

**ANALIZA RYZYKA KOLIZJI STATKÓW
POWIETRZNYCH W KONTROLOWANEJ
PRZESTRZENI POWIETRZNEJ**

**ANALYSIS OF THE AIRPLANES COLLISION RISK
IN THE CONTROLLED AIR SPACE**

Jerzy Lewitowicz, Krzysztof Sajda

Instytut Techniczny Wojsk Lotniczych
ul. Ks. Bolesława 6, 01-494 Warszawa

***Abstract:** One of the very important issues in the field of fly safety problems, strictly connected with navigation matter, is the risk of an air collision problem because every single air collision in the air causes two crashes. There are RNP RNAV requirements for the elements of an air traffic control system, including radionavigation system, are presented in the article. The Reich's model of the collision used for estimating the probability of the air collision is presented as well. Moreover a model of the distribution of a plane error position, a mixed probability density function model consisting of the generalized Laplace core and double exponential tail is described in the paper.*

***Key words:** fly safety, air traffic control, probability of the air collision,*

***Streszczenie:** Jednym z bardzo ważnych zagadnień ze względu na bezpieczeństwo lotu, ściśle powiązanych z nawigacją, jest problem ryzyka wystąpienia kolizji w przestrzeni powietrznej, ponieważ następstwem każdej pojedynczej kolizji są dwie katastrofy. W pracy zaprezentowano wymagania, jakie są nakładane na elementy biorące udział w procesie kontroli ruchu powietrznego, a zatem również na systemy nawigacyjne, spełniające warunki RNP RNAV oraz przybliżono model Reicha pozwalający na szacowanie ryzyka wystąpienia kolizji samolotów. Ponadto przedstawiono model funkcji gęstości prawdopodobieństwa błędu pozycji samolotu będący kombinacją uogólnionego rozkładu Laplace'a oraz rozkładu podwójnie wykładniczego.*

***Słowa kluczowe:** bezpieczeństwo lotu, kontrola przestrzeni powietrznej, prawdopodobieństwo wystąpienia kolizji w powietrzu*

1. WPROWADZENIE

W procesie kontroli ruchu lotniczego wyróżnia się: statki powietrzne, lotniska, systemy nawigacyjne, informacje różnych służb lotniczych, w tym meteorologiczne, przepisy i procedury wykonywania lotu, łączność, urządzenia kontroli ruchu lotniczego oraz wyposażenie naziemne. Złożoność tych elementów zmienia się w zależności od czasu, miejsca, stanu, umiejętności, natężenia ruchu, warunków atmosferycznych, itp. Zarząd ruchu lotniczego operuje tymi składnikami tak, aby zapewnić bezpieczny, zgodny z planem, szybki przelot samolotów w przestrzeni powietrznej.

Tam, gdzie natężenie ruchu jest małe, potrzebne jest minimum kontroli sytuacji ruchowej, ponieważ stosowane przez pilota standardowe prawa i procedury wraz z naziemnymi pomocami nawigacyjnymi mogą wystarczać do bezpiecznego startu, lotu i lądowania. W obszarach przestrzeni powietrznej o dużym natężeniu ruchu lotniczego (rys. 1) wykorzystuje się scentralizowaną kontrolę sytuacji w tych obszarach. Taka scentralizowana kontrola tworzy system Kierowania Ruchem Lotniczym (KRL), która może być określana jako służba przewidziana do spełnienia wymagań planów lotów użytkowników tak dalece jak to jest możliwe przy utrzymaniu warunków bezpiecznego i wydajnego użytkowania przestrzeni powietrznej i urządzeń naziemnych [5].

Ciągły wzrost ruchu lotniczego na świecie musi uwzględniać ograniczoną pojemność jaką oferuje przestrzeń powietrzna. Ten czynnik, wspólnie z dokładnością, jaką oferują nowoczesne systemy nawigacyjne oraz wymagania podnoszenia efektywności operacyjnej systemu transportu powietrznego w kwestii bezpośrednich połączeń i dokładnego zachowania planowanej pozycji, zaowocowały stworzeniem koncepcji wymagań na systemy nawigacyjne (pokładowe i naziemne) określanej mianem RNP¹.

Wymagania RNP określają żadaną dokładność prowadzenia nawigacji w zdefiniowanej przestrzeni powietrznej. RNP zawiera zarówno wymagania dotyczące parametrów, jak również wymagania funkcjonalne, które muszą być spełnione przez konstruktorów, wytwórców i instalatorów wyposażenia awionicznego, ale także dostawców usług nawigacyjnych i użytkowników systemów nawigacyjnych.

Osiągnięcie dokładności nawigacji definiowanej typem RNP wymaga spełnienia wymagań zarówno przez systemy pokładowe jak i infrastrukturę i system naziemny. Kiedy dana przestrzeń powietrzna spełnia wymagania danego typu RNP-x, oznacza to, że używane w tym obszarze systemy pokładowe i środki naziemne zapewniają żądany poziom dokładności prowadzenia nawigacji. A to oznacza, że całkowity błąd systemu (TSE²) dla tej przestrzeni powietrznej przez 95% czasu lotu nie przekracza podanej wartości „x” (wyrażonej w milach

¹ Ang. Required Navigation Performance

² Ang. Total System Error

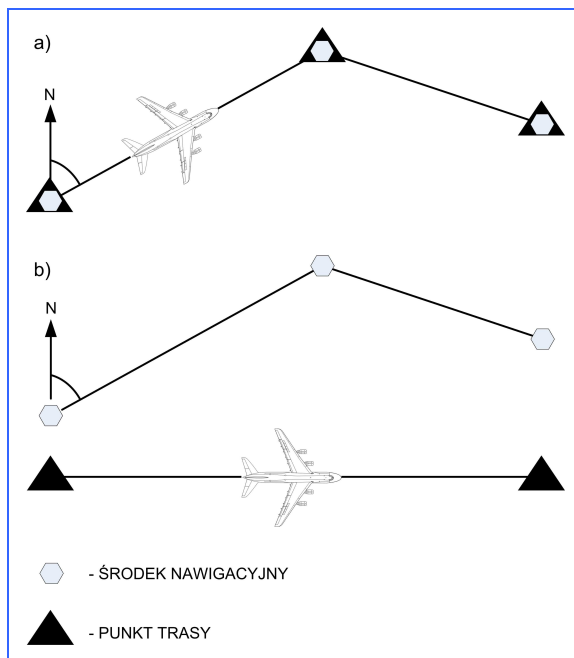
morskich - Nm) w kierunku poprzecznym i podłużnym względem trasy lotu [7].



Rys. 1. Natężenie ruchu lotniczego nad Nowym Jorkiem w ciągu jednego dnia [13]

Systemy pokładowe spełniające wymagania RNP nie posiadają żadnych elementów monitorujących, czy system nie przekracza dopuszczalnego błędu. Nadzór nad dokładnością nawigacji jest sprawowany w ramach całości systemu przez służby KRL. W przestrzeni powietrznej spełniającej wymagania RNP wymagane jest, aby loty odbywały się według procedur i po trasach wyznaczonych przez nawigacyjne naziemne punkty odniesienia. Innymi słowy, wszystkie trasy lotu muszą przebiegać „ponad” naziemnymi punktami nawigacyjnymi (rys. 2a). Innym sposobem nawigacji jest tzw. nawigacja obszarowa RNAV³ (rys. 2b). Jest to metoda nawigacji, która pozwala statkowi powietrznemu wykonywać lot po dowolnej trasie znajdującej się w zasięgu działania nawigacyjnych sygnałów referencyjnych lub w granicach obszaru na jaki pozwalają mu zainstalowane na pokładzie autonomiczne środki nawigacyjne lub też kombinacja dwóch wymienionych [1, 8]. Najnowocześniejsze pokładowe systemy RNAV dostarczają załozdze nie tylko informację nawigacyjną, ale również monitorują jakość i wiarygodność sygnałów nawigacyjnych, a także ostrzegają o przekroczeniu dopuszczalnych wartości błędów systemu.

³ Ang. Area Navigation



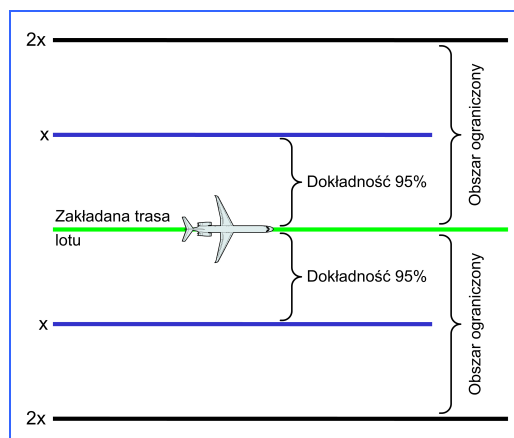
Rys. 2. Nawigacja RNP (a) i RNAV (b)

Połączeniem obydwu sposobów nawigacji jest nawigacja typu RNP-x RNAV. Jest to sposób nawigacji wykorzystujący zalety „dowolności” ustalania tras lotu zgodnie z założeniami nawigacji obszarowej i zasady oraz wymagania RNP.

W celu określenia własności systemu nawigacji spełniającego wymagania RNP-x RNAV wprowadzono pojęcie „obszaru ograniczonego”⁴ określanego w sposób przedstawiony na rys. 3, na którym przez parametr „x” oznaczono wartość błędu TSE systemu. „Obszar ograniczony” obejmuje ten fragment przestrzeni, w którym prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia polegającego na zboczeniu z zakładanej trasy lotu o wartość większą niż „2x” bez generowania ostrzeżenia jest mniejsze niż 10^{-5} na godzinę lotu.

A zatem w przypadku nawigacji zgodnie z wymaganiami RNP-x RNAV można mówić o dwóch kluczowych parametrach: błędzie całkowitym systemu TSE, który przez 95% czasu lotu nie może przekraczać wartości parametru „x” określonej dla danej przestrzeni RNP oraz przez prawdopodobieństwo wyjścia z „obszaru ograniczonego”, które musi być mniejsze niż 10^{-5} na godzinę lotu.

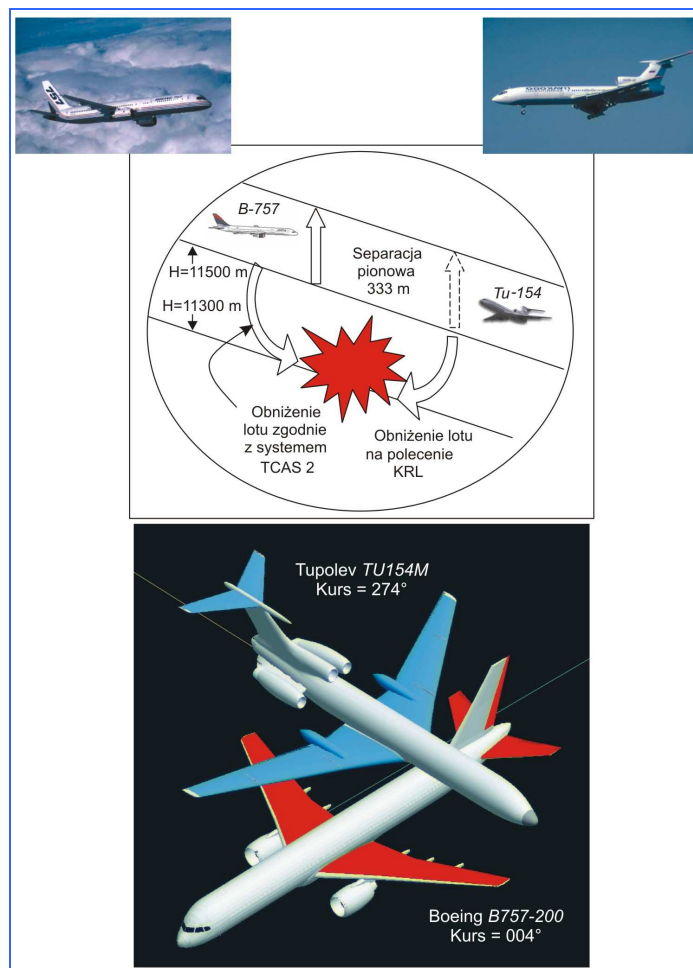
⁴ Ang. containment region



Rys. 3. Obszar ograniczony w nawigacji RNP-RNAV

2. RYZYKO KOLIZJI SAMOLOTÓW W PRZESTRZENI POWIETRZNEJ

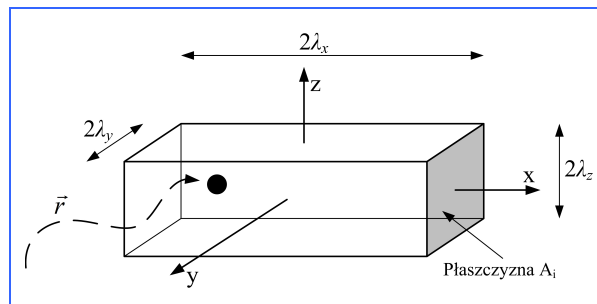
Problem ryzyka wystąpienia kolizji w przestrzeni powietrznej jest bardzo ważnym zagadnieniem ze względu na bezpieczeństwo, ponieważ następstwem każdej pojedynczej kolizji są dwie katastrofy. Przykładem takiego zdarzenia jest opisana w [6] katastrofa lotnicza, w której uczestniczyły dwa samoloty: pasażerski *Tu-154* i przystosowany do przewozu towarów *Boeing B-757-200* (rys. 4). Katastrofa wydarzyła się 1 lipca 2002 r. o godzinie 23:36 nad Jeziorem Bodeńskim jeszcze nad terytorium Niemiec, niedaleko granicy szwajcarskiej, po przejściu kontroli lotu samolotu *Tu-154* przez szwajcarskie KRL. Szczegółowe śledztwo wykazało, że w szwajcarskiej obsadzie KRL, w momencie katastrofy pracował jeden pracownik bardzo obciążony informacjami (a powinno być 2-5 osób), który z opóźnieniem zareagował na powstałą sytuację kolizyjną. Niewłaściwie wykorzystano informacje z pokładowego systemu ostrzegania o niebezpiecznym zbliżaniu się samolotów w powietrzu TCAS 2. Piloci obydwu samolotów obniżyli lot z pułapu 11500 m na 11300 m. Pilot samolotu *B-757* (poprawnie) zinterpretował informację z TCAS 2, a pilot samolotu *Tu-154* obniżył lot w wyniku polecenia służby KRL. Pilot ten wykonał manewr sprzeczny ze wskazaniem swojego systemu TCAS 2, według którego powinien zwiększyć wysokość lotu. Przeprowadzone szczegółowe śledztwo wykazało kilka innych bardzo poważnych niedociągnięć, które doprowadziły do katastrofy. Zginęło łącznie 71 osób (w tym 52 dzieci z samolotu *Tu-154*).



Rys. 4. Szkic sytuacyjny zderzenia samolotów B-757-200 i Tu-154 w dniu 1 listopada 2002 r. oraz sylwetki tych samolotów (Raport Komisji Badań Katastrofy) [6]

W przestrzeni powietrznej, w której występuje duże zagęszczenie ruchu lotniczego kluczowym parametrem jaki musi być brany pod uwagę przy planowaniu tras przelotów jest separacja przestrzenna pomiędzy statkami lotniczymi. Najczęstszym sposobem oszacowania tego parametru jest wykorzystanie modelu ryzyka kolizji. Jednym z takich modeli, opisanym m.in. w [3, 4, 8, 11, 12, 13], jest model opracowany w 1966 r. i nazwany od nazwiska jego twórcy modelem Reicha. Model ten został opracowany w celu oszacowania ryzyka wystąpienia kolizji w ruchu transoceanicznym nad Oceanem Atlantyckim oraz ustalenia bezpiecznych (na określonym poziomie prawdopodobieństwa) separacji pomiędzy samolotami wykonującymi loty na tych trasach.

W modelu przyjmuje się kilka założeń. Niech $\vec{r}_1(t)$ i $\vec{v}_1(t)$ są wektorami określającymi położenie i prędkość jednego samolotu w danej chwili t , oraz niech $\vec{r}_2(t)$ i $\vec{v}_2(t)$ będą odpowiednio wektorami położenia i prędkości drugiego samolotu w tej samej chwili t . W celu większej przejrzystości zapisów pomija się indeks t pamiętając, że wymienione wielkości i będące z nimi w relacji inne wielkości są związane z czasem. Dalej, niech $\vec{r} \equiv (r_x, r_y, r_z) \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ i $\vec{v} \equiv (v_x, v_y, v_z) \equiv \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ oznaczają wektory względnej pozycji i względnej prędkości tych dwu samolotów. W funkcji czasu wektor \vec{r} kreśli pewną trajektorię w przestrzeni (rys. 5). Kiedy wektor \vec{r} staje się „zbyt mały”, wtedy następuje kolizja pomiędzy samolotami. Matematycznie oznacza to, że jeśli $\vec{r} = (0,0,0)$, to środek masy każdego z samolotów znajduje się w tym samym punkcie przestrzeni.

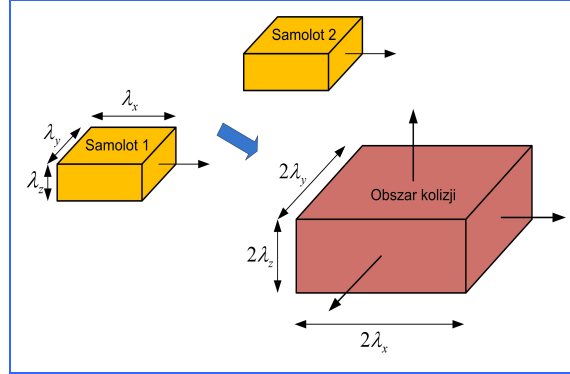


Rys. 5. Geometryczna reprezentacja modelu Reicha

W modelu Reicha samolot można przedstawić prostopadłościan o krawędziach równych λ_x (długość – wymiar równoległy do kierunku toru lotu), λ_y (szerokość – wymiar prostopadły do kierunku toru lotu i leżący w płaszczyźnie poziomej), λ_z (wysokość – wymiar prostopadły do kierunku toru lotu i leżący w płaszczyźnie pionowej). Przyjmując te założenia, dwa samoloty spotykają się w przestrzeni (nastąpi kolizja), kiedy, np. samolot numer 1 będzie znajdował się za samolotem numer 2 w odległości mniejszej lub równej λ_x lub też kiedy samolot numer 1 będzie się znajdował przed samolotem numer 2 w odległości mniejszej lub równej λ_x , co można zapisać w postaci warunku (dla osi x):

$$-\lambda_x \leq r_x \leq \lambda_x$$

Mówiąc ogólnie, kolizja może nastąpić w każdej osi wtedy, kiedy \vec{r} znajdzie się wewnątrz (lub na powierzchni ścian) prostopadłościanu o bokach $2\lambda_x \times 2\lambda_y \times 2\lambda_z$ umieszczonego w początku układu współrzędnych (rys. 6). Zjawisko takie nosi nazwę spotkania.



Rys. 6. Graficzna interpretacja modeli samolotów i obszaru kolizji według modelu Reicha

Prawdopodobieństwo spotkania określa łączna gęstość prawdopodobieństwa wektorów losowych położenia i prędkości względnej samolotów $f(\vec{r}, \vec{v}) \equiv f(r_x, r_y, r_z, v_x, v_y, v_z)$. Dalsza analiza problemu wymaga następujących założeń upraszczających:

1. Współrzędne wektorów losowych położenia i prędkości względnej są zmiennymi losowymi niezależnymi dla każdej z osi układu współrzędnych, tzn.:

$$f(r_x, r_y, r_z, v_x, v_y, v_z) = f_x(r_x, v_x) \cdot f_y(r_y, v_y) \cdot f_z(r_z, v_z) \quad (1)$$

gdzie: f_x, f_y, f_z są gęstościami brzegowymi.

2. Gęstość prawdopodobieństwa wektora losowego opisującego położenie punktu jest stała wewnątrz obszaru symbolizującego samolot, tzn.:

$$f_x(r_x, v_x) = f_x(0, v_x), \text{ dla } |r_x| \leq \lambda_x \quad (2)$$

i podobnie dla pozostałych współrzędnych. To założenie można tłumaczyć tym, że nie należy oczekiwać, aby gęstość prawdopodobieństwa zmieniała się znacznie podczas zmian położenia punktu o wielkości porównywalne z wymiarami samolotu.

3. Współrzędne wektorów losowych położenia i prędkości względnej są wzajemnie niezależne, tzn.:

$$f_x(r_x, v_x) = f_{r,x}(r_x) \cdot f_{v,x}(v_x) \quad (3)$$

i podobnie dla pozostałych współrzędnych.

Założenia 1, 2 i 3 implikują [12]:

$$f(r_x, r_y, r_z, v_x, v_y, v_z) = f_{r,x}(0) \cdot f_{r,y}(0) \cdot f_{r,z}(0) \cdot f_{v,x}(v_x) \cdot f_{v,y}(v_y) \cdot f_{v,z}(v_z) \quad (4)$$

dla każdej sytuacji, kiedy wektor losowy \vec{r} znajduje się na granicy lub wewnątrz obszaru kolizji.

4. Samoloty poruszają się po prostoliniowych trasach bez wykonywania zakrętów i zwrotów. Zatem orientacja przestrzenna obszaru kolizji nie ulega zmianie.
5. Wszystkie samoloty mają taki sam kształt geometryczny (są modelowane przy pomocy obszarów przestrzeni o takich samych wymiarach dla wszystkich samolotów).
6. Nie uwzględnia się manewrów korygujących lot wynikających z działania pilota lub innych elementów sterujących i kontrolujących.

Przyjęcie założeń upraszczających podanych w punktach 1÷6 pozwala na podanie zależności na liczbę kolizji (na godzinę lotu) w wyniku utraty separacji poziomej pomiędzy dwoma samolotami wykonującymi lot po sąsiednich trasach [4, 8] (rys. 7):

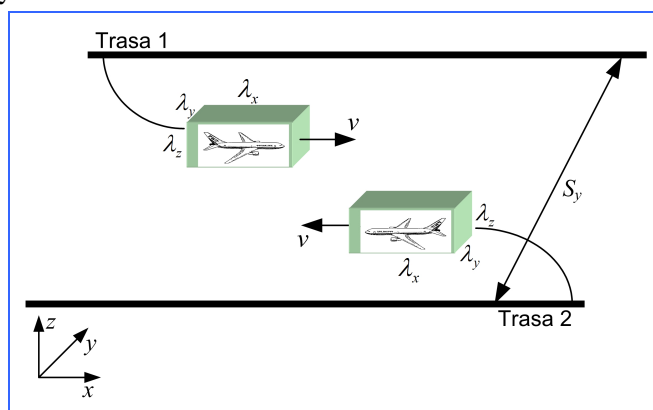
$$N_{ay} = P_y(S_y) \cdot P_z(0) \cdot \left\{ N_y(s) \cdot \left[1 + \frac{\lambda_x}{v_{rx}(s)} \cdot \left(\frac{v_{ry}}{\lambda_y} + \frac{v_{rz}}{\lambda_z} \right) \right] + N_y(o) \cdot \left[1 + \frac{\lambda_x}{v_{rx}(o)} \cdot \left(\frac{v_{ry}}{\lambda_y} + \frac{v_{rz}}{\lambda_z} \right) \right] \right\} \quad (5)$$

gdzie:

- N_{ay} - liczba kolizji w wyniku utraty separacji poziomej pomiędzy dwoma samolotami;
- S_y - minimalna separacja pozioma (lateralna);
- $P_y(S_y)^5$ - prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia polegającego na tym, że pozioma separacja samolotów wykonujących lot na sąsiednich trasach (nominalnie wynosząca S_y) będzie równa lub mniejsza niż λ_y ;
- $P_z(0)$ - prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia polegającego na tym, że pionowa separacja samolotów wykonujących lot po tej samej trasie będzie równa lub mniejsza niż λ_z ;
- $N_y(s)$ - częstotliwość mijania się samolotów wykonujących lot na sąsiednich trasach i w tym samym kierunku;
- $N_y(o)$ - częstotliwość mijania się samolotów wykonujących lot na sąsiednich trasach i w przeciwnych kierunkach;
- $v_{rx}(s)$ - prędkość względna samolotów wykonujących lot w tym samym kierunku (składowa prędkości w osi x);

⁵ Ang. lateral overlap probability

- $v_{rx}(o)$ - prędkość względna samolotów wykonujących lot w przeciwnych kierunkach (składowa prędkości w osi x);
 v_{ry} - składowa y prędkości względnej samolotów;
 v_{rz} - składowa z prędkości względnej samolotów;
 λ_x - długość samolotu;
 λ_y - szerokość samolotu;
 λ_z - wysokość samolotu.



Rys. 7. Graficzna interpretacja kolizji samolotów

3. MODELOWANIE FUNKCJI GĘSTOŚCI ROZKŁADU PRAWDOPODOBIEŃSTWA LATERALNEGO (BOCZNEGO) NAKŁADANIA SIĘ TRAS SAMOLOTÓW

Prawdopodobieństwo lateralnego nakładania się tras samolotów

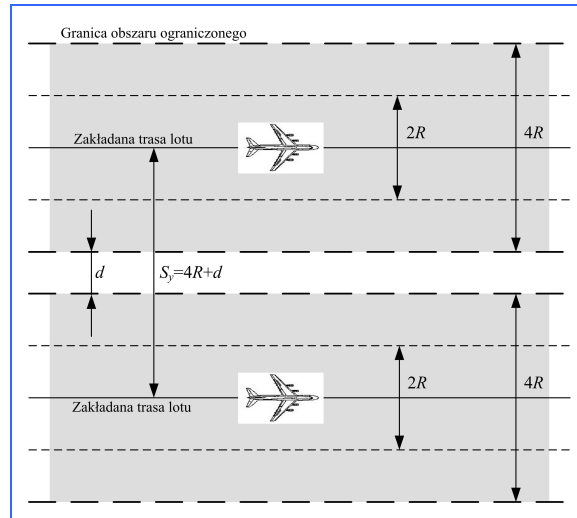
Prawdopodobieństwo lateralnego (bocznego) nakładania się tras samolotów jest krytycznym parametrem z punktu widzenia szacowania ryzyka kolizji samolotów wykonujących loty na równoległych trasach. Prawdopodobieństwo to może być szacowane na podstawie funkcji gęstości prawdopodobieństwa błędów pozycji samolotów odbywających loty na analizowanych trasach [8, 10].

Wzajemne usytuowanie samolotów wykonujących lot na tej samej wysokości po sąsiednich trasach, w przestrzeni powietrznej spełniającej warunki RNP-R-RNAV, schematycznie przedstawiono na rys. 8, na którym:

R - oznacza parametr RNP określający maksymalny błąd TSE systemu, który nie może być przekroczony przez 95% czasu trwania lotu;

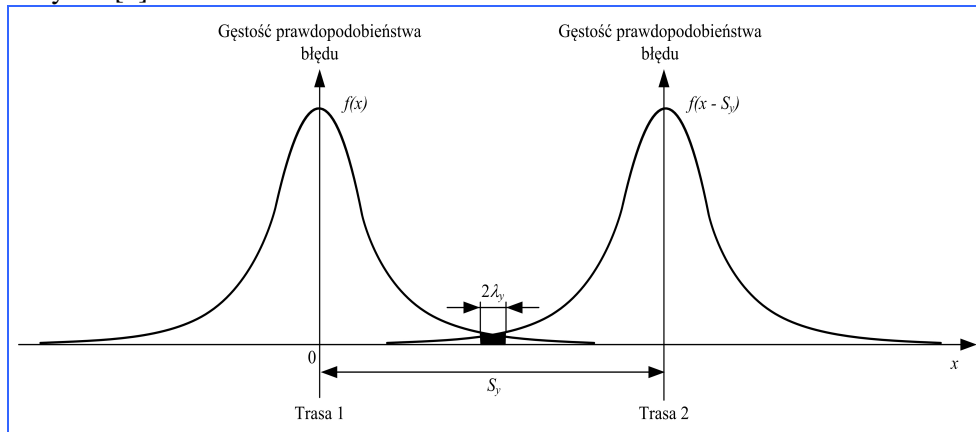
d - szerokość bufora oddzielającego dwa sąsiednie obszary ograniczone ($d \geq 0$);

$S_y = 4R + d$ - zakładana separacja pozioma pomiędzy trasami lotu.



Rys. 8. Układ równoległych tras samolotów wykonujących lot na tej samej wysokości w przestrzeni RNP RNAV

Dla przedstawionego usytuowania samolotów funkcje gęstości prawdopodobieństwa błędów pozycji na sąsiednich trasach oraz prawdopodobieństwo nakładania się sąsiednich tras lotów można przedstawić jak na rys. 9 [8].



Rys. 9. Graficzna interpretacja prawdopodobieństwa nakładania się sąsiednich tras lotów

Zgodnie z rysunkiem 9 oraz założeniami modelu Reicha kolizji samolotów, zależność na prawdopodobieństwo bocznej kolizji samolotów wykonujących lot na sąsiednich trasach możemy zapisać w postaci [3, 8, 9, 10]:

$$P_y(S_y) = \int_{S_y - \lambda_y}^{S_y + \lambda_y} C(z) dz \quad (6)$$

gdzie:

- S_y - zakładana separacja pozioma pomiędzy trasami;
 λ_y - przeciętna szerokość (rozpiętość skrzydeł) samolotu;

oraz:

$$C(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(x-z)dx \quad (7)$$

oznacza gęstość prawdopodobieństwa nakładania się tras samolotów, natomiast $f(x)$ i $f(x-z)$ oznaczają funkcje gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej X będącej błędem pozycji samolotów na równoległych trasach.

Jeżeli $f(x)$ jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej X będącej błędem pozycji samolotu, natomiast $F(x)$ jej dystrybuantą, to z uwagi na wymagania przestrzeni powietrznej typu RNP RNAV o parametrze R muszą być spełnione następujące wymagania:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx \quad (8)$$

$$F(R) - F(-R) = 1 - 0,05 \quad (9)$$

$$F(2R) - F(-2R) = 1 - \gamma_2 \quad (10)$$

$$F(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \quad (11)$$

gdzie $\gamma_2 = 10^{-5}$ /godz. lotu oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że w ciągu godziny w wyniku błędnego działania systemu nawigacyjnego samolot zbczy z wyznaczonej trasy o więcej niż $2R$ i załoga nie zostanie o tym fakcie ostrzeżona.

Wymagania określone zależnościami (9) i (10) można również zapisać w postaci:

$$\int_{-R}^R f(x)dx = 0,95 \quad (12)$$

$$\int_{-2R}^{2R} f(x)dx = 1 - \gamma_2 \quad (13)$$

Zależności (9) i (12) związane są z wymaganiem na dokładność systemu nawigacji, tj. 95% czasu lotu z błędem TSE nie większym niż parametr R .

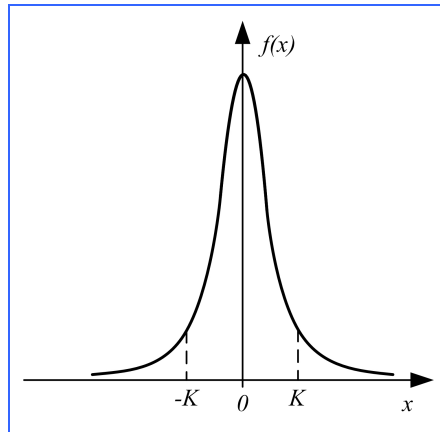
Niech funkcja gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$ błędu pozycji samolotu na zakładanej trasie posiada następujące własności (rys. 10):

- (i) Posiada jedno maksimum znajdujące się w punkcie $x = 0$;
- (ii) Jest parzysta, tzn. $f(x) = f(-x)$;

(iii) Jest silnie skoncentrowana w rejonie tzw. jądra⁶ rozkładu, tzn.:

$$\int_{-K}^K f(x)dx \cong 1 \quad \text{oraz} \quad \int_{|K|} f(x)dx \ll 1 \quad (14)$$

(iv) Jest monotonicznie malejąca w obszarze tzw. ogona⁷ rozkładu, tzn. dla $|x| > K$



Rys. 10. Założenia na postać funkcji gęstości prawdopodobieństwa błędu X

Podstawiając (7) do (6) i korzystając z twierdzenia o wartości średniej całki oznaczonej [2] oraz pamiętając o własności (2) możemy zapisać [8]:

$$P_y(S_y) = \int_{S_y - \lambda_y}^{S_y + \lambda_y} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot f(x-z) dx dz \approx 2\lambda_y \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot f(x-S_y) dx \quad (15)$$

Oznaczając całkę niewłaściwą w wyrażeniu (15) przez $C(S_y)$ i pamiętając, że funkcje $f(x)$ i $f(x-S_y)$ są symetryczne oraz korzystając z własności (iii) możemy dalej zapisać:

⁶ Ang. core region

⁷ Ang. tail

$$\begin{aligned}
C(S_y) &= 2 \int_{-\infty}^{\frac{S_y}{2}} f(x) \cdot f(S_y - x) dx = \\
&= 2 \left[\int_{-\infty}^{-K} f(x) \cdot f(x - S_y) dx + \int_{-K}^K f(x) \cdot f(x - S_y) dx + \int_K^{\frac{S_y}{2}} f(x) \cdot f(x - S_y) dx \right] \approx (16) \\
&\approx 2 \int_{-K}^K f(x) \cdot f(x - S_y) dx
\end{aligned}$$

Następnie rozwijając jedną z funkcji w wyrażeniu podcałkowym w szereg Taylora oraz korzystając z własności (iv) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\int_{-K}^K f(x) \cdot f(S_y - x) dx &= \int_{-K}^K f(x) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(S_y) dx = \\
&= \int_{-K}^K f(x) \cdot \left[f(S_y) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(S_y) \right] dx \leq \\
&\leq \int_{-K}^K f(x) \cdot \left[f(S_y) \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K^k \cdot f^{(k)}(S_y)}{f(S_y)} \right) \right] dx \approx \\
&\approx f(S_y) \cdot \int_{-K}^K f(x) dx
\end{aligned} \tag{17}$$

Ostatecznie korzystając z własności (14) otrzymuje się [8]:

$$P_y(S_y) \approx 4\lambda_y \cdot f(S_y) \tag{18}$$

Powyższa zależność pokazuje, że prawdopodobieństwo lateralnej kolizji dwóch samolotów odbywających lot na sąsiednich trasach można szacować przy wykorzystaniu znajomości funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$ błędu pozycji samolotów.

Model funkcji gęstości prawdopodobieństwa błędu pozycji samolotu

W pracy [8] zaproponowano model funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$ będący kombinacją dwóch gęstości prawdopodobieństwa, jednej modelującej tzw. jądro funkcji gęstości i drugiej modelującej tzw. ogon funkcji gęstości. Jako funkcję modelującą jądro zaproponowano uogólniony rozkład Laplace'a, natomiast ogon zamodelowano wykorzystując rozkład podwójnie wykładniczy.

Funkcję gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$ będącą kombinacją dwóch funkcji można zapisać w postaci [8]:

$$f(x) = (1 - \alpha) \cdot f_c(x) + \alpha \cdot f_t(x) \quad (19)$$

gdzie:

α - współczynnik wagowy ($0 < \alpha < 1$);

$f_c(x)$ - funkcja gęstości prawdopodobieństwa związana z jądrem funkcji $f(x)$;

$f_t(x)$ - funkcja gęstości prawdopodobieństwa związana z ogonem funkcji $f(x)$.

Uogólniony rozkład Laplace'a został zaproponowany z uwagi na możliwość zmian jego kształtu poprzez dobór parametru kształtu. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa jądra w postaci uogólnionego rozkładu Laplace'a dana jest zależnością:

$$f_c(x) = \frac{1}{2ab\Gamma(b)} \cdot \exp\left(-\left|\frac{x}{a}\right|^{\frac{1}{b}}\right) \quad (20)$$

gdzie:

a - parametr skali ($a > 0$);

b - parametr kształtu ($b > 0$);

$\Gamma(b)$ - funkcja Gamma dana wzorem:

$$\Gamma(b) = \int_0^{\infty} t^{b-1} \cdot \exp(-t) dt \quad (21)$$

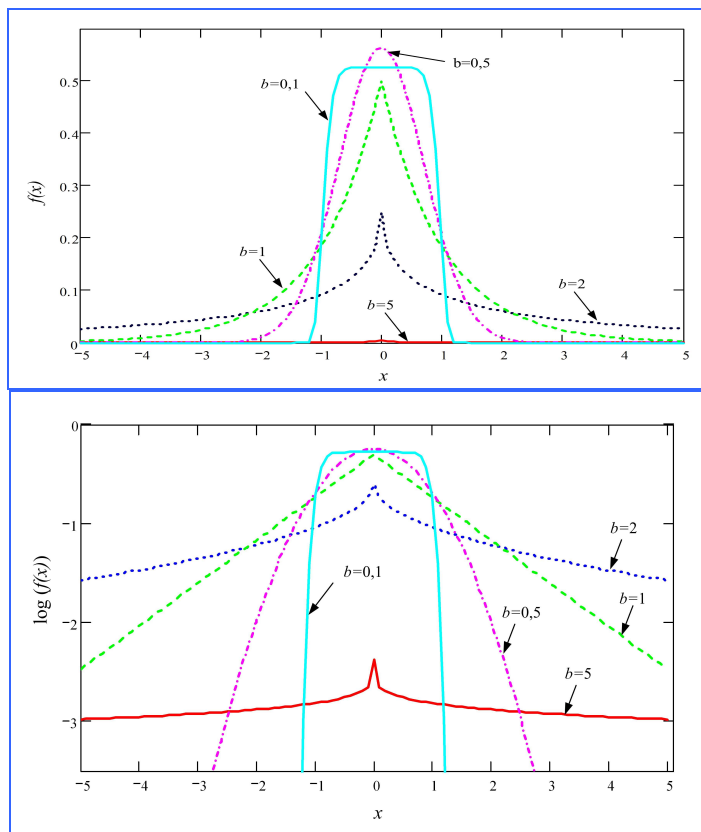
Kształt uogólnionego rozkładu Laplace'a zmienia się wraz ze zmianą parametru kształtu b . Dla $b=1$ równanie (20) przyjmuje postać rozkładu podwójnie wykładniczego, natomiast dla $b=0,5$ przyjmuje postać rozkładu normalnego (Gaussa). Na rys. 11 przedstawiono zmiany kształtu uogólnionego rozkładu Laplace'a w zależności od wartości parametru b , przy założeniu parametru skali $a=1$. Rozkład podwójnie wykładniczy modelujący ogon funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$ błędu pozycji dany jest zależnością:

$$f_t(x) = \frac{1}{2\lambda} \exp\left(\frac{-|x|}{\lambda}\right) \quad (22)$$

gdzie: λ - parametr skali.

W pracach [9, 10] zostało udowodnione, że przy przyjęciu rozkładu Gaussa do modelowania jądra funkcji gęstości $f(x)$, aby spełnić wymagania (12) i (13) współczynnik wagowy funkcji gęstości jądra $(1 - \alpha)$ musi być większy od 1, co stoi w sprzeczności z założeniem ($0 < \alpha < 1$). Biorąc powyższe pod uwagę współczynnik kształtu b powinien spełniać nierówność:

$$b < 0,5$$



Rys. 11. Zależność kształtu uogólnionego rozkładu Laplace'a od zmian wartości parametru b dla $a = 1$

Dla przyjętych założeń, znalezienie funkcji gęstości prawdopodobieństwa lateralnej kolizji samolotów sprowadza się do znalezienia postaci funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$ błędu pozycji samolotu. Modelując tę funkcję przy pomocy uogólnionego rozkładu Laplace'a (dla jądra funkcji) i rozkładu podwójnie wykładniczego (dla ogona funkcji) zagadnienie sprowadza się do znalezienia wartości parametrów tych rozkładów, dla których spełnione są jednocześnie równania określone wyrażeniami (9) i (10). Dla rozkładów Laplace'a i podwójnie wykładniczego tych parametrów jest cztery:

$$f(x) = f(x|a, b, \lambda, \alpha) \quad (23)$$

Ponieważ równań, które muszą być spełnione jest dwa, zatem parametry te nie mogą być określone w sposób unikalny. Należy zatem poszukiwać takich wartości parametrów, dla których prawdopodobieństwo lateralnej kolizji jest maksymalne.

Zapiszmy funkcję gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$ dla $x = S_y$:

$$f(S_y) = (1 - \alpha) \cdot f_c(S_y) + \alpha \cdot f_t(S_y) \quad (24)$$

Zgodnie z przyjętymi założeniami ($f_c(S_y) \ll f_t(S_y)$ dla $S_y \geq 2R$) możemy zapisać zależność na prawdopodobieństwo lateralnej kolizji w postaci:

$$P_y(S_y) \approx 4 \cdot \lambda_y \cdot f(S_y) \approx 4 \cdot \lambda_y \cdot \alpha \cdot f_t(S_y) \quad (25)$$

Dla przyjętego modelu ogona funkcji gęstości prawdopodobieństwa wyrażenie to przyjmuje postać:

$$P_y(S_y) = \frac{4 \cdot \lambda_y \cdot \alpha}{2 \cdot \lambda} \cdot \exp\left(\frac{-S_y}{\lambda}\right) \quad (26)$$

Osiąga ono wartość maksymalną ze względu na λ , kiedy:

$$\frac{\partial P_y(S_y)}{\partial \lambda} = 0 \quad (27)$$

Co jest spełnione, gdy $\lambda = S_y$ i wtedy wartość maksymalna prawdopodobieństwa kolizji lateralnej wynosi:

$$P_y(S_y) \approx \frac{2 \cdot \lambda_y \cdot \alpha}{S_y} \cdot e^{-1} \quad (28)$$

Z wyrażenia (26) widać, że prawdopodobieństwo lateralnej kolizji wzrasta monotonicznie wraz ze wzrostem α w przypadku, gdy α jest niezależne od λ . Jednakże w rozpatrywanym przypadku α jest funkcją λ , co zostanie przedstawione w dalszej części rozdziału.

Równania podane zależnościami (9) i (10) dla funkcji gęstości prawdopodobieństwa będącej kombinacją rozkładów można zapisać w postaci:

$$(1 - \alpha) \cdot I_{c,1} + \alpha \cdot I_{t,1} = 1 - 0,05 \quad (29)$$

$$(1 - \alpha) \cdot I_{c,2} + \alpha \cdot I_{t,2} = 1 - \gamma_2 \quad (30)$$

gdzie:

$$I_{c,m} = \int_{-mR}^{mR} f_c(x) dx \quad (m = 1,2) \quad (31)$$

$$I_{t,m} = \int_{-mR}^{mR} f_t(x) dx \quad (m = 1,2) \quad (32)$$

Dla modelu będącego kombinacją uogólnionego rozkładu Laplace'a i rozkładu podwójnie wykładniczego otrzymujemy odpowiednio:

$$I_{t,m} = 1 - e^{-\frac{mR}{\lambda}} \quad (33)$$

$$I_{c,m} = \int_{-mR}^{mR} \frac{1}{2ab\Gamma(b)} \exp\left(-\left|\frac{x}{a}\right|^{\frac{1}{b}}\right) dx \quad (34)$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$x = k_x \cdot R \quad (35)$$

$$a = k_a \cdot R \quad (36)$$

$$\lambda = k_l \cdot R \quad (37)$$

gdzie k_x , k_a oraz k_l są odpowiednio unormowanymi: błędem pozycji, parametrem skali uogólnionego rozkładu Laplace'a i parametrem skali rozkładu podwójnie wykładniczego. Uwzględniając te oznaczenia, otrzymujemy:

$$I_{t,m} = 1 - e^{-\frac{m}{k_l}} \quad (38)$$

$$I_{c,m} = \int_{-m}^m \frac{1}{2k_a b \Gamma(b)} \exp\left(-\left|\frac{k_x}{k_a}\right|^{\frac{1}{b}}\right) dk_x \quad (39)$$

Wprowadzając unormowane współczynniki, problem wyznaczenia funkcji gęstości prawdopodobieństwa błędu pozycji sprowadza się do wyznaczenia parametrów k_a , b , k_l i α .

Przykład obliczeń parametrów funkcji gęstości prawdopodobieństwa błędu pozycji samolotu

Eliminując α z równań (29) i (30) uzyskuje się następujące równanie:

$$G(k_a, b, k_l) \equiv \left(I_{c,2} - 1 + e^{-\frac{-2}{k_l}} \right) \cdot [I_{c,1} - (1 - 0,05)] - [I_{c,2} - (1 - \gamma_2)] \cdot \left(I_{c,1} - 1 + e^{-\frac{-1}{k_l}} \right) = 0 \quad (40)$$

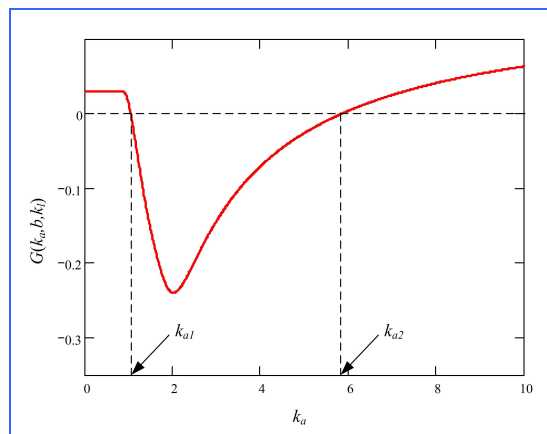
Natomiast przekształcając równanie (29) uzyskuje się zależność na α w postaci:

$$\alpha(b, k_l) = \frac{I_{c,1} - (1 - 0,05)}{I_{c,1} - \left(1 - e^{-\frac{-1}{k_l}} \right)} \quad (41)$$

W celu wyznaczenia poszukiwanych parametrów należy najpierw, dla zakładanych wartości k_l z równania (40) wyznaczyć $k_a(b)$, następnie z równania (41) wyznaczyć $\alpha(b, k_l)$. Rozwiązaniami mogą być tylko te wartości α , które spełniają warunek $0 < \alpha < 1$. Ostatecznie, do zbioru poszukiwanych parametrów mogą należeć tylko te, dla których prawdopodobieństwo $P_y(S_y)$ osiąga maksimum.

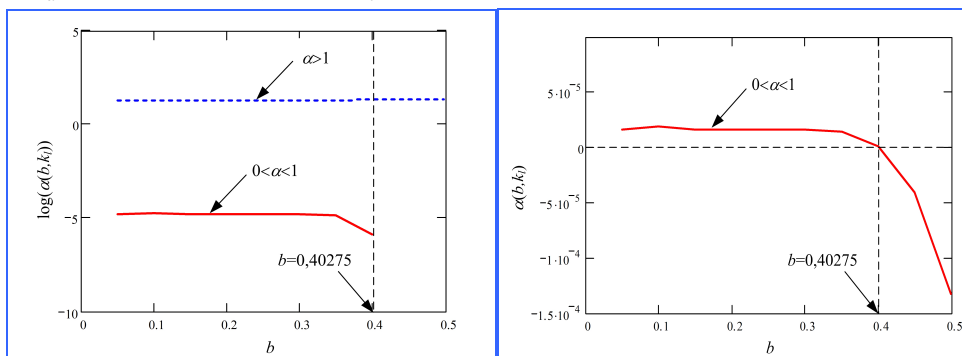
Na rys. 12 przedstawiono przykład przebiegu funkcji określonej równaniem (40)

dla $b = 0,1$ oraz $k_l = \frac{\lambda}{R} = 4$.



Rys. 12. Postać funkcji $G(k_a, b, k_l)$ z zaznaczonymi możliwymi rozwiązaniami k_a dla danych $b = 0,1$ i $k_l = 4$

Rozwiązując numerycznie (przy wykorzystaniu pakietu MATHCAD) równanie (40) otrzymujemy dokładne wartości pierwiastków równania, które wynoszą: $k_{a1} = 1,05588$ i $k_{a2} = 5,86253$. Za ostateczne rozwiązanie równania należy przyjąć ten z pierwiastków, dla którego współczynnik wagowy α wyznaczony z zależności (41) znajduje się w przedziale $(0,1)$. Pierwiastkiem spełniającym podane założenia jest k_{a1} , dla którego $\alpha(b = 0,1; k_l = 4) = 7,53617 \cdot 10^{-5}$, w porównaniu z k_{a2} , dla którego $\alpha(b = 0,1; k_l = 4) = 1,28557$.

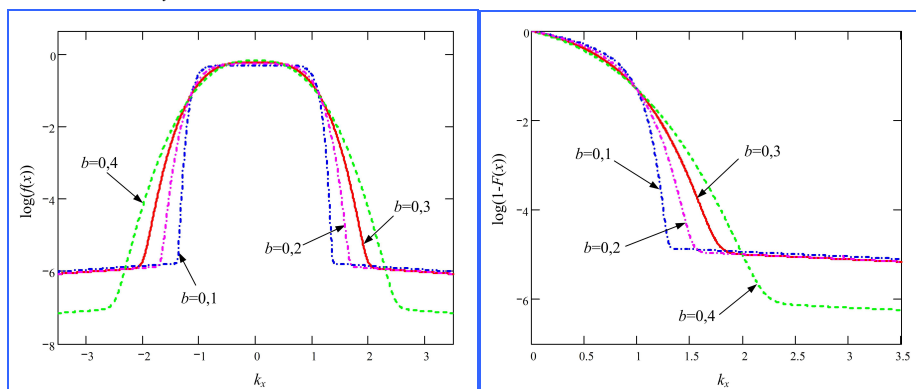


Rys. 13. Możliwe wartości α spełniające nierówność $0 < \alpha < 1$ dla $k_l = 4$

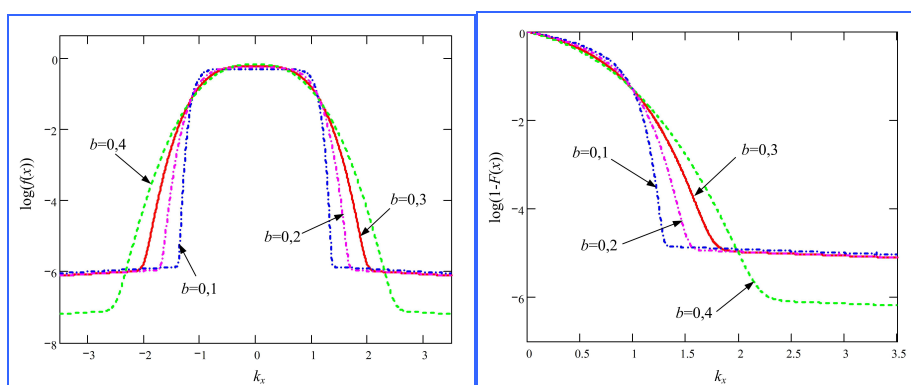
Na rys. 13 przedstawiono rozwiązania równania (41) w postaci $\alpha = \alpha(b, k_l)$ dla $k_l = 4$ oraz dla b zmieniającego się w przedziale $\langle 0,05;0,5 \rangle$. Jak widać na rysunku wartości α spełniają warunek $0 < \alpha < 1$, gdy b osiąga wartość z przedziału od 0 do ok. $0,40 \div 0,45$. Dokładne obliczenia numeryczne pokazują, że

warunek ten jest spełniony dla wartości b spełniających nierówność $0 < b \leq 0,40275$. Dla $b = 0,5$, parametr wagowy $\alpha < 0$, co potwierdza, że przy przyjętych założeniach niemożliwe jest zamodelowanie jądra funkcji gęstości $f(x)$ przy pomocy rozkładu Gaussa, którego postać, jak wspomniano poprzednio, uogólniony rozkład Laplace'a przyjmuje, gdy $b = 0,5$.

Na rys. 14 pokazano przykłady wykresów funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$ błędu pozycji samolotu i jej dystrybuant $F(x)$ (dokładnie – różnic: $1 - F(x)$), wykreślone dla czterech wartości parametru b oraz dla $k_l = 4$. Natomiast na rys. 15 przedstawiono te wykresy dla tych samych wartości parametru b i $k_l = 5$.



Rys. 14. Wykresy funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$ i jej dystrybuanty dla $k_l = 4$ i czterech wartości parametru b



Rys. 15. Wykresy funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$ i jej dystrybuanty dla $k_l = 5$ i czterech wartości parametru b

Szacowanie wartości maksymalnej prawdopodobieństwa lateralnego nakładania się tras

Dokonując przekształceń równania (30) możemy zapisać zależność na α w postaci:

$$\alpha = \frac{1 - \gamma_2 - I_{c,2}}{I_{t,2} - I_{c,2}} \quad (42)$$

gdzie:

$$I_{c,2} = 1 - 2 \int_{2R}^{\infty} f_c(x) dx \quad (43)$$

$$I_{t,2} = 1 - 2 \int_{2R}^{\infty} f_t(x) dx \quad (44)$$

Podstawiając (43) i (44) do (42), otrzymujemy:

$$\alpha = \frac{\gamma_2 - 2 \int_{2R}^{\infty} f_c(x) dx}{2 \left(\int_{2R}^{\infty} f_t(x) dx - \int_{2R}^{\infty} f_c(x) dx \right)} \quad (45)$$

Współczynnik wagowy α staje się funkcją λ , niezależną od b w przypadku, gdy $\int_{2R}^{\infty} f_c(x) dx$ jest pomijalnie małe w porównaniu z γ_2 oraz z $\int_{2R}^{\infty} f_t(x) dx$. Sytuacja taka ma miejsce, kiedy $x > 2R$, dla którego $f_c(x) \ll f_t(x)$. W takim przypadku można zapisać zależność na współczynnik wagowy α (oznaczymy go α_0) w postaci:

$$\alpha_0 = \frac{\gamma_2}{2 \int_{2R}^{\infty} f_t(x) dx} \quad (46)$$

Podstawiając do (46) zależność na rozkład podwójnie wykładniczy, otrzymujemy:

$$\alpha_0 = \gamma_2 \cdot e^{\frac{2R}{\lambda}} \quad (47)$$

Wstawiając zależność na współczynnik wagowy α_0 (47) do (26) otrzymujemy:

$$P_y(S_y) \approx 2\lambda_y \cdot \frac{\gamma_2 \cdot e^{-\left(\frac{S_y-2R}{\lambda}\right)}}{\lambda} \quad (48)$$

Osiąga ono wartość maksymalną ze względu na λ , kiedy:

$$\frac{\partial P_y(S_y)}{\partial \lambda} = 0 \quad (49)$$

Co jest spełnione, gdy $\lambda = S_y - 2R$ (zakładamy $S_y \geq 4R$) i wtedy wartość maksymalna prawdopodobieństwa kolizji lateralnej dla modelowania ogona funkcji gęstości prawdopodobieństwa rozkładem podwójnie wykładniczym $P_y(S_y)_{DE}$ wynosi:

$$P_y(S_y)_{DE} \approx 2\lambda_y \frac{\gamma_2 \cdot e^{-1}}{S_y - 2R} \quad (50)$$

4. PODSUMOWANIE

Jednym z bardzo ważnych zagadnień ze względu na bezpieczeństwo lotu, ściśle powiązanych z nawigacją, jest problem ryzyka wystąpienia kolizji w przestrzeni powietrznej, ponieważ następstwem każdej pojedynczej kolizji są dwie katastrofy. W pracy zaprezentowano wymagania, jakie są nakładane na elementy biorące udział w procesie kontroli ruchu powietrznego, a zatem również na systemy nawigacyjne, spełniające warunki RNP RNAV oraz przybliżono model Reicha pozwalający na szacowanie ryzyka wystąpienia kolizji samolotów. Ponadto przedstawiono model funkcji gęstości prawdopodobieństwa błędu pozycji samolotu będący kombinacją uogólnionego rozkładu Laplace'a oraz rozkładu podwójnie wykładniczego.

LITERATURA

1. *Area Navigation Equipment. Operational Requirements and Functional Requirements.* EUROCONTROL Agency 1998.
2. Bronsztejn I. N., Siemiendajew K. A.: *Matematyka. Poradnik encyklopedyczny.* PWN, Warszawa 1968.
3. Endoh S.: *Aircraft Collision Models.* Praca dyplomowa cząstkowa. Massachusetts Institute of Technology 1982.
4. Fujita M.: *Frequency of Rare Event Occurrences. ICAO collision risk model for separation minima.* ENRI International Workshop on ATM/CNS, Tokyo 2009.
5. Kayton M., Fried W. R.: *Elektroniczne układy nawigacji lotniczej.* WKŁ, Warszawa 1976.

6. Lewitowicz J.: *Podstawy eksploatacji statków powietrznych. T. 3, Systemy eksploatacji statków powietrznych*. Wyd. ITWL, Warszawa 2006.
7. Meyer T., Bradley J.: *The Evolution from Aera Navigation (RNAV), Required Navigation Performance (RNP), to RNP RNAV*. Information Paper of Global Navigation Satellite System Panel, Rio de Janeiro 2001.
8. Nagaoka S.: *A Model for Estimating the Lateral Overlap Probability of Aircraft with RNP Alerting Capability in Parallel RNAV Routes*. 26th International Congress of Aeronautical Sciences, Anchorage-Alaska 2008.
9. Nagaoka S.: *An Alternative Double Exponential Tail Model for Estimating the Lateral Overlap Probability of Aircraft for RNP RNAV Parallel Tracks*. ICAO SASP-WG/WHL/6-WP/05, Washington D.C. 2004.
10. Nagaoka S.: *Estimating the Lateral Overlap Probability for RNP RNAV Parallel Tracks*. ICAO SASP-WG/WHL/5-WP/29, Tokyo 2004.
11. Roelen A.: *Casual Risk Models of Air Transport. Comparison of User Needs and Model Capabilities*. IOS Press, Amsterdam 2008.
12. Shortle F. J., Xie Y., Chen C. H., Donohue G. L.: *Simulating Collision Probabilities of Landing Airplanes AT Non-towered Airports*. Transactions of the Society for Computer Simulation, Vol. 79, No. 10, 2003.
13. Shortle J., Xie Y., Jeddi B., Sherry L.: *Incidents and Statistics: The Need for Improved Means to Quantify Safety*. 3rd WakeNet2 Europe Workshop. Georg Mason University 2005.
14. Trani A. A.: *Airport and Airspace Operations in the US (Air Traffic Control)*. Virginia Tech 2005.



Prof. dr hab. inż. Jerzy Lewitowicz jest pracownikiem ITWL. Główne zainteresowania naukowe obejmują rozwój najnowszej techniki wojskowej, w tym w szczególności lotniczej, budowa i eksploatacja samolotów i śmigłowców ze szczególnym uwzględnieniem diagnostyki technicznej i logistyki. W dorobku naukowym posiada ponad 400 publikacji naukowych; autor lub współautor 19 książek (m.in.): *Problemy badań i eksploatacji techniki lotniczej*, sześć tomów (1993-2006), *Podstawy eksploatacji statków powietrznych*, pięć tomów (2001-2009), opracował ponad 400 opinii i recenzji naukowych, uczestnik ponad 120 konferencji naukowych i technicznych z czynnym udziałem.



Mjr mgr inż. Krzysztof Sajda jest pracownikiem ITWL. W roku 1998 ukończył Wojskową Akademię Techniczną na Wydziale Elektroniki, specjalność *Naziemne Urządzenia Radiolokacyjne*. W ITWL pracuje na stanowisku kierownika pracowni urządzeń elektronicznych i systemów nawigacyjnych. Główne obszary działalności naukowej i technicznej to: integracja systemów awionicznych, systemy radionawigacyjne oraz zagadnienia związane z lotniczymi systemami poszukiwania i ratownictwa.

