



Jan PURCZYŃSKI

WYZNACZANIE TRANSMITANCJI Z WYKORZYSTANIEM ODPOWIEDZI SKOKOWEJ W OBECNOŚCI ZAKŁÓCEŃ

Streszczenie

W pracy zaprezentowano metodę identyfikacji liniowych układów dynamicznych w przypadku, gdy znana jest odpowiedź skokowa obiektu. Rozpatrzono zagadnienie uzyskiwania modeli uproszczonych transmitancji. Stwierdzono, że w przypadku sygnału niezakłóconego, całkowanie numeryczne metodą Simpsona prowadzi do dokładniejszego modelu niż metoda trapezów. Odwrotna sytuacja, tzn. skuteczniejsza jest metoda trapezów dla odpowiedzi skokowej w obecności zakłóceń.

WSTĘP

Metody identyfikacji obiektów dynamicznych posiadają obszerną literaturę, m. in., [2,10]. Jednym z najczęściej rozpatrywanych zagadnień jest opracowanie uproszczonych transmitancji dla złożonych obiektów dynamicznych [3,7]. Podobny problem rozpatrywany jest w pracy [8], gdzie wyznaczano uproszczony model dynamiki czujnika elektrycznego temperatury a także w pracy [5], w której rozpatrywano model dynamiki nieustalonego pola w ekranach elektromagnetycznych. Kolejnym przykładem jest praca [9], gdzie uwzględniając transmitancję poszczególnych węzłów ciepłowniczych wyznaczano model dynamiki magistrali ciepłowniczej. O aktualności tematyki świadczy praca [1] , opublikowana w 2006r., w której wychodząc z równań nieustalonego pola temperaturowego oraz nieustalonego pola elektromagnetycznego wyznacza się uproszczone modele dynamiki obiektów.

W niniejszej pracy rozpatrzono zagadnienie identyfikacji układu dynamicznego opisanego równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu n . W wyniku zastosowania transformaty Laplace'a uzyskuje się transmitancję o postaci:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + 1} \quad n > m \quad (1)$$

Klasyczną metodą identyfikacji jest metoda momentów bazująca na odpowiedzi impulsowej układu $g(t)$ [7,10].

Wychodząc ze związku

$$G(s) = \int_0^T g(t) \cdot e^{-st} dt \quad (2)$$

gdzie T – czas obserwacji
oraz dokonując rozwinięcia w szereg potęgowej funkcji e^{-st} , otrzymuje się

$$G(s) = m_0 - sm_1 + \frac{s^2}{2!} m_2 - \frac{s^3}{3!} m_3 + \dots \quad (3)$$

gdzie m_k jest momentem rzędu k opisanym wzorem

$$m_k = \int_0^T t^k \cdot g(t) dt \quad (4)$$

Z porównania wzorów (1) i (3) otrzymuje się następujący układ równań:

$$b_j = (-1)^j \cdot \frac{m_j}{j!} + (-1)^{j-1} \frac{m_{j-1}}{(j-1)!} a_1 + \dots - m_1 a_{j-1} + m_0 a_j \quad (5)$$

gdzie $b_j=0$ dla $j > m$ oraz $a_j=0$ dla $j > n$.

Z układu równań (5) wyznacza się wartości współczynników a_j i b_j .

Stosowanie metody momentów wymaga (wzór (4)) znajomości odpowiedzi impulsowej układu $g(t)$.

W przypadku, gdy dana jest odpowiedź skokowa układu $h(t)$, odpowiedź impulsową wyznacza się ze wzoru

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} \quad h(0) = 0 \quad (6)$$

W celu ograniczenia wpływu zakłócenia na wynik różniczkowania numerycznego, stosuje się następującą zależność [6]

$$h'_n = \frac{3}{M \cdot (M+1) \cdot (2M+1)} \cdot \sum_{i=-M}^M i \cdot h_{n+i} \quad (7)$$

Pomimo zastosowania wzoru (7), w przypadku dużego poziomu zakłócenia otrzymuje się wartości pochodnej obarczone dużym błędem, uniemożliwiającym stosowanie metody momentów. Inne podejście opisane jest w pracy [4], gdzie zastosowano metodę uśrednionego różniczkowania.

W pracy wykorzystano algorytm umożliwiający stosowanie metody momentów dla odpowiedzi skokowej $h(t)$, bez konieczności różniczkowania numerycznego [7,10].

Stosując do wzoru (4) metodą całkowania przez części oraz zależność

$$h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau \quad (8),$$

otrzymuje się

$$m_k = T^k \cdot h(T) - k \cdot \int_0^T h(t) \cdot t^{k-1} dt \quad (9)$$

Dokonując przekształcenia

$$T^k \cdot h(T) = h(T) \cdot \int_0^T k \cdot t^{k-1} dt$$

wzór (9) przyjmuje postać

$$m_k = k \cdot \int_0^T t^{k-1} \cdot [h(T) - h(t)] dt \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (10)$$

oraz $m_0 = h(T)$.

1. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Zakłada się, że układ opisany jest transmitancją $G(s)$:

$$G(s) = \frac{7s^2 + 5s + 6}{62,5 \cdot s^4 + 112,5 \cdot s^3 + 62,5 \cdot s^2 + 13,5 \cdot s + 1} \quad (11)$$

Transmitancji (11) odpowiada odpowiedź impulsowa $g(t)$:

$$g(t) = -\frac{1}{3} \exp(-t) + \frac{11}{25} \exp(-0,2 t) \cdot \left(\frac{6}{5} t - 7 \right) + \frac{256}{75} \exp(-0,4 t) \quad (12)$$

oraz odpowiedź skokowa $h(t)$:

$$h(t) = 6 + \frac{1}{3} \exp(-t) + \frac{11}{5} \exp(-0,2 t) \cdot \left(1 - \frac{6}{5} t \right) - \frac{128}{15} \exp(-0,4 t) \quad (13)$$

Obliczenia wykonano dla dwóch czasów obserwacji $T=37$ i $T=41$. Wartości odpowiedzi skokowych $h(T=37)$ i $h(T=41)$ różnią się od wartości ustalonej ($h_\infty=6$) odpowiednio $0,1\%$ oraz $0,5\%$. Ponieważ odpowiedź skokowa jest uzyskana na drodze pomiaru, założono jej postać:

$$h_n = h(t_n); \quad t_n = T \cdot \frac{n}{N}; \quad (n = 0, 1 \dots N) \quad (14)$$

Przy obliczaniu całki występującej we wzorze (10) zastosowano metodę trapezów i metodę Simpsona. Przy liczbie punktów $N=100$ metoda Simpsona zapewnia wyniki o dużej dokładności (błąd wartości współczynników a_j i b_j nie przekracza $0,03\%$), natomiast metoda trapezów prowadzi do błędu względnego współczynników rzędu 7% . W celu utrudnienia zadania identyfikacji transmitancji (11) założono wartość (wzór (1)) $n \leq 3$. Przyjęcie $n=4$ prowadzi do wzoru (11) z błędem wynikającym ze skończonego czasu obserwacji. Dla $n=2$

uzyskano wyniki obarczone dużym błędem. Stąd szczegółowo rozpatrzono przypadek $n=3$, tzn. model postaci

$$GM(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + 1} \quad (15)$$

Wprowadza się oznaczenia:

$$\begin{aligned} G0(s) &\text{ dla } b_2=b_1=0 \text{ we wzorze (15)} \\ G1(s) &\text{ dla } b_2=0 \text{ we wzorze (15)} \\ G2(s) &\text{ – wzór (15)} \end{aligned} \quad (16)$$

Stosując metodę Simpsona, wykonano całkowanie zgodnie ze wzorem (10). Następnie rozwiązano układ równań (5) dla poszczególnych modeli (16). Dla wyznaczonych modeli określono przebiegi odpowiedzi impulsowych $g0(t)$, $g1(t)$, $g2(t)$ oraz odpowiedzi skokowych $h0(t)$, $h1(t)$, $h2(t)$. W celu oceny uzyskanych wyników określono błędy:

$$\Delta gM = \sqrt{\int_0^{41} (gM(t) - g(t))^2 dt} \quad \Delta hM = \sqrt{\int_0^{41} (hM(t) - h(t))^2 dt} \quad (17)$$

Wartości błędów zamieszczono w tabeli 1.

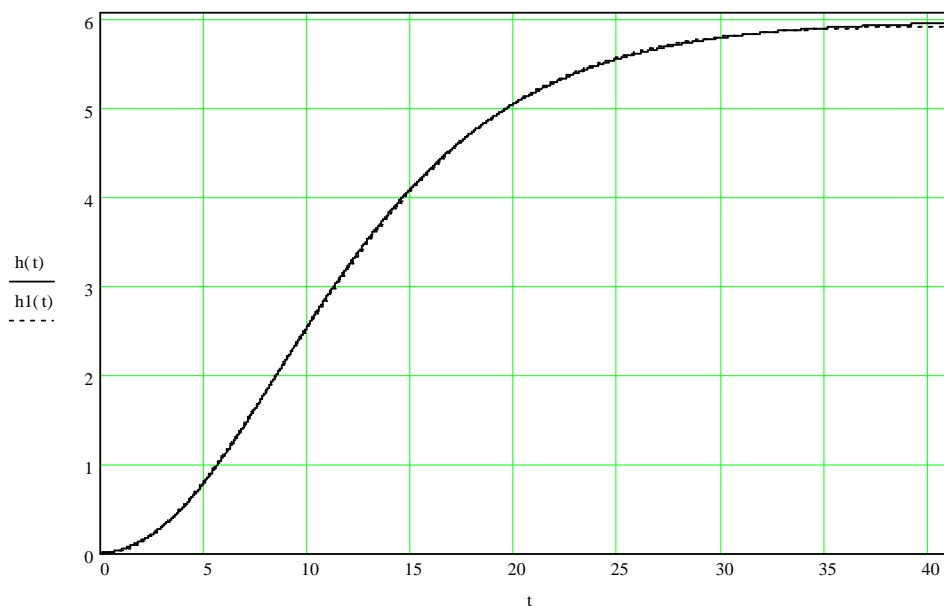
Tab 1. Wartości błędów średniokwadratowych odpowiedzi impulsowej Δg oraz odpowiedzi skokowej Δh

	T=37	T=41
$\Delta h0$	0.1406	0.1214
$\Delta h1$	0.1069	0.0779
$\Delta h2$	0.1150	0.1114
$\Delta g0$	0.0586	0.0593
$\Delta g1$	0.0359	0.0321
$\Delta g2$	0.0501	0.0560

Źródło: Opracowanie własne

Jak wynika z Tab.1, najmniejszym błędem obarczony jest model $G1(s)$. Dla czasu obserwacji $T=37$, transmitancja $G1(s)$ wyraża się wzorem:

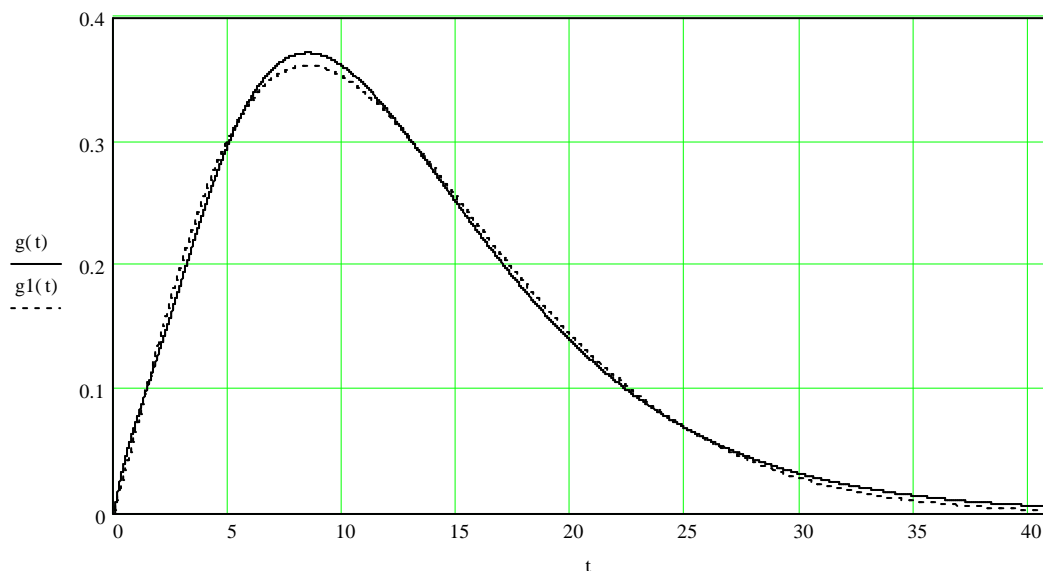
$$G1(s) = \frac{7,78 \cdot s + 5,94}{120,77 \cdot s^3 + 67,63 \cdot s^2 + 13,68 \cdot s + 1} \quad (18)$$



Rys. 1. Odpowiedź skokowa dokładna $h(t)$ (wzór(13)) oraz odpowiedź skokowa modelu przybliżonego $h1(t)$ (wzór(18)).

Źródło: Opracowanie własne

Na Rys.1 przedstawiono przebiegi odpowiedzi skokowych: $h(t)$ – przebieg dokładny (linia ciągła) oraz $h1(t)$ – przebieg odpowiadającej transmitancji (18) (linia kropkowana). Jak wynika z rysunku, obydwa przebiegi pokrywają się.



Rys. 2. Odpowiedź impulsowa dokładna $g(t)$ (wzór(12)) oraz odpowiedź impulsowa modelu przybliżonego $g1(t)$ (wzór(18)).

Źródło: Opracowanie własne

Na Rys.2 porównano przebiegi odpowiedzi impulsowych: $g(t)$ – przebieg dokładny (linia ciągła) oraz $g1(t)$ – przebieg odpowiadający transmitancji (18) (linia kropkowana).

2. IDENTYFIKACJA W OBECNOŚCI ZAKŁÓCEŃ LOSOWYCH

Zakłada się, że odpowiedź skokowa układu $h(t)$ została zakłócona addytywnie przez szum losowy, zgodnie ze wzorem:

$$hz_n = h_n + z_z \quad (19)$$

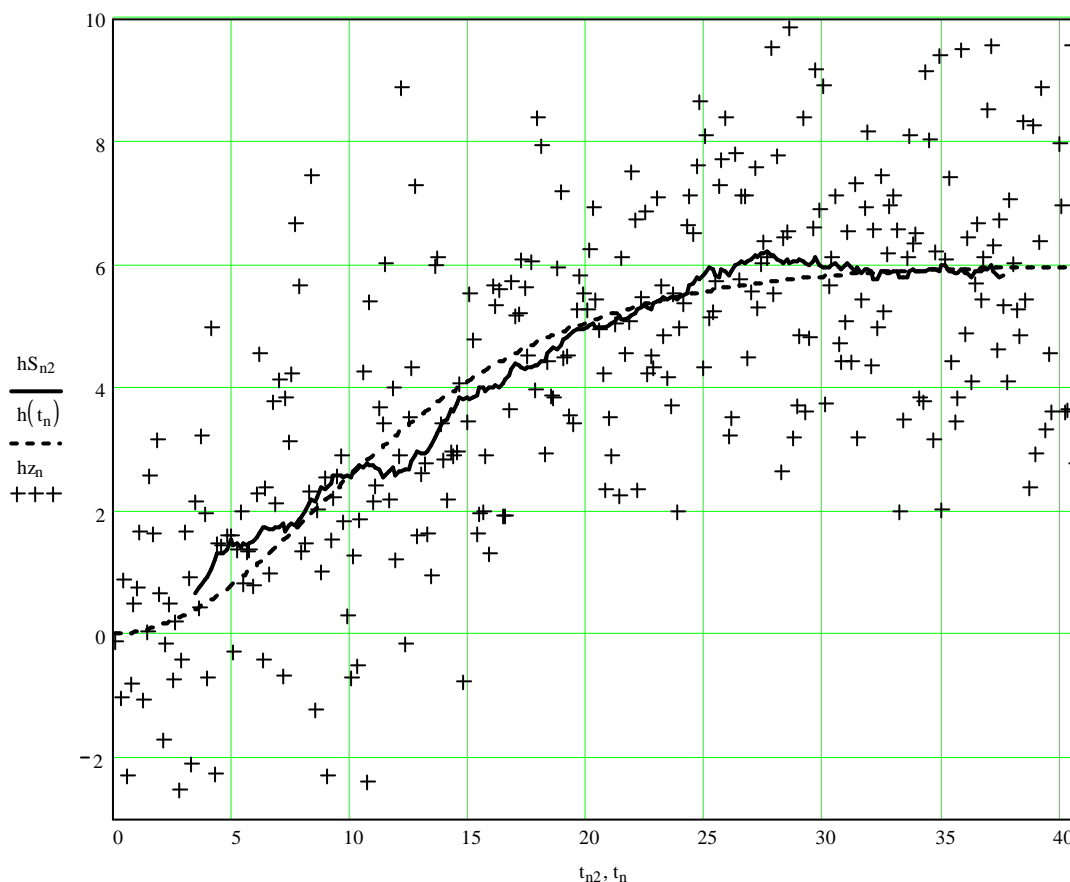
gdzie h_n określa wzór (14)

z_n – zakłócenie o rozkładzie normalnym $N(0, \sigma)$; odchylenie standardowe $\sigma = 2$.

Dla sygnału hz_n powtórzono obliczenia opisane w rozdz. 1. Okazało się, że warunkiem uzyskania poprawnych wyników jest odpowiednio duża liczba punktów obserwacji N . Do dalszej analizy przyjęto $N=300$. Podstawowym problemem jest wyznaczenie wartości $hz(T)$ występującej we wzorze (10). W tym celu zastosowano metodę średniej ruchomej opisaną wzorem

$$hs_n = \frac{1}{2M+1} \sum_{i=-M}^M hz_{n+i} \quad (20)$$

Jako wartość $hz(T)$ przyjmuje się hS_{N-M} , gdzie $M=25$ i $N=300$.



Rys. 3. Wartości odpowiedzi skokowej: dokładnej $h(t)$, zakłóconej hz_n oraz wygładzonej hS_n

Źródło: Opracowanie własne

Na Rys.3 przedstawiono przebieg odpowiedzi skokowej $h(t_n)$, (linia przerywana), przebieg zakłócony hz_n (znak plus) oraz wartość wygładzoną hs_n (linia ciągła).

Przy wyznaczaniu całki (10) zastosowano metodę trapezów i metodę Simpsona. Wyniki obliczeń zamieszczono w Tabeli 2, która zawiera wartości błędów.

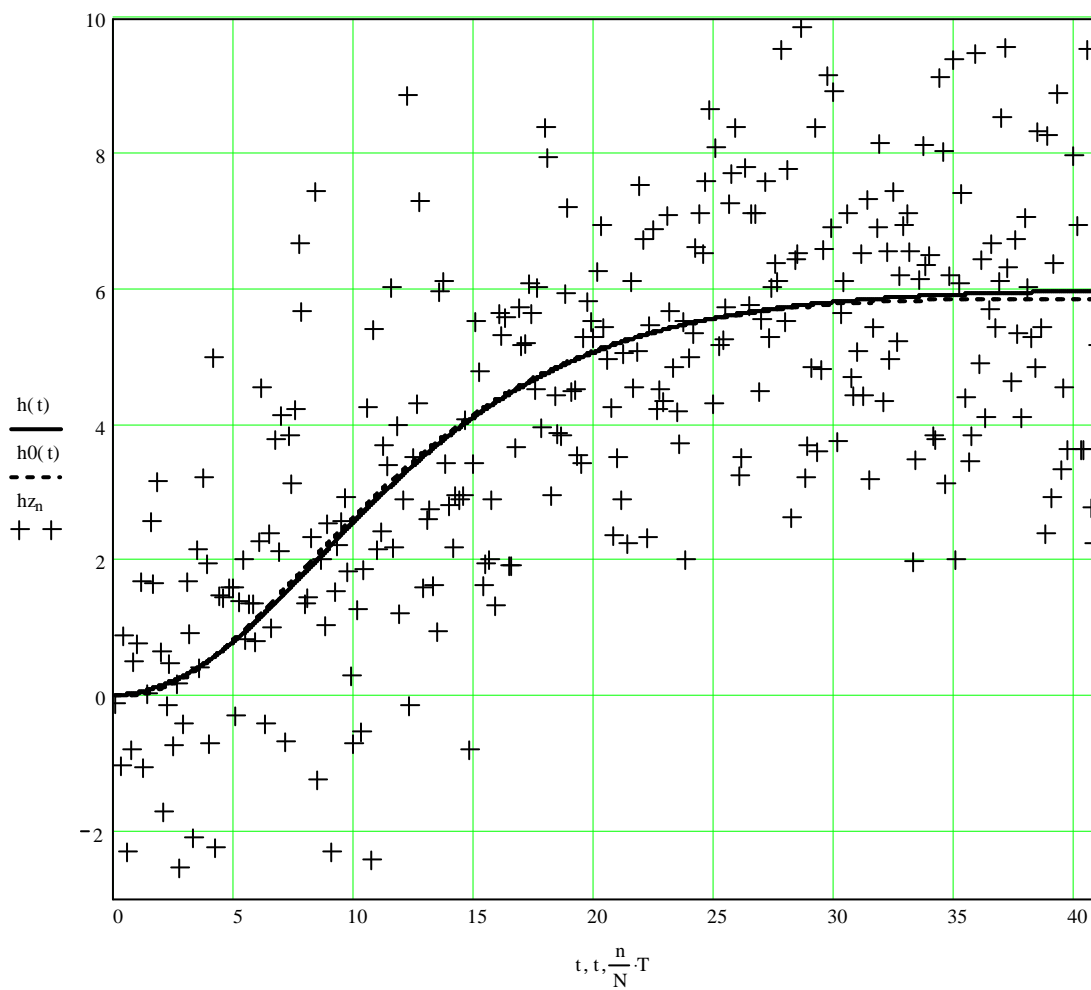
Tab. 2 Wartości błędów uproszczonych modeli transmitancji

	T=37		T=41	
	Metoda trapezów	Metoda parabol	Metoda trapezów	Metoda parabol
Δh_0	0,4937	1,0421	0,3385	0,9842
Δh_1	0,3978	0,8778	0,3419	0,8770
Δh_2	0,7035	0,9796	0,6421	0,9735
Δg_0	0,0796	0,1488	0,0707	0,1314
Δg_1	0,0889	0,1333	0,0980	0,1296
Δg_2	0,2461	0,2645	0,2171	0,2368

Źródło: Opracowanie własne

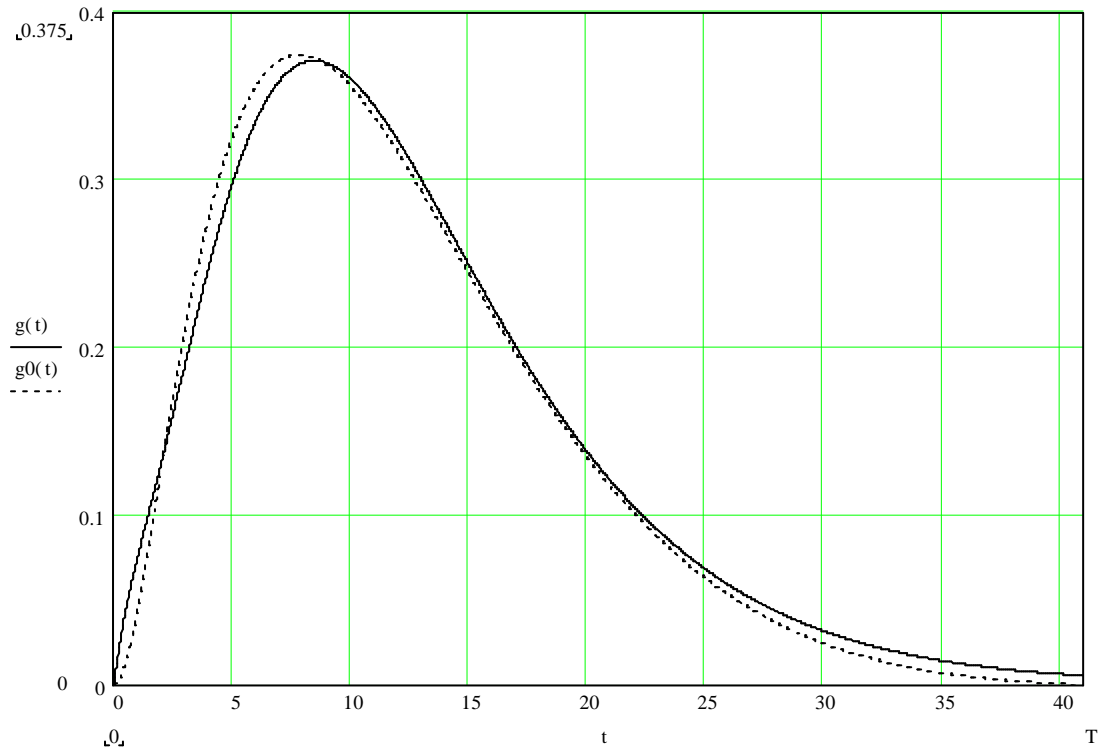
Z danych zawartych w Tab.2 wynika wyraźna przewaga metody trapezów nad metodą parabol – wyraźnie mniejsza wartość błędów. Wynika to z faktu, że metoda trapezów ma mniejszy współczynnik redukcji szumu niż metoda Simpsona. Należy przypomnieć, że w przypadku odpowiedzi skokowej niezakłóconej (rozdz.2) zdecydowaną przewagę posiada metoda parabol. Ze względu na duży poziom zakłócenia ($\sigma = 2$), potwierdzony przebiegiem hz_n na Rys.3, lepszą okazała się metoda trapezów. W przypadku mniejszej wartości odchylenia standardowego σ wybór metody całkowania numerycznego jest sprawą otwartą. Ograniczając się do rezultatów metody trapezów, z Tab.2 wynika, że dla czasu obserwacji $T=41$ najlepszym przybliżeniem okazał się model $G0(s)$ o postaci:

$$G0(s) = \frac{5,84}{44,84 \cdot s^3 + 50,29 \cdot s^2 + 11,85 \cdot s + 1} \quad (21)$$



Rys. 4. Przebiegi odpowiedzi skokowych: $h(t)$ – przebieg dokładny (linia ciągła), $h_0(t)$ – przebieg odpowiadający modelowi (21) (linia przerywana) oraz $h_z(t_n)$ – przebieg zakłócony (znak plus).

Źródło: Opracowanie własne



Rys. 5 Przebiegi odpowiedzi impulsowych: $g(t)$ – przebieg dokładny (linia ciągła), $g_0(t)$ – przebieg odpowiadający modelowi (21) (linia kropkowana)

Źródło: Opracowanie własne

Na rysunku 4 przedstawiono przebiegi odpowiedzi skokowych: $h(t)$ – przebieg dokładny (linia ciągła), $h_0(t)$ – przebieg odpowiadający modelowi (21) (linia przerywana) oraz $hz(t_n)$ – przebieg zakłócony (znak plus).

Na Rys.5 porównano przebiegi odpowiedzi impulsowych: zależność dokładna $g(t)$ (linia ciągła) oraz $g_0(t)$ odpowiadająca transmitancji (21) (linia kropkowana).

W przypadku czasu obserwacji $T=37$ brak jest jednoznacznej odpowiedzi. Mianowicie, ze względu na błąd odpowiedzi skokowej optymalnej jest model $GI(s)$, natomiast ze względu na odpowiedź impulsową optymalny jest model $GO(s)$.

PODSUMOWANIE

W pracy zaprezentowano metodę momentów identyfikacji układów dynamicznych w przypadku, gdy znana jest odpowiedź skokowa układu. Rozpatrzono zagadnienie upraszczania postaci transmitancji. W celu określenia wartości ustalonej odpowiedzi skokowej sygnału zakłóconego zastosowano metodę średniej ruchomej. Uwzględniono całkowanie numeryczne metodą trapezów oraz metodą parabol (Simpsona). Stwierdzono, że w przypadku sygnału niezakłóconego metoda Simpsona prowadzi do dokładniejszego modelu. W przypadku występowania sygnału zakłóconego zdecydowanie lepsze wyniki zapewniała metoda całkowania trapezów. Proponowana metoda zapewnia poprawne modele transmitancji nawet dla dużego poziomu zakłóceń losowych, pod warunkiem dostatecznej liczby punktów obserwacji.

DETERMINING THE TRANSFER FUNCTION WITH THE USE OF STEP RESPONSE IN THE PRESENCE OF NOISE

Summary

The paper presents a method of identifying linear dynamic systems in the case of known step response of an object. The issue of obtaining simplified models of transfer functions was considered. It was concluded that in the case of an undisturbed signal, numerical integration applying the Simpson method yields a more accurate model than the trapeze method. By contrast, the trapeze method is more effective in the case of a step response in the presence of noise.

BIBLIOGRAFIA

1. Brykalski A.: Wybrane zagadnienia modelowania dynamiki pól w elektrotechnice. Szczecin 2006.
2. De Larminat P., Thomas Y.: Automatyka- układy liniowe. Tom 2 Identyfikacja Warszawa WNT 1976.
3. Halawa J.: Metody wyznaczania transmitancji uproszczonych i ich zastosowania w automatyce i elektroenergetyce. Politechnika Wrocławska, Instytut Cybernetyki Technicznej, Prace Naukowe Seria Monografie nr 21 1991.
4. Kordylewski W., Wach J.: Uśrednione różniczkowanie zakłóconych sygnałów pomiarowych. PAK nr6 1988.
5. Lipiński W., Gołębiowski J.: Modelling of electromagnetic shield dynamics. IEEE Transactions on Magnetics vol. 16, No6 1980, s. 1419-1423.
6. Purczyński J.: Algorithms for differentiation of signals with random noise. Computer Applications in Electrical Engineering, Poznań 2009 , pp. 21-31.
7. Purczyński J.: Dynamika układów o parametrach rozłożonych. Wyd. Uczelniane Politechniki Szczecińskiej, Szczecin 1987.
8. Purczyński J., Brykalski A., Muller R.: Modellierung des dynamischen Verhaltens elektrischer Temperaturfühler – Technische Messen 60 no 4 1993, s. 152-156.
9. Purczyński J., Brykalski A.: Untersuchung der dynamischen Eigenschaften in Systemen mit verteilten Parametern am Beispiel einer Fernheizmagistrale – 37 Internationales Wissenschaftliches Kolloquium. Ilmenau 1992, Band 2, s. 244-249.
10. Żuchowski A.: Modele dynamiki i identyfikacja. Wyd. Politechniki Szczecińskiej, Szczecin 2003.

Autor:

prof. dr hab. inż. Jan PURCZYŃSKI – Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny