POROWNANIE METOD WIELOKRYTERIALNEJ OPTYMALIZACJI STATYCZNEJ

COMPARISON OF MULTICRITERIA STATIC OPTIMIZATION METHODS

Józef LISOWSKI
j.lisowski@we.umg.edu.pl

Uniwersytet Morski w Gdyni
Wydział Elektryczny
Katedra Automatyki Okrętowej

STRESZCZENIE

W artykule przedstawiono metody optymalizacji wielokryterialnej statycznej oparte na zbiorze punktów Pareto optymalnych w przestrzeni wariantów. Dokonano porównania tych metod na przykładzie dwukryterialnej optymalizacji kursu statku.

SUMMARY

The article presents methods of static multicriteria optimization based on the collection of optimal Pareto points in the space of variants. A comparison of these methods was made on the example of a bi-criteria optimization of the ship's course.

Słowa kluczowe: transport, logistyka, optymalizacja, informatyka
Keywords: transport, logistics, optimization, computer science

WSTĘP

Optymalizacja wielokryterialna stanowi najbardziej naturalną metodę wnioskowania, polegającą na wyznaczeniu optymalnego rozwiązania, akceptowalnego z punktu widzenia założonych kryteriów. Zadanie optymalizacji wielokryterialnej polega na znalezieniu takiego wektora zmiennych decyzyjnych:

$$\boldsymbol{x}=[x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_N],\ i=1, 2, \ldots, N \tag{1}$$

spełniającego pewne ograniczenia nierównościowe i równościowe zmiennych. decyzyjnych:

$$\boldsymbol{g}_j(\boldsymbol{x})<0,\ j=1,2,\ \ldots,\ J \tag{2}$$

$$\boldsymbol{h}_l(\boldsymbol{x})=0,\ l=1, 2, \ldots, L \tag{3}$$

który optymalizuje wektor funkcji celu decyzyjnego jako wskaźnika jakości sterowania:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{K} F_k(\boldsymbol{x}),\ k=1, 2, \ldots, K \tag{4}$$

Optymalizacja wielokryterialna występuje w wielu różnych dziedzinach: w projektowaniu produktu i procesu produkcji, finansów, projektowaniu statków, samochodów i samolotów, w przemyśle chemicznym - wszędzie tam, gdzie optymalne decyzje muszą być podjęte w obecności kompromisów pomiędzy dwoma lub więcej sprzecznymi celami (Ameljańczyk, 1986; Ehrgott, 2005). Przykładem wielokryterialnej optymalizacji jest maksymalizacja zysków i minimalizacja kosztów produktu, maksymalizacja wydajności przy ograniczaniu zużycia paliwa pojazdu, czy też obniżenie masy urządzenia przy jednoczesnej maksymalizacji wytrzymałości poszczególnych jego komponentów (Galas, 1987; Steuer, 1986). Przy realizacji tych wymagań występują najczęściej sprzeczności, to znaczy w danej przestrzeni zmiennych decyzyjnych $\boldsymbol{x}$ poszczególne kryteria nie mogą jednocześnie osiągnąć swoich wartości ekstremalnych. Wówczas mówimy, że zachodzi potrzeba znalezienia rozwiązania kompromisowego, to jest takiego zbioru zmiennych decyzyjnych, który możliwie najlepiej spełnia wymagania określone przez wskaźnik jakości jako funkcję jakości sterowania $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$.

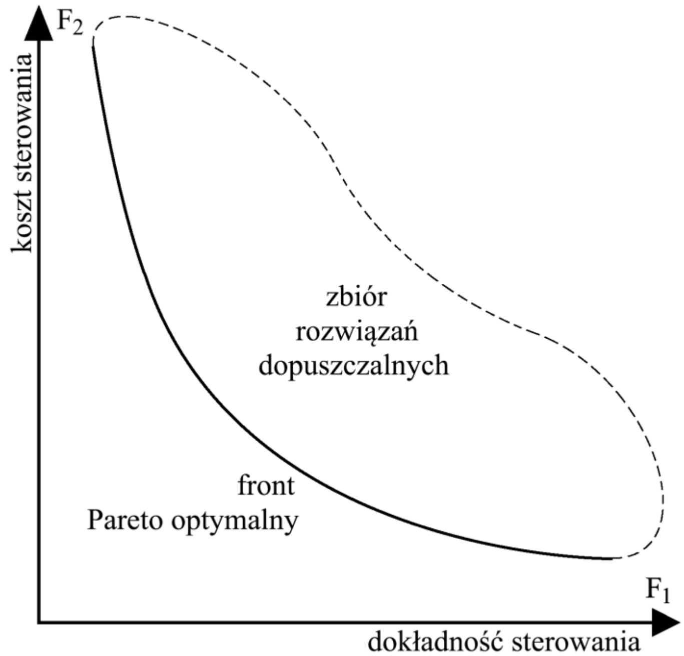
1. ZBIÓR PUNKTÓW PARETO OPTYMALNYCH W PRZESTRZENI WARIANTÓW

Znana od dawna zasada 80/20 głosi, że 80% wyników wypływa tylko z 20% przyczyn, inaczej mówiąc skromniejszymi środkami i mniejszym wysiłkiem można osiągnąć większe efekty. Rozwinięcia tej zasady dokonał w roku 1897 włoski ekonomista Vilfred Pareto. Definicję zbioru punktów Pareto optymalnych w przestrzeni wariantów można wyrazić następująco: „Dany wariant jest Pareto optymalny jeżeli żadna z jego ocen nie może być poprawiona bez pogorszenia co najmniej jednej z pozostałych".

Zbiór niezdominowanych rozwiązań z całej dopuszczalnej przestrzeni poszukiwań nazywa się zbiorem optymalnym w sensie Pareto, a rozwiązania te tworzą tzw. front Pareto, a rozwiązania z tego zbioru nie są zdominowane przez żadne inne więc w tym sensie są optymalnymi rozwiązaniami dla problemu optymalizacji wielokryterialnej. Ponieważ warianty dopuszczalne nie będące Pareto optymalne można poprawić dla wszystkich kryteriów, to wprowadzenie pojęcia Pareto optymalnego zredukowało zagadnienie ustalenia rozwiązania zadania z wieloma kryteriami do wyboru punktu z tego zbioru (Ehrgott, 2002).

Jako przykład wybrano zadanie wielokryterialnej optymalizacji kursu statku ze względu na dwa kryteria (Lisowski, 2017):

– dokładności utrzymania zadanego kursu $F_1(\Delta\psi)$, mierzonej wielkością tzw. myszkowania ruchu statku $\Delta\psi$ wzdłuż zadanego kursu, powodującego wydłużenie drogi statku do portu przeznaczenia;
– kosztu sterowania $F_2(\alpha)$, mierzonego dodatkowym zużyciem paliwa związanym z wydłużeniem drogi statku przez jego myszkowanie oraz powstawaniem siły oporu na płetwie sterowej podczas wychyleń steru α, powodującej spadek prędkości statku i przedłużenie czasu rejsu (Rysunek 1).



Rys. 1. Front Pareto jako zbiór rozwiązań niezdominowanych przy optymalizacji dwukryterialnej wskaźników jakości F_1 i F_2 procesu sterowania statkiem na zadanym kursie.
Źródło: Opracowanie własne.

Pozostaje jednak pytanie, czy potrafimy jednoznacznie stwierdzić, który punkt Pareto optymalny jest najlepszy. Nad odpowiedzią na to pytanie przez wiele lat pracowali filozofowie i praktycy (Białaszewski, 2007; Eshenauer, 1990; Galas, 1988; Kaliszewski, 2008).

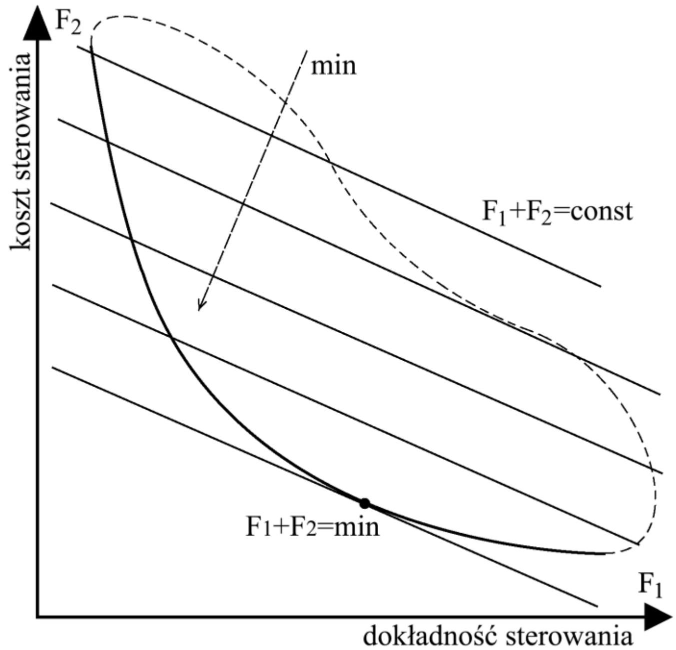
Można wyróżnić następujące metody rozwiązania tego zadania:

– zasada utylitaryzmu Benthama;
– zasada sprawiedliwości Rawlsa;
– punkt odniesienia Salukvadze;
– metoda sum ważonych;

– metoda ε–ograniczeń;
– metoda programowania celowego (Kauf, 2017; Płonka, 2017; Roy, 1990).

2. ZASADA UTYLITARYZMU BENTHAMA

Pod koniec XVIII wieku angielski filozof i ekonomista Jeremy Bentham sformułował następującą zasadę utylitarystyczną: „Największa użyteczność dla największej liczby kryteriów". Posłużenie się zasadą J. Benthama pozwala przyjąć jako kryterium wyboru sumę kryteriów cząstkowych (rysunek 2).



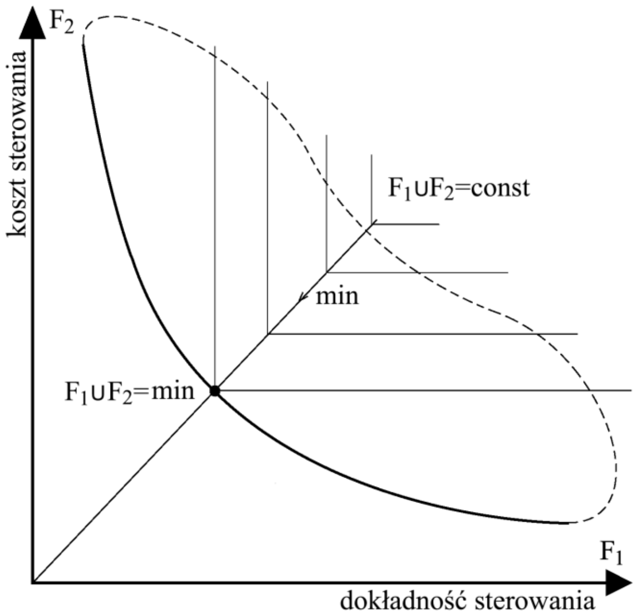
Rys. 2. Suma kryteriów cząstkowych według J. Benthama i rozwiązanie optymalne na froncie Pareto
Źródło: Opracowanie własne.

Od zasady równej wartości można odejść przypisując wskaźnikom jakości stosowne współczynniki wagi, ale problemem pozostaje określenie ich wartości.

3. ZASADA SPRAWIEDLIWOŚCI RAWLSA

W 1971 roku amerykański filozof John Rawls sformułował następującą zasadę sprawiedliwości: „Najmniejsza użyteczność, największa jak tylko to możliwe". Na rysunku 3 przedstawiono zasadę maksy-minimalizacji J. Rawlsa.

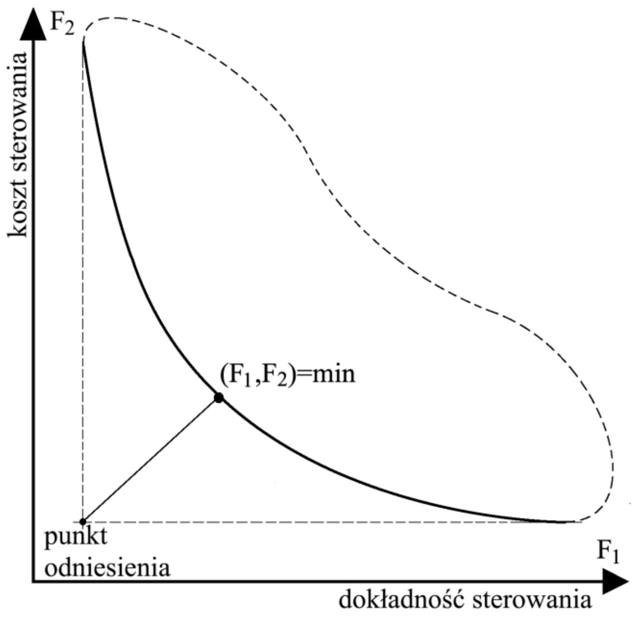
Wyznaczenie rozwiązania sprawiedliwego według J. Rawlsa jest zagadnieniem trudniejszym niż znalezienie rozwiązania w sytuacji posługiwania się jako agregującym kryterium wyboru ważonej sumy.



Rys. 3. Maksy-minimalizacja kryteriów cząstkowych według J. Rawlsa i rozwiązanie optymalne na froncie Pareto
Źródło: Opracowanie własne.

4. PUNKT ODNIESIENIA SALUKVADZE

W 1971 roku gruziński automatyk Mindia E. Salukvadze zaproponował podejście oparte na pojęciu punktu odniesienia: „W zbiorze Pareto poszukuje się punktu najbliższego w stosunku do punktu odniesienia”. W zbiorze Pareto poszukuje się punktu najbliższego w stosunku do punktu odniesienia (Rysunek 4).



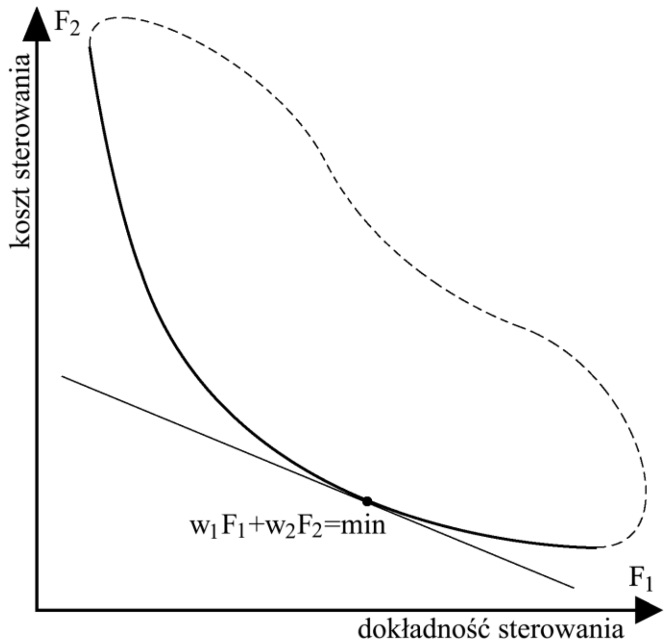
Rys. 4. Podejście wykorzystujące punkt odniesienia według M. E. Salukvadze i rozwiązanie optymalne na froncie Pareto
Źródło: Opracowanie własne.

Salukvadze zaproponował jako punkt odniesienia, punkt przecięcia stycznych do zbioru dopuszczalnych rozwiązań.

5. METODA SUM WAŻONYCH BENSONA

W metodzie amerykańskiego informatyka Harrolda Phillipa Bensona, opisanej w 1988 roku, wykorzystuje się metrykę odległości badanego rozwiązania od rozwiązania idealnego spełniającego wszystkie kryteria. Minimalizacja odległości pomiędzy rozwiązaniem idealnym i badanym pozwala znaleźć najlepsze rozwiązanie należące do zbioru rozwiązań dopuszczalnych.

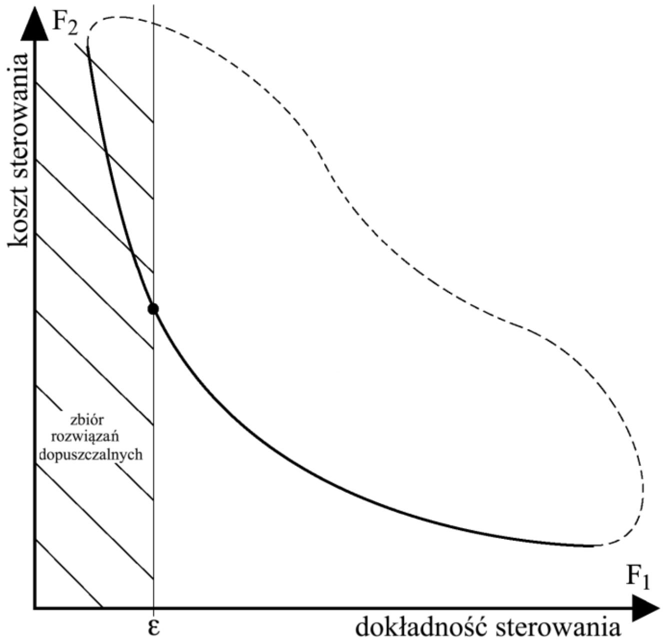
Interpretację graficzną tej metody stanowi poszukiwanie stycznej do zbioru dopuszczalnego, nachylonej pod kątem określonym przez współczynniki wagi *w*. Wektor ***W*** utworzony ze współczynników *w* jest prostopadły do poszukiwanej stycznej, a rozwiązanie stanowią punkty wspólne brzegu zbioru i stycznej (Rysunek 5).



Rys. 5. Metoda sum ważonych i rozwiązanie optymalne na froncie Pareto
Źródło: Opracowanie własne.

6. METODA ε–OGRANICZEŃ HAIMESA

Metoda opracowana przez Haimesa w 1971 roku, polega na wybraniu jednej z funkcji kryterialnych jako funkcji celu i utworzenie ograniczeń z pozostałych funkcji kryterialnych. Dokonuje się wyboru najważniejszego kryterium przeznaczonego do optymalizacji, przy założeniu, że wartości pozostałych kryteriów spełnią minimalne założone wymagania (Rysunek 6).



Rys. 6. Metoda ε-ograniczeń i rozwiązanie optymalne na froncie Pareto
Źródło: Opracowanie własne.

7. METODA PROGRAMOWANIA CELOWEGO

Metoda programowania celowego polega na zastąpieniu zadania wielokryterialnego zadaniem w postaci:

$$\begin{aligned} &\min F = \min_{x} \alpha \\ &F_1(x) - w_1\alpha \le c_1 \\ &F_2(x) - w_2\alpha \le c_2 \\ &\ldots \\ &F_K(x) - w_K\alpha \le c_K \end{aligned} \tag{5}$$

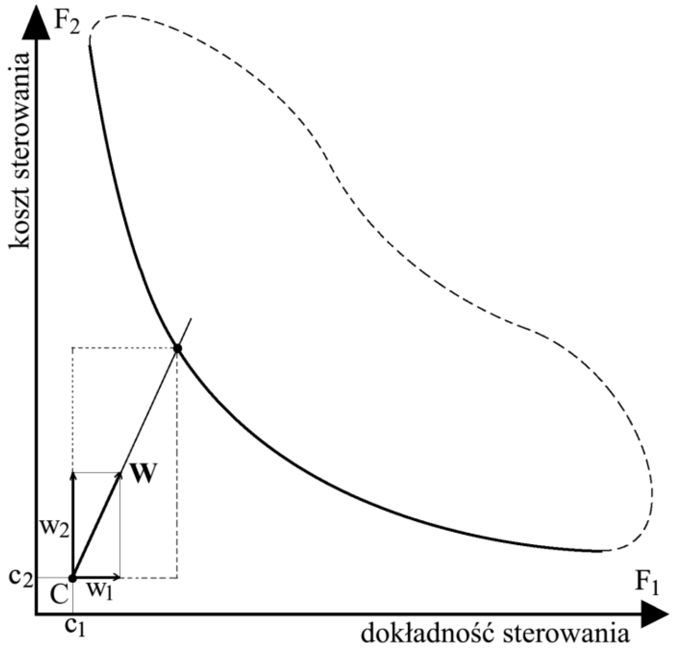
gdzie:

$(c_1, c_2,\ldots, c_K)$ – współrzędne punktu C określającego cel poszukiwań,

$(w_1, w_2,\ldots, w_K)$ – współrzędne wektora $\boldsymbol{W}$ określającego kierunek poszukiwań.

Wówczas zadanie zostaje sprowadzone do poszukiwania punktu C ze zbioru rozwiązań dopuszczalnych, w którym wartości kryteriów są najbliższe pewnym idealnym wartościom określonym przez współrzędne $(c_1, c_2, \ldots, c_K)$.

Poszukiwania optimum są prowadzone w przestrzeni kryteriów, zaczynając od punktu C w kierunku określonym przez wektor $\boldsymbol{W}$. Rozwiązanie stanowi punkt prostokąta o bokach równoległych do osi układu, lewym dolnym rogu w punkcie C i przekątnej równoległej do wektora ***W*** (Rysunek 7).



Rys. 7. Metoda programowania celowego i rozwiązanie optymalne S na froncie Pareto
Źródło: Opracowanie własne.

Wartości współrzędnych punktu $C(c_1, c_2)$ pochodzą od osoby podejmującej arbitralną decyzję. Wybór składowych wektora $\boldsymbol{W}(w_1, w_2)$ decyduje o ważności poszczególnych kryteriów optymalizacji.

8. PODSUMOWANIE

Przedstawione metody optymalizacji wielokryterialnej statycznej stanowią najszerzej opisaną część wszystkich metod optymalizacji wielokryterialnej. Różnice w wartości wyznaczonego optimum najbardziej zależą od kształtu frontu Pareto konkretnego zadania optymalizacji.

LITERATURA

Ameljańczyk, A. (1986). *Optymalizacja wielokryterialna.* Warszawa: Wydział Wydawniczy WAT.

Białaszewski, T. (2007). *Wielokryterialna optymalizacja parametryczna układów z zastosowaniem algorytmów ewolucyjnych*. Gdańsk: PWNT.

Ehrgott, M. (2005). *Multicriterial optimization.* Berlin: Springer.

Ehrgott, M., Gandibleux, X. (2002). *Multiple criteria optimization: state of the art annotated bibliographic surveys.* New York: Kluwer Academic Press.

Eshenauer, H., Koski, J., Osyczka, A. (1990). *Multicriteria design optimization: procedures and application.* Berlin: Springer-Verlag.

Galas, Z., Nykowski, I., Żółkiewski, Z. (1987). *Programowanie wielokryterialne*. Warszawa: PWE.

Galas, Z., Nykowski, I. (1988). *Zbiór zadań z programowania matematycznego*, cz. I i II. Warszawa: PWE.

Kaliszewski, I. (2008). *Wielokryterialne podejmowanie decyzji*. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne.

Kauf, S., Tłuczak, A. (2017). *Optymalizacja decyzji logistycznych*. Warszawa: Difin.

Lisowski, J. (2017). *Metody optymalizacji*. Gdynia: Wydawnictwo Akademii Morskiej, 200-210.

Płonka, S. (2017). *Wielokryterialna optymalizacja procesów wytwarzania części maszyn*. Warszawa: Wydawnictwo WNT.

Roy, B. (1990). *Wielokryterialne wspomaganie decyzji*. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne.

Steuer, R.E. (1986). *Multiple criteria optimization: theory computation and application.* New York: Wiley.