczajną prostotę w trójkącie Klaubera, zawzięcie zakreślaną przez spiralę Ulama (spirale tak mają).

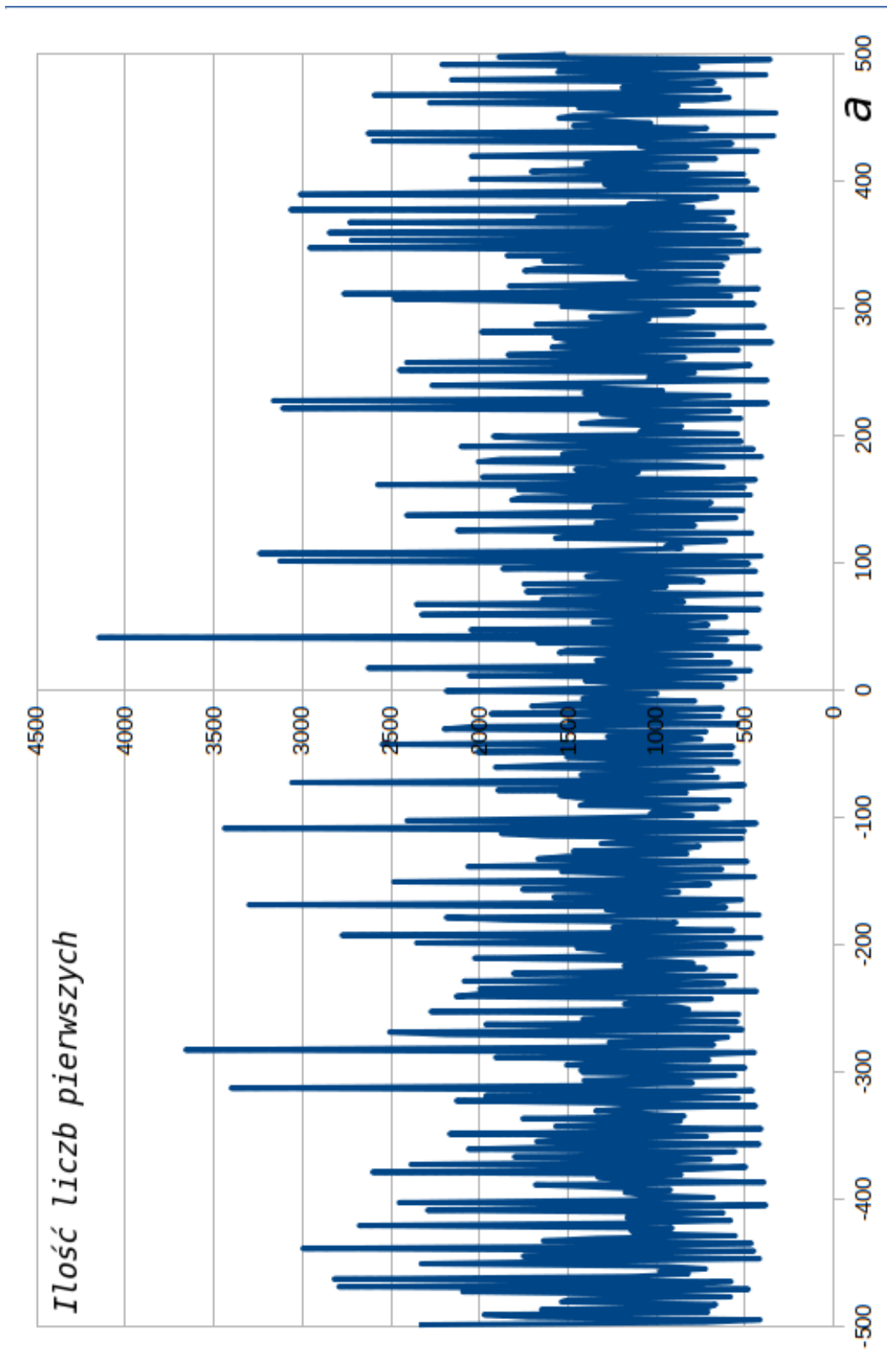
### 3.4. “Szczęśliwy” wielomian Eulera

Wielomian w następującej postaci:

$$P(n, a) = n^2 + n + a, \quad \text{dla } a = 41$$

został zaprezentowany przez Eulera [3] jako posiadający unikalną własność: jego wartości są liczbami pierwszymi dla kolejnych czterdziestu argumentów będących liczbami naturalnymi:  $0, 1, 2, \dots, 39$ .

Wielomian ten zachowuje swoje niezwykle właściwości generatora liczb pierwszych również po przekroczeniu tego progu. Poniżej przedstawiono wynik przebadania około tysiąca innych wartości parametru  $a \in \langle -500, 500 \rangle$  dla pierwszych  $\simeq 10^4$  elementów ( $n \in \langle 0, 10^4 \rangle$ ). Jak wynika z poniższego rysunku, w podanym zakresie wielomian Eulera nadal jest bezkonkurencyjny pod względem obfitości wygenerowanych liczb pierwszych, dając ich ponad 41%, prawie 5% więcej od drugiej liczby w rankingu (czyli -283). Z powyższego powodu generowane przez niego liczby będą stosowane jako swoistego rodzaju papierek lakmusowy, potrafiący wizualnie uporządkować chaos w rozmieszczeniu liczb pierwszych na prezentowanych rysunkach.



Rysunek 10. Ilość liczb pierwszych wśród początkowych  $10^4$  wygenerowanych liczb dla nieparzystych  $a \in \langle -500, 500 \rangle$



### 3.5. Przykłady zmodyfikowanych figur

Poniżej zaprezentowane zostaną niektóre ciekawsze postacie figur analogicznych do trójkąta Klaubera i spirali Ulama, powstałe wskutek eksperymentowania z parametrami stworzonego algorytmu. Identyczna będzie dla każdej figury maksymalna zawarta w niej liczba (10000), natomiast niekiedy usunięte zostaną linie poziome i pionowe zawierające wyłącznie liczby parzyste, o ile ich brak nie zakłóci charakteru rysunku.

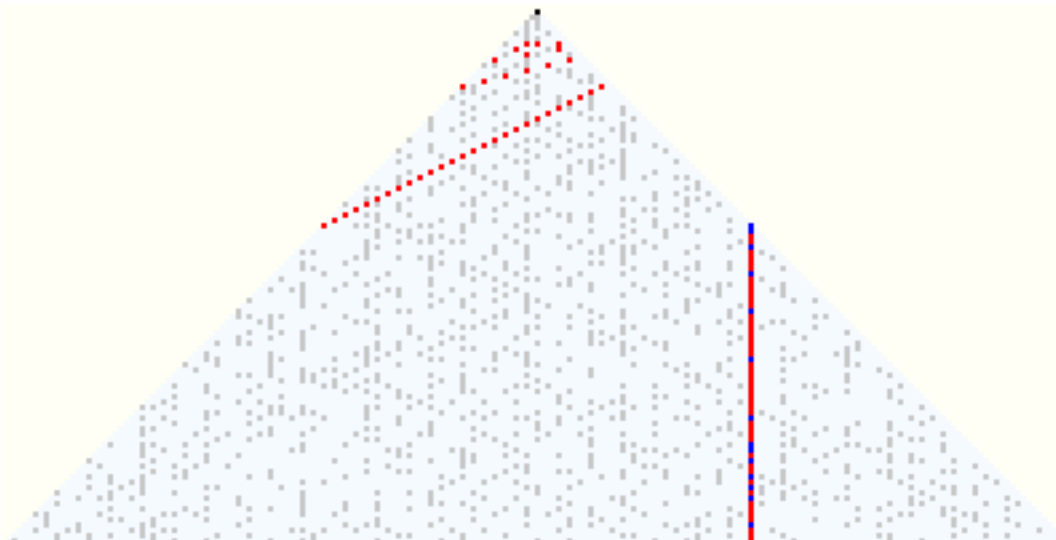
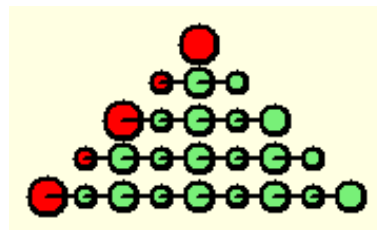
Liczby wygenerowane przez wielomian Eulera zostaną wyróżnione kolorem czerwonym, o ile są liczbami pierwszymi, natomiast w przypadku przeciwnym będzie użyty kolor niebieski.

#### 3.5.1. Trójkąt Klaubera, parametry: $[1,0],[-1,-1],1,1$

Jako pierwszy zostanie pokazany standardowy trójkąt Klaubera, który stanowić będzie punkt odniesienia, ułatwiający śledzenie zachodzących zmian.

Standardowy trójkąt Klaubera,  
schemat:

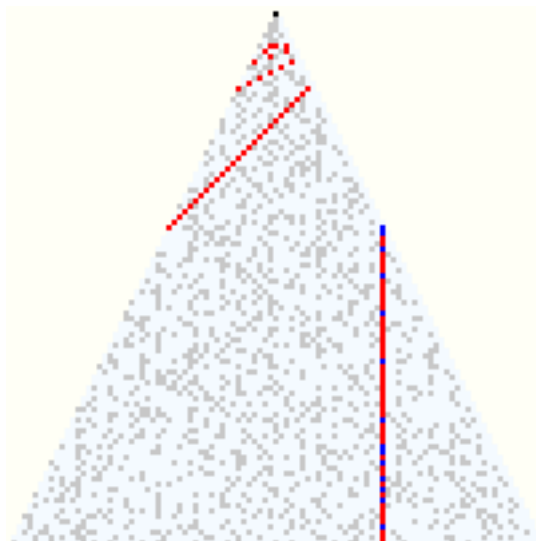
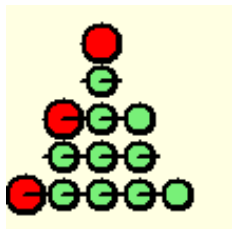
Kołami o mniejszym promieniu  
oznaczono liczby parzyste.



Rysunek 11. Punkty generowane przez "szczęśliwy" wielomian Eulera w standardowym trójkącie Klaubera.

### 3.5.2. Trójkąt Klaubera typu “choinka”, parametry bez zmian

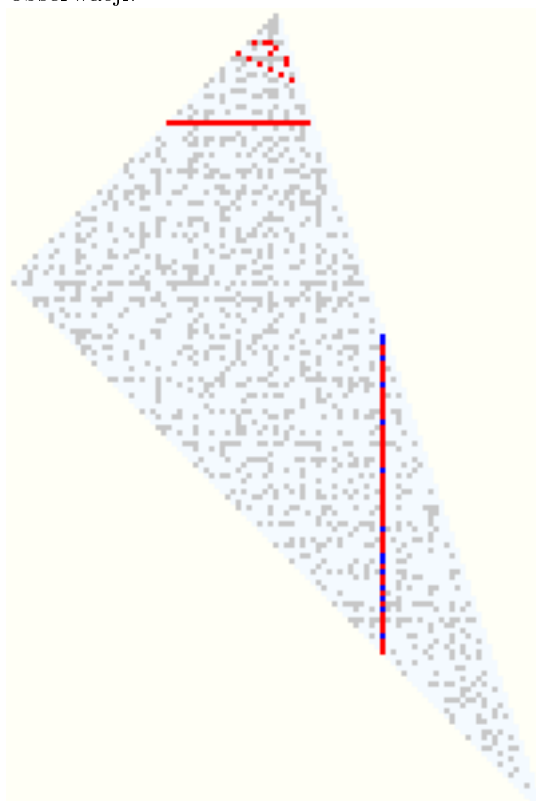
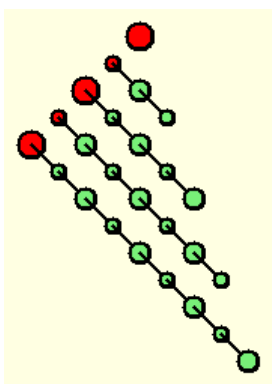
Parametry generujące nie ulegają zmianie, natomiast z rysunku usunięte zostają kolumny zawierające liczby parzyste. Powoduje to zmianę nachylenia linii zauważonych przez Klaubera, obecnie jest to kąt  $\alpha = \pm\pi/4$ .



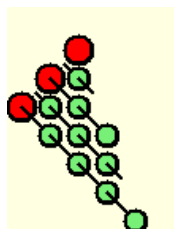
### 3.5.3. Trójkąt Klaubera typu “dadao”, parametry: [1,-1],[-1,-1],1,1

Przy takiej transformacji linie pionowe nie zmieniają swojej orientacji, natomiast część linii zauważonych przez Klaubera, oryginalnie nachylonych pod kątem  $\alpha = \arctg(\frac{1}{2})$ , posiadają teraz przebieg poziomy, co znakomicie poprawia warunki ich obserwacji.

Przed kompresją:

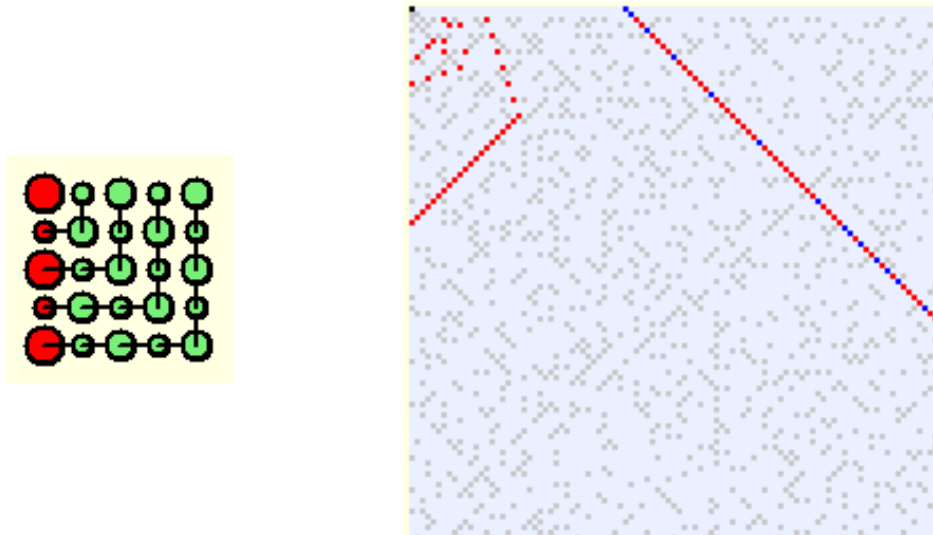


Po kompresji:



### 3.5.4. Skrzyżowanie trójkąta Klaubera i spirali Ulama, parametry: [1,0],[0,-1],1,0

Jest możliwe uzyskanie rozłożenia punktów na planie kwadratu (podobnie jak w spirali Ulama), lecz bez występowania efektu kalejdoskopu (tak jak w trójkącie Klaubera).



## 4. Dodatkowe serie w trójkącie Klaubera

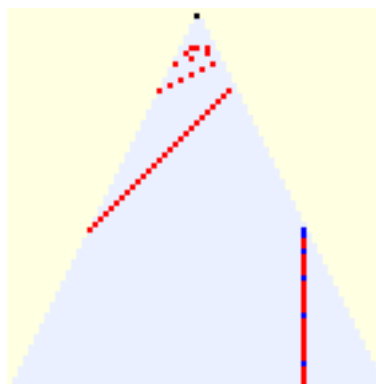
Sam Klauber zauważył jedynie te linie, które w trójkącie Klaubera typu “choinka” są pochylone pod kątami:

$$\alpha_1 = \pm \arctg(1) = \pm \pi/4$$

Przeoczył jednakowoż serie dla kątów:

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_n = \pm \arctg\left(\frac{1}{n}\right) \quad n = 2, 3, \dots, K$$

gdzie  $K$  jest liczebnością serii. Wzór na liczebność serii będzie podany w rozdziale 5.3. na str. 25.



Rysunek 12. Dodatkowe serie występujące w trójkącie Klaubera

Dla  $n > 1$  powód jest oczywisty: liczebność  $N_n$  reprezentujących je punktów jest znikoma w porównaniu z  $N_1$ . W szczególności dla wielomianu generującego Eulera :

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9} \qquad \frac{N_3}{N_1} = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$$

Z rozważań geometrycznych wynika, że dla wielomianu generującego:

$$P_{n,a} = n^2 + n + a$$

graniczny iloczyn miejsc w serii  $N_2$  i  $N_1$ , w których mogą wystąpić liczby pierwsze, wynosi:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left( \frac{N_2}{N_1} \right) = \frac{3}{14}$$

Natomiast dla serii  $N_0$  możemy się domyślać, że zapewne było to dla Klaubera zbyt oczywiste, by ogłaszać to odkrycie jako swój wkład w naukę.

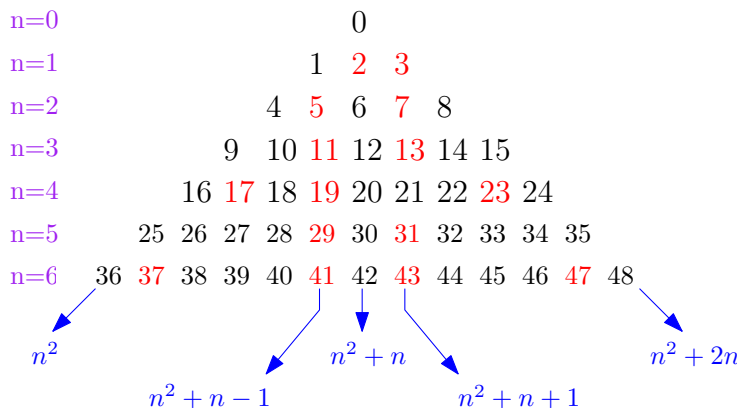
## 5. Warsztat iluzjonisty od kuchni

Upřednio (patrz rozdział 2.4. na str. 15) wykazano znaczne uproszczenia płynące ze stosowania trójkąta Klaubera zamiast spirali Ulama. Jednakże sam trójkąt Klaubera też nie do końca pozostaje wzorem przejrzystości. Pojawianie się pewnych regularności przypomina w nim raczej kuglarskie sztuczki. Czas zatem zajrzeć, co iluzjonista ukrywa w rękawie przed publicznością.

### 5.1. Skorygowanie trójkąta Klaubera

Zanim to nastąpi, należy zmodyfikować trójkąt Klaubera do postaci, która lepiej pasuje do nowej rzeczywistości.

Poprawka będzie drobna, ale radykalnie uprości dalsze rozważania. Konstrukcję trójkąta Klaubera wystarczy rozpocząć od liczby 0, a nie od 1.



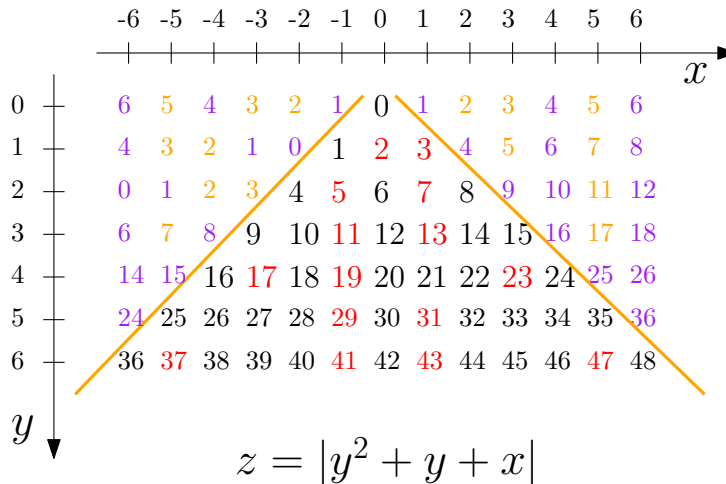
Rysunek 13. Nowa postać trójkąta Klaubera

Zalety takiej zmiany są dostrzegalne od razu:

- uproszczeniu ulegają wielomiany charakteryzujące linie w trójkącie Klaubera;
- związek geometryczny linii z opisującymi je wielomianami jest bardziej naturalny;
- rozkład liczb pierwszych w nowym trójkącie Klaubera jest znacznie bliższy symetrii.

## 5.2. Rozszerzenie dziedziny

Sposób rozszerzenia jest następujący:



Rysunek 14. Rozszerzenie dziedziny trójkąta Klaubera

Każdy wiersz w trójkącie Klaubera należy zastąpić nieskończonym ciągiem arytmetycznym, będącym przedłużeniem tego wiersza. Z powodów, które wkrótce staną się jasne, wartości ciągu zastąpiono ich wartościami bezwzględny.

## 5.3. Testowanie rozszerzonego trójkąta Klaubera

Testowanie będzie prowadzone przy pomocy generatora Eulera liczb pierwszych. Porównując powyższy rysunek z rys.11 zauważmy następujące prawidłowości:

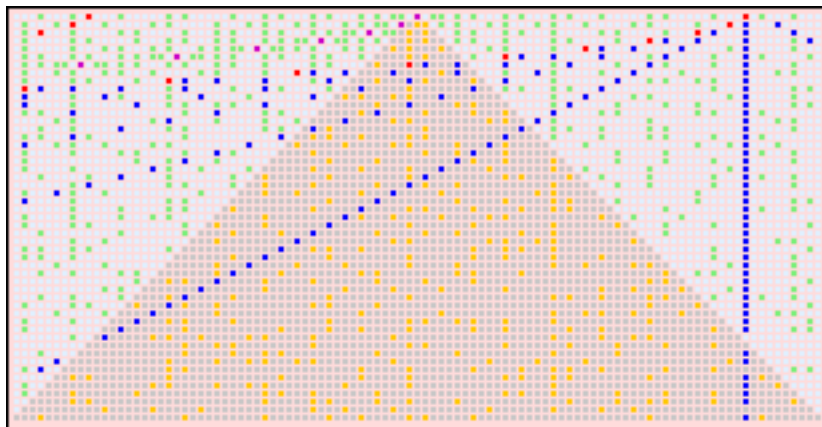
- Oryginalny trójkąt Klaubera pokazuje jedynie część z każdej serii;
- na rozszerzonym trójkącie Klaubera każda seria zaczyna się punktem na obwiedni paraboli  $x = y^2 + y + 41$  (punkty te oznaczono kolorem czerwonym);
- moduł każdej serii wyznaczony jest przez dwa kolejne czerwone punkty. Ponieważ leżą one na paraboli, zatem :

odstęp  $\Delta y$  jest stały i wynosi 1;

odstęp  $\Delta x$  zwiększa się o kolejną liczbę parzystą: 2, 4, ...

Rysunek ten umożliwi również określenie ilości serii przechodzących przez trójkąt Klaubera. Dla generatora "szczęśliwych" liczb Eulera:

$$K_{41} = 6 \leq \sqrt{41}$$



Rysunek 15. Test generatorem liczb pierwszych Eulera

Oczywiście dla każdego innego generatora w postaci  $n^2 + n + a$ , liczebność serii będzie wynosić:

$$K_a \leq \sqrt{a}$$

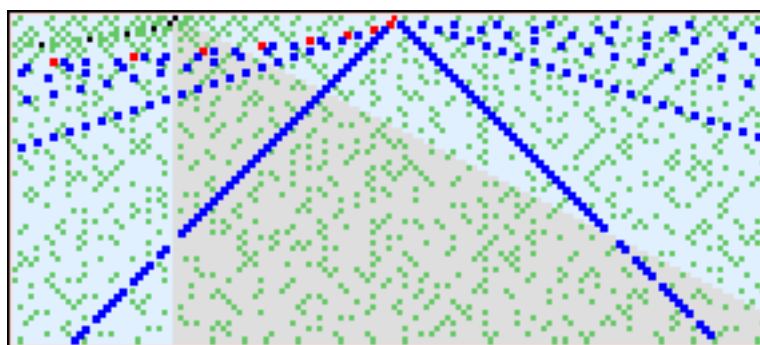
## 6. Inne postacie generatorów liczb pierwszych

### 6.1. Wielomiany stopnia drugiego

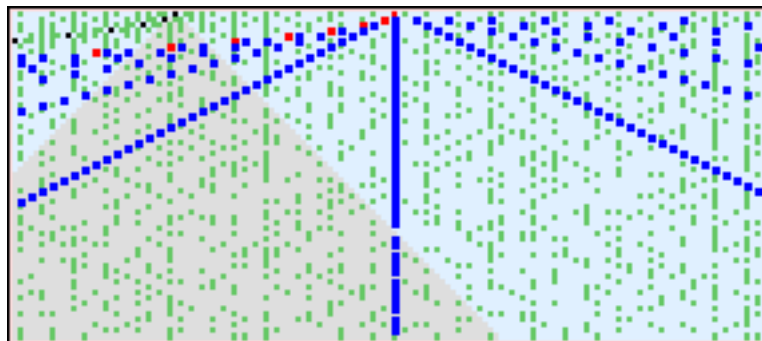
Przedstawmy kilka wykresów, odpowiadających generatorom w ogólnej postaci:

$$z = |y^2 + ky + x|$$

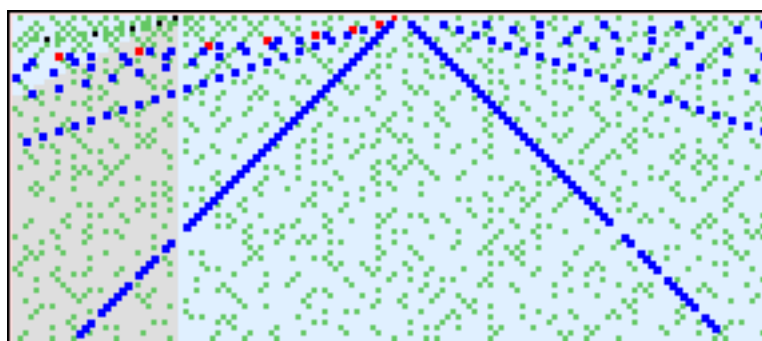
Na wszystkich wykresach szarym kolorem oznaczono powierzchnię zajmowaną przez trójkąt Klaubera.

Rysunek 16. Liczby pierwsze uzyskane generatorem  $y^2 + x$ 

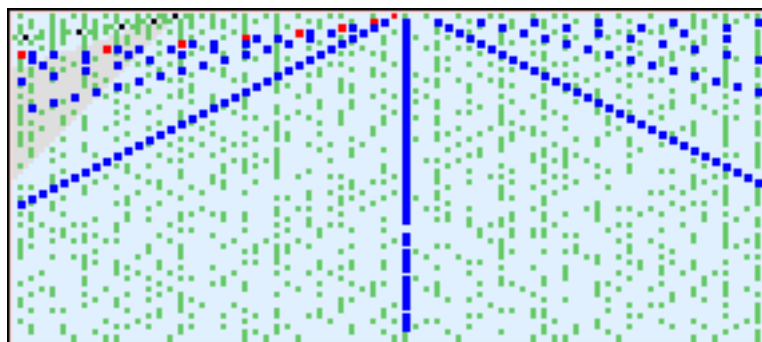
Dla  $k$  parzystych dominującym miejscem występowania liczb pierwszych są linie ukośne, natomiast dla  $k$  nieparzystych są to linie pionowe. Poza tym wykresy są niemal identyczne, linie charakterystyczne są jedynie nieznacznie przesunięte.



Rysunek 17. Liczby pierwsze uzyskane generatorem  $y^2 + y + x$



Rysunek 18. Liczby pierwsze uzyskane generatorem  $y^2 + 2y + x$



Rysunek 19. Liczby pierwsze uzyskane generatorem  $y^2 + 3y + x$

Ostatecznym wnioskiem jest niecelowość poszukiwania  $k$  dającego lepszy generator, gdyż prawie wszystkie uzyskane wartości liczb pierwszych (z wyjątkiem skończonej ilości wyrazów początkowych) są identyczne.

## 6.2. Wielomiany stopnia trzeciego

Przyjrzyjmy się ciągowi:

$$n^3 - n = n(n-1)(n+1) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Każdy jego element jest podzielny bez reszty przez 6, ponieważ jest zarówno liczbą parzystą, jak i podzielną przez 3. Identyczną cechę będą posiadały również ciągi:

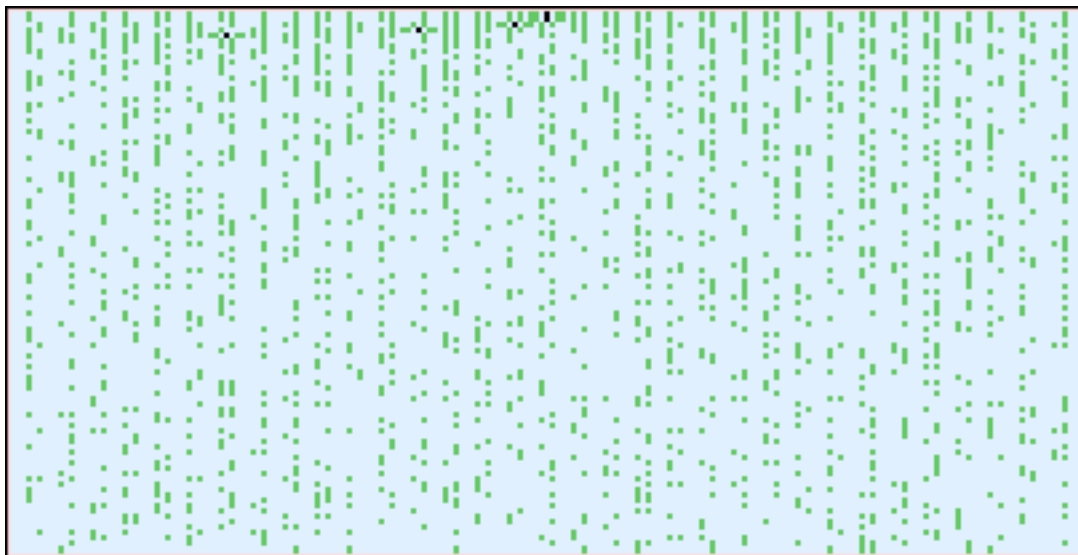
$$\mathcal{G} = n^3 - n + 6(kn^2 + l) \quad k, l \in \mathbb{C}$$

gdzie  $k, l$  są dowolnymi liczbami całkowitymi. Jest oczywiste, że w ciągu tym nie występują liczby pierwsze. Nie występują one także w ciągach  $\mathcal{G} + 2$  i  $\mathcal{G} + 4$  (gdyż zawierają one liczby parzyste), oraz  $\mathcal{G} + 3$  (podzielność przez 3). Zatem liczby pierwsze mogą występować jedynie w ciągach  $\mathcal{G} + 1$  i  $\mathcal{G} + 5$ .

Oto wyniki testu dla generatora

$$z = |y^3 - y + x|$$

na wykresie analogicznym do rozszerzonego trójkąt Klaubera:



Rysunek 20. Liczby pierwsze wśród liczb uzyskanych generatorem  $|y^3 - y + x|$

Zauważmy okresowe powtarzanie się kolumn zawierających liczby pierwsze (które odpowiadają ciągom  $\mathcal{G} + 1$  i  $\mathcal{G} + 5$ ), rozdzielone pustymi kolumnami o szerokości na przemian jednego piksela (dla ciągu  $\mathcal{G}$ ) i trzech pikseli (dla  $\mathcal{G} + 2$ ,  $\mathcal{G} + 3$  i  $\mathcal{G} + 4$ ), gdzie nie występują liczby pierwsze.

Posiadanie predyspozycji do zawierania znacznej ilości liczb pierwszych nie gwarantuje wszelako należenia do grupy rekordzistów. Komputerowe sprawdzenie rodziny wielomianów:

$$z = |y^3 + ay^2 + by + c|, \quad a, b \in \langle -17, 17 \rangle \quad c \in \langle -200, 200 \rangle, \quad y \in \langle 0, 400 \rangle$$



wykazało dominację wielomianu  $z = |y^3 - 10y^2 - 13y + 1|$ , który daje 200 liczb pierwszych na 401 możliwych.

## 7. Podsumowanie

Powyżej pokazano, skąd biorą się osobliwe serie widoczne w trójkącie Klaubera i spirali Ulama - są to odwzorowania punktów na płaszczyźnie, tworzonych przez generatory mające postać kwadratowych wielomianów. Nie ma natomiast ani słowa o tym, jak powinien wyglądać dobry generator, czy choćby o tym, dlaczego jeden generator jest lepszy od drugiego. Ten problem nadal czeka na swego odkrywcę, wraz ze znaczną nagrodą za powyższe dokonanie.

## Literatura

1. S.M. Ulam, M.L. Stein, M.B. Wells, *A Visual Display of Some Properties of the Distribution of Primes*. American Mathematical Monthly (71), ss. 516–520, 1964
2. Wikipedia  
*Laurence Monroe Klauber*.  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Laurence\\_Monroe\\_Klauber](https://en.wikipedia.org/wiki/Laurence_Monroe_Klauber), dostęp 2019-XI
3. Wikipedia  
*Formula for primes*.  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Formula\\_for\\_primes](https://en.wikipedia.org/wiki/Formula_for_primes), dostęp 2019-XI
4. Clay Mathematics Institute  
*Riemann Hypothesis*.  
<http://www.claymath.org/millennium-problems/riemann-hypothesis>, dostęp 2019-XI