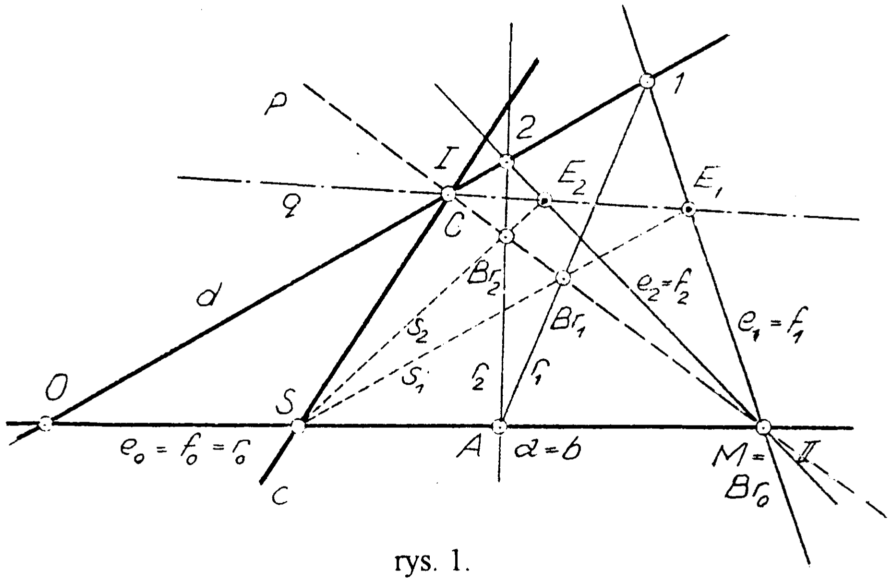
Marian PALEJ
Ośrodek Geometrii i Grafiki Inżynierskiej
Politechnika Śląska

O PEWNEJ KONSTRUKCJI UZUPEŁNIAJĄCEJ STOŻKOWE PASMA I PĘKU

Rozważmy bazę pasma stożkowych przyjętą na tyle szczególnie, że co najmniej dwie spośród danych czterech stycznych są zjednoczone, tj. $a = b$, c, d (rys. 1). Przyjmijmy ponadto dowolny pęk prostych (M) o środku leżącym na podwójnie liczonej prostej tj. $M \in a$. Spróbujmy ustalić miejsce geometryczne μ punktów styczności do stożkowych pasma - poszczególnych promieni pęku (M) . Najprostszy sposób wyznaczenia zbioru μ wydaje się polegać na zastosowaniu twierdzenia Brianchona, które wobec szczególnie przyjętej bazy pasma i środka pęku (M) oferuje pewne uproszczenia konstrukcyjne.

W szczególności (rys. 1) zauważmy, że dla wyznaczenia punktów Brianchona w kolejnych sześciobokach utworzonych przez bazę i promienie pęku stycznych korzystać będziemy ze wspólnej jednej pary punktów: z pary przeciwległych wierzchołków: $I = c \cap d$ i $II = f \cap a$. Można stąd wnioskować natychmiast, że punkty Brianchona jako leżące na prostej $I\ II$ - dla wszystkich stożkowych pasma określonych bazą i kolejnymi promieniami (stycznymi pęku (M)) będą współliniowe. Z konstrukcji Brianchona wynika, że punkty styczności prostych pęku (M) są punktami przecięcia tych prostych z odpowiednimi promieniami s_i rzutującymi punkty Brianchona ze stałego punktu $S = b \cap c$, czyli $E_i = s_i \cap f_i$ (rys. 1). Zauważmy jednak, że:



rys. 1.

$$d(1, 2, 3, \dots) \stackrel{=}{\overline{\wedge}} A(r_1, r_2, r_3, \dots) \stackrel{=}{\overline{\wedge}} S(s_1, s_2, s_3, \dots) \qquad \text{........... (1)}$$

oraz

$$d(1, 2, 3, \dots) \stackrel{=}{\overline{\wedge}} M(f_1, f_2, f_3, \dots) \qquad \text{........... (2)}$$

Stąd:

$$M(f_1, f_2, f_3, \dots) \overline{\wedge} S(s_1, s_2, s_3, \dots) \qquad \text{........... (3)}$$

Rozpatrywany zbiór punktów styczności E_i jako zbiór punktów wspólnych dwóch rzutowych pęków (3) jest więc krzywą stopnia drugiego. Pęki *(M)* i *(S)* posiadają jednak wspólny, zjednoczony promień $MS = r_o = f_o$. Oznacza to, że są one nie tylko rzutowe ale i perspektywiczne, a w rezultacie, że punkty przecięcia odpowiadających sobie promieni tych pęków leżą na prostej. Pozwala to na sformułowanie następującej relacji:

„Pasmo stożkowych określone takimi czterema stycznymi bazy, z których co najmniej jedna para jest zjednoczona np. $a = b$, c, d posiada tę własność, że pęk prostych o wierzchołku M leżącym na prostej $a = b$ (różnym od punktu styczności : $a = b$) styka się ze stożkowymi pasma w punktach współliniowych; prosta łącząca takie punkty styczności przechodzi przez punkt przecięcia się pozostałej pary prostych bazy: $C = c \cap d$." .... (4)

Własność tę dla bardzo szczególnego pasma stożkowych, pasma o wspólnym wierzchołku i ognisku ujawnił Prof. S. Szerszeń za pomocą perspektografu de la Fresnaye'a i opublikował w pracy (1).

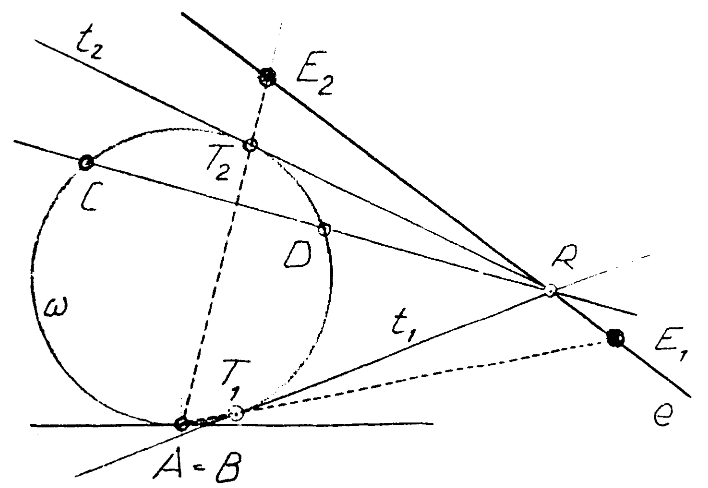
Sformułujmy jeszcze wersję dwoistą. Tłumacząc dualnie omówione konstrukcje otrzymujemy następującą własność pęku stożkowych:

„Pęk stożkowych określony taką czwórką punktów A, B, C, D, w której co najmniej jedna para jest zjednoczona np. $A = B$ posiada tę własność, że dowolna prosta przechodząca przez $A = B$ (różna od stycznej w punkcie $A = B$) jest podstawą takiego szeregu punktów, w których styczne do stożkowych pęku tworzą pęk prostych; środek tego pęku leży na prostej wyznaczonej przez pozostałą parę punktów bazy: punkty C i D. " .... (5)

Jako przykład wykorzystania własności 5 rozwiążemy następujące:

Zad. 1. Dany jest pęk stożkowych określony punktami A, B, C, D oraz dowolna prosta e nie przechodząca przez żaden z punktów podstawowych. Założenia dobrane są w ten sposób, że $A = B$ i że istnieje okrąg ω będący elementem rozważanego pęku. Należy wyznaczyć dwie stożkowe pęku przechodzące stycznie do prostej e oraz odnośne punkty styczności.

Rozwiązanie:



rys. 2

1) Skonstruujmy punkt wspólny $CD \cap e = R$. Punkt R zinterpretujmy jako środek pęku tych stycznych, które na prostej przechodzącej przez $A = B$ wycinają szereg punktów styczności (wł. 5).
2) Z punktu R poprowadźmy styczne do okręgu ω. Niech będą to proste $t_{1,2}$ styczne do okręgu w punktach $T_{1,2}$,
3) Wyznaczmy proste AT_1 i AT_2. Każda z tych prostych jest podstawą szeregu punktów styczności stycznych, które

przecinają się w punkcie R (wł. 5),

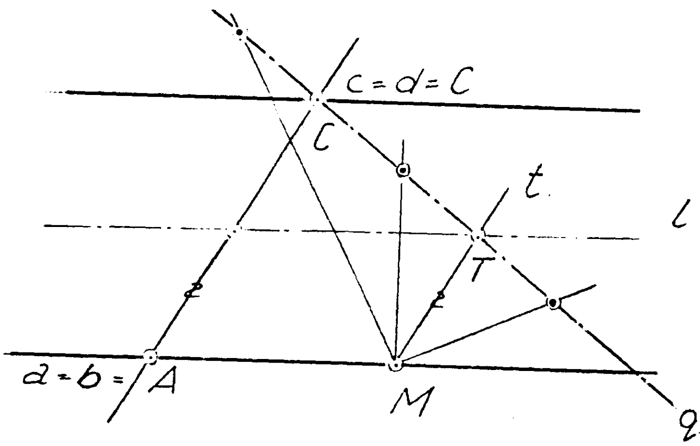
4) Punkty wspólne $AT_1 \cap e$ i $AT_2 \cap e$ są punktami styczności prostej e do dwóch stożkowych pęku określonego punktami podstawowymi A, B, C, D.

Jest przy tym widoczne, że w przypadku kiedy prosta e przecina odcinek CD nie istnieją rozwiązania rzeczywiste, gdyż z punktu wewnętrznego okręgu nie sposób skonstruować rzeczywistych jego stycznych.

Przedstawione rozwiązanie w praktyce zawężone jest do bardzo szczególnych położeń związanych z postulatem istnienia okręgu przynależnego do czwórki punktów $A = B, C, D$. Znacznie jednak szerszą grupę zadań można rozwiązać za pomocą własności (5) lub (4) w przypadku gdy nie jedna lecz dwie pary elementów bazy ulegają zjednoczeniu, tj. w przypadku pasma $a = b$ i $c = d$ lub w przypadku pęku $A = B$ i $C = D$.
Rozważmy dwa przykłady:

Zad. 2. Pasmo stożkowych dane jest dwiema parami zjednoczonych stycznych $a = b$ i $c = d$. Niech przy tym $a \,//\, c$. Wyznaczyć punkty, w których z krzywymi pasma stykają się promienie pęku prostych (M) o środku M dowolnie obranym na $a = b$.

Rozwiązanie (rys. 3)



rys. 3

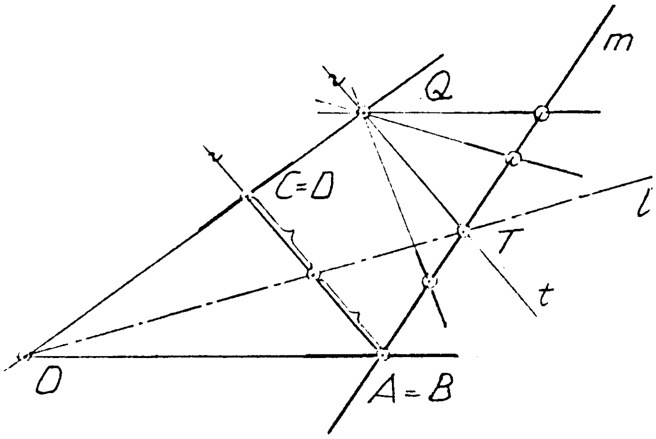
Zauważmy, że AC (gdzie $A = a \cap b$ i $C = c \cap d$) jest średnicą każdej stożkowej pasma sprzężoną z kierunkiem $a \,//\, c$. Jeżeli skonstruujemy prostą $t \,//\, AC$, $t \ni M$ - możemy wskazać jej punkt styczności do jednej ze stożkowych pasma - jest nim punkt $T = t \cap l$, gdzie l jest prostą przechodzącą przez środek odcinka AC równolegle do $a = b$
Łącząc T z punktem C otrzymujemy realizującą własność (4) prostą q
Punkty przecięcia prostą CT prostych pęku (M) stanowią rozwiązanie zadania.

W przypadku ogólniejszych założeń, tj. dla $a \not\parallel c$ konstrukcja się komplikuje bardzo nieznacznie. Wówczas bowiem prosta AC jest nie średnicą stożkowych pasma ale „jedynie" ich biegunową względem punktu $O = a \cap c$. Wystarczy wówczas poprowadzić prostą l łączącą punkt O ze środkiem odcinka AC by w dalszym ciągu powtórzyć konstrukcję z poprzedniego zadania. Prosta $m \,//\, AC$ oraz l ustalają punkt T, który zrzutowany z punktu C wyznacza prostą wycinającą na pęku (M) punkty styczności kolejnych stożkowych pasma.

Konstrukcja zbudowana na rozważaniach nie pasma lecz pęku jest w tym przypadku równoważna choć nieco inaczej interpretowana.

Zad. 3. Niech dany będzie pęk stożkowych o bazie zawierającej cztery punkty z założeniem $A = B$ i $C = D$. Wyznaczyć proste styczne do stożkowych pęku w dowolnie obranych punktach szeregu *(m)* którego podstawa przechodzi przez punkt podwójny bazy np. $A = B$.

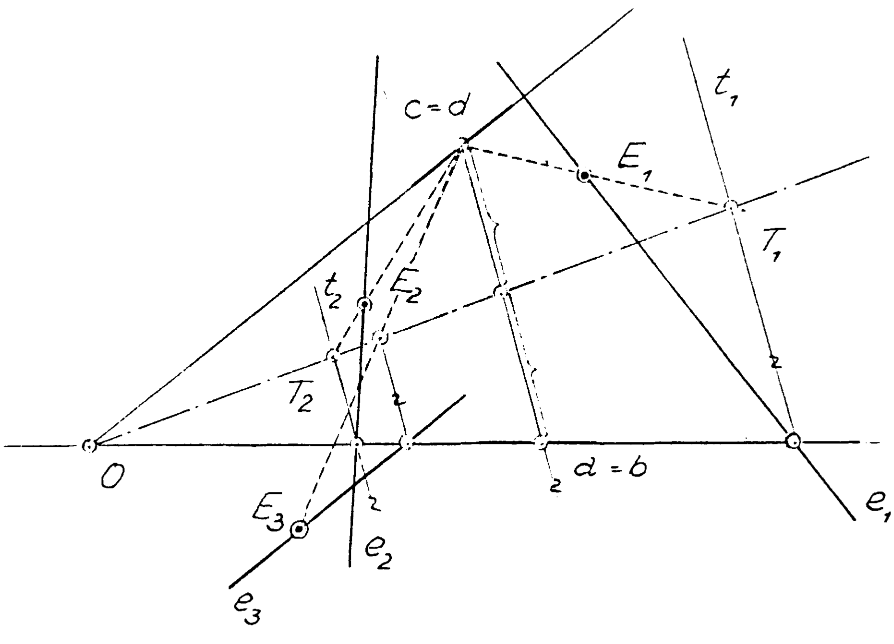
Rozwiązanie (rys. 4):



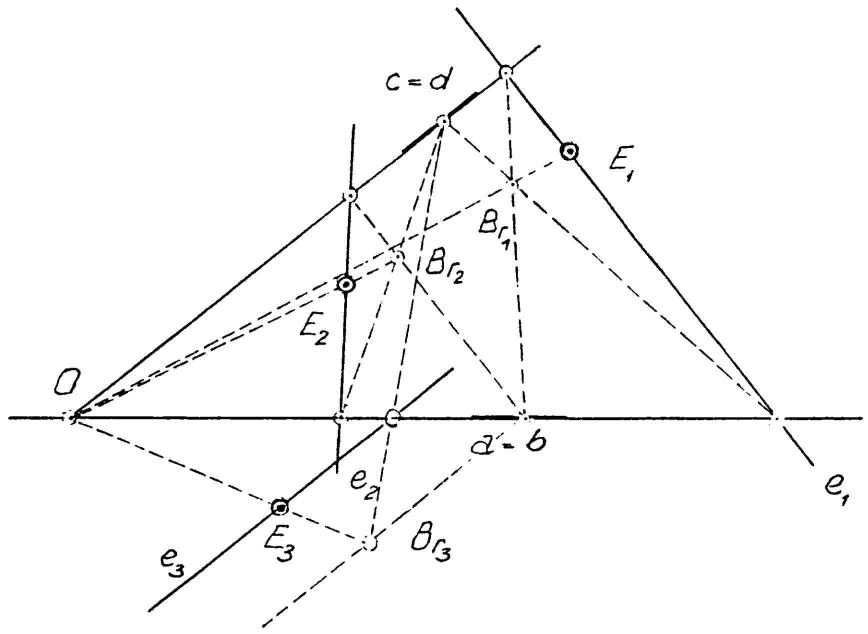
rys. 4

Prosta l łącząca punkt $AB \cap CD = O$ ze środkiem odcinka AC zawiera takie punkty stożkowych pęku, w których styczne do stożkowych mają kierunek AC. Skoro więc znajdziemy $T = l \cap m$ możemy skonstruować w tym punkcie prostą t należącą do pęku stycznych (własność 5). Środek pęku jest punktem $Q = t \cap CD$. Dla poszczególnych punktów szeregu *(m)* styczne są promieniami pęku o środku Q.

Warto jeszcze zwrócić uwagę na fakt, że pomimo prostoty konstrukcji jaką w tych szczególnych warunkach oferuje zwyczajne zastosowanie twierdzenia Brianchona - przedstawione propozycje wykorzystania własności (4) pozwalają na jeszcze dalej idące uproszczenia graficzne. Dla różnych n prostych, jak pokazano na rys. 5 i 6 istnieje możliwość „zaoszczędzenia" $n - 2$ linii konstrukcyjnych. Jeżeli proste te tworzą pęk o środku leżącym na $a = b$ lub $c = d$ oszczędność ta wzrasta do wartości $3(n - 1)$. Prostota konstrukcji pozwala na pominięcie szczegółowych objaśnień odnośnego materiału ilustracyjnego (rys. 5 i 6).



rys. 5



rys. 6

LITERATURA:

[1]. S. Szerszeń: "Niektóre własności ognisk stożkowych ujawnione za pomocą perspektografu de La Freshaye'a" , Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego - seria: Prace matematyczne I.2, 1955

A COMPLEMENTARY CONSTRUCTION OF PENCILS AND STREAKS OF CONICS

A special case of pencils and streaks of conics is considered. In this case, if the centre of pencil of lines (or the base of points range) belongs to the double basis element, the points of tangency of particular rays of the pencil (or the tangents passing through particular points of range) lie on one straight line (passing through one point).

In the paper the examples of using the above mentioned properties to complement the conics of a pencil, or of a streak, are presented.