

Podstawowe warianty analitycznej metody projektowania układów geometrycznych toru

Władysław KOC¹

Streszczenie

W artykule zostały przedstawione (i rozszerzone) podstawowe założenia analitycznej metody projektowania układów geometrycznych toru. Poszczególne elementy układu (odcinki proste, łuki kołowe i krzywe przejściowe) są opisywane za pomocą równań matematycznych i łączone ze sobą z zachowaniem warunku zgodności stycznych. Metoda obejmuje różne przypadki projektowe: przypadek symetryczny, z krzywymi przejściowymi tego samego rodzaju i tej samej długości, przypadek niesymetryczny powstały w wyniku zróżnicowania rodzaju i długości krzywych przejściowych, jak również sposoby projektowania łuków koszowych i łuków odwrotnych. W artykule przedstawiono także szczegółową procedurę projektowania dla typowego, najbardziej rozpowszechnionego przypadku, w którym występuje symetryczne usytuowanie krzywych przejściowych względem łuku kołowego. Rozpatrzono dwa podstawowe warianty różniące się usytuowaniem lokalnego układu współrzędnych. W wariantcie standardowym (uniwersalnym) położenie początku tego układu w układzie PL-2000 nie jest znane i zostaje określone dopiero w końcowej fazie procedury. Z tego powodu mogą pojawiać się pewne problemy interpretacyjne. W przypadku symetrycznego układu geometrycznego trudności tych można jednak uniknąć dzięki wprowadzonej modyfikacji polegającej na zlokalizowaniu początku lokalnego układu współrzędnych w punkcie przecięcia obydwu kierunków głównych trasy. W artykule przedstawiono algorytmy obliczeniowe dla obydwu omawianych wariantów. Korzyści wynikające z wprowadzonej modyfikacji ilustrują zamieszczone przykłady obliczeniowe.

Słowa kluczowe: droga kolejowa, analityczna metoda projektowania, modyfikacja lokalnego układu współrzędnych, algorytm obliczeniowy, przykładowe układy geometryczne

1. Wprowadzenie

Do opracowania dokumentacji projektowej w dziedzinie dróg kolejowych od wielu lat jest wykorzystywane komercyjne oprogramowanie komputerowe [1, 2]. Można odnieść wrażenie, że ma to wpływ na zmniejszenie intensywności prowadzonych obecnie prac badawczych dotyczących metodyki projektowania układów geometrycznych toru. Takie prace są jednak prowadzone [3–6], a ich zakres jest często ograniczony do zagadnień szczegółowych takich jak krzywe przejściowe [7] czy rozjazdy kolejowe [8, 9]. W wydanej ostatnio książce [10] tematyce projektowania układów geometrycznych toru poświęcono niewielki rozdział. Są natomiast na szeroką skalę rozwijane różnorodne prace badawcze dotyczące określenia układu geometrycznego toru na drodze pomiarowej [11–21].

W 2009 roku, w zespole naukowym Politechniki Gdańskiej i Akademii Marynarki Wojennej w Gdyni były prowadzone eksperymenty terenowe polegające

na zastosowaniu odbiorników GNSS (*Global Navigation Satellite System*), zainstalowanych na poruszającym się pojeździe szynowym, do wyznaczania współrzędnych osi toru kolejowego [22]. Działania te, rozwijane w następnych latach [23], określono mianem mobilnych pomiarów satelitarnych.

Mobilne pomiary satelitarne dostarczają w bardzo krótkim czasie olbrzymią liczbę współrzędnych – stosowane obecnie odbiorniki mają częstotliwość dochodzącą do 100 Hz. W 2009 roku ta częstotliwość była znacznie mniejsza, ale i tak – w porównaniu do tradycyjnych pomiarów geodezyjnych – liczba uzyskanych danych pomiarowych była nieporównywalnie większa. Ta sytuacja była inspiracją, aby metodykę projektowania układów geometrycznych toru odpowiednio przystosować do pomiarów satelitarnych.

W pracy [24] po raz pierwszy przedstawiono założenia tzw. analitycznej metody projektowania (AMP); mówiąc ściślej dotyczyły one projektowania rejonu zmiany kierunku trasy kolejowej. W metodzie tej

¹ Prof. dr hab. inż.; Politechnika Gdańska, Katedra Inżynierii Transportowej; e-mail: kocwl@pg.edu.pl.

poszczególne elementy układu (odcinki proste, łuki kołowe i krzywe przejściowe) są opisywane za pomocą równań matematycznych i łączone ze sobą z zachowaniem warunku zgodności stycznych. W pracy [24] rozpatrywano przypadek symetryczny, charakteryzujący się krzywymi przejściowymi tego samego rodzaju i tej samej długości. Praca [25] zawiera uogólnienie omawianej metody oraz dotyczy projektowania układu niesymetrycznego, powstałego w wyniku zróżnicowania rodzaju i długości krzywych przejściowych. Stosując analogiczne podejście jak w podanych przypadkach, opracowano również metodę projektowania łuków koszowych [26] i łuków odwrotnych [27].

2. Podstawowe założenia analitycznej metody projektowania

Podstawę projektowania trasy kolejowej w płaszczyźnie poziomej stanowi utworzenie jej poligonu, czyli układu przecinających się kierunków głównych. Poligon trasy jest lokalizowany na planie sytuacyjno-wysokościowym, określonym w odpowiednim państwowym systemie odniesień przestrzennych. W Polsce – dla współrzędnych płaskich – obowiązuje układ PL-2000 [28], utworzony na podstawie matematycznie jednoznacznego przyporządkowania punktów na elipsoidzie odniesienia GRS 80 [29] odpowiednim punktom na płaszczyźnie, według teorii odwzorowania Gaussa-Krügera [30]. Poszczególne kierunki główne mogą być zapisane w postaci równania:

$$X = A_i + B_i Y, \quad (1)$$

w którym Y oznacza wartości współrzędnych płaskich wschodnich, X – wartości współrzędnych północnych, zaś A_i i B_i są współczynnikami równania danej prostej.

Z punktu widzenia określenia rzeczywistego kierunku trasy, kluczową wartość stanowi współczynnik nachylenia prostej $B_i = \tan \varphi_i$. Wyznaczenie kątów nachylenia sąsiednich prostych φ_i i φ_{i+1} względem osi Y pozwala na określenie podstawowej danej do projektowania – kąta zwrotu trasy α . Wartości φ_i i φ_{i+1} mogą być dodatnie lub ujemne, przy czym muszą być spełnione warunki: $\varphi_i \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ i $\varphi_{i+1} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

W zależności od występującej sytuacji geometrycznej, kąt α wyznacza się za pomocą jednego z dwóch wzorów:

$$\alpha = |\varphi_{i+1} - \varphi_i| \quad (2a)$$

$$\text{lub } \alpha = \pi - |\varphi_{i+1} - \varphi_i| \quad (2b)$$

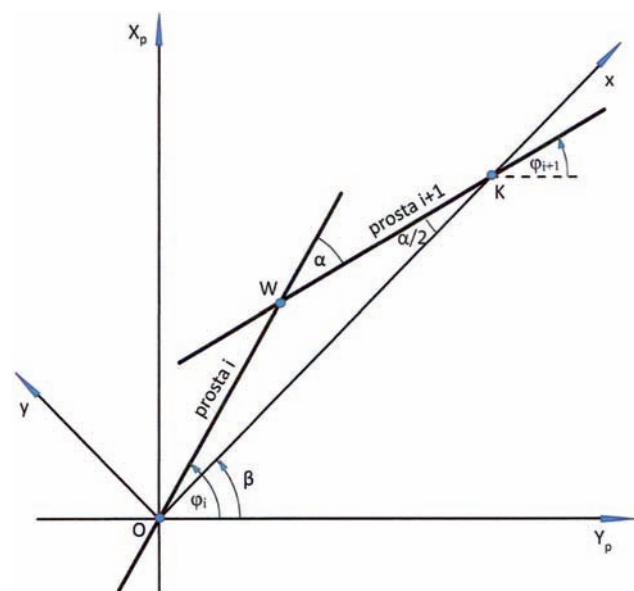
Znajomość równań sąsiednich kierunków głównych trasy umożliwia wyznaczenie współrzędnych ich punktu przecięcia, tj. punktu $W(Y_W, X_W)$. Współrzędne Y_W i X_W są następujące:

$$Y_W = \frac{A_{i+1} - A_i}{B_i - B_{i+1}} \quad (3)$$

$$X_W = A_i + \frac{A_{i+1} - A_i}{B_i - B_{i+1}} B_i \quad (4)$$

W omawianej metodzie, projektowanie rejonu zmiany kierunku trasy nie odbywa się jednak w układzie PL-2000, lecz w odpowiednim lokalnym układzie współrzędnych kartezjańskich x, y , którego podstawę stanowią symetrycznie ustawione sąsiednie kierunki główne. Na rysunku 1 pokazano dwa przecinające się kierunki główne (prostą i oraz prostą $i+1$), przy czym początek układu PL-2000 został przesunięty do wybranego punktu $O(Y_O, X_O)$, usytuowanego na prostej i . Przedstawiona sytuacja dotyczy standardowego (tj. uniwersalnego) wariantu analitycznej metody projektowania. Szczegółowa procedura projektowania dla tego wariantu została przedstawiona w punkcie 3 niniejszego artykułu.

W kolejnym punkcie został opisany zmodyfikowany wariant analitycznej metody projektowania układów geometrycznych toru. W tym wariantcie, którego ogólny schemat pokazano na rysunku 5, przesunięcie początku układu PL-2000 następuje do jednoznaczenie określonego punktu $W(Y_W, X_W)$.



Rys. 1. Lokalny układ współrzędnych x, y w wariantcie standardowym AMP na tle przecinających się kierunków głównych trasy, w przesuniętym układzie PL-2000 [opracowanie własne]

Aby można było uzyskać symetryczne ustawienie kierunków głównych, w obu wariantach należy dodatkowo dokonać obrotu przesuniętego układu PL-2000 o odpowiedni kąt β .

$$\beta = \pi + \left(\varphi_i + \frac{\alpha}{2} \right) \quad (5d)$$

$$\beta = \left(\varphi_i - \frac{\alpha}{2} \right) - \pi \quad (5e)$$

3. Standardowy wariant projektowania

3.1. Charakterystyka ogólna

Operację utworzenia lokalnego układu współrzędnych x, y w standardowym wariantcie projektowania zilustrowano na rysunku 1. Początek tego układu, czyli punkt $O(0,0)$, odpowiada początkowi układu PL-2000 przesuniętemu do punktu $O(Y_o, X_o)$. Natomiast żeby można było właściwie ustawić oś odciętych x , należy dokonać obrotu układu Y_p, X_p o kąt β względem punktu O . Wartość tego kąta wyznacza się za pomocą jednego spośród wzorów (5a) ÷ (5f).

$$\beta = \varphi_i - \frac{\alpha}{2} \quad (5a)$$

$$\beta = \varphi_i + \frac{\alpha}{2} \quad (5b)$$

$$\beta = \pi + \left(\varphi_i - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (5c)$$

W tabelicy 1 zestawiono charakterystyki wszystkich występujących przypadków geometrycznych. Przez Y_{PW} i X_{PW} oznaczono współrzędne wierzchołka W (w przesuniętym układzie (PL-2000)). Oznaczenia (+) i (-) określają wartości dodatnie i ujemne, zaś (L) i (P) – kierunki zwrotu trasy (obrotu układu) w lewo lub w prawo. Przytoczono również numerację obowiązujących wzorów na kąty α i β .

W lokalnym układzie współrzędnych wartości x i y wyznacza się za pomocą wzorów [31]:

$$x = (Y - Y_o) \cos \beta + (X - X_o) \sin \beta \quad (6)$$

$$x = -(Y - Y_o) \sin \beta + (X - X_o) \cos \beta \quad (7)$$

przy czym w przypadku obrotu układu w lewo uwzględnia się dodatnią wartość kąta β , a w przypadku obrotu

Tabela 1

Charakterystyki występujących przypadków zmiany kierunku trasy kolejowej w standardowym wariantcie projektowania

Lp.	Odcięta Y_{PW}	Rzędna X_{PW}	Zwrot trasy	Kąt φ_i	Kąt φ_{i+1}	Kąt α	Kąt β	Obrót układu	Rzędna y
1	(+)	(+)	(P)	(+)	(+)	(2a)	(5a)	(L)	(+)
2	(+)	(+)	(P)	(+)	(-)	(2a)	(5a)	(L)	(+)
3	(+)	(+)	(L)	(+)	(-)	(2b)	(5b)	(L)	(-)
4	(+)	(+)	(L)	(+)	(+)	(2b)	(5b)	(L)	(-)
5	(-)	(+)	(P)	(-)	(+)	(2b)	(5c)	(L)	(+)
6	(-)	(+)	(P)	(-)	(-)	(2b)	(5c)	(L)	(+)
7	(-)	(+)	(L)	(-)	(-)	(2b)	(5d)	(L)	(-)
8	(-)	(+)	(L)	(-)	(+)	(2a)	(5d)	(L)	(-)
9	(-)	(-)	(P)	(+)	(+)	(2a)	(5e)	(P)	(-)
10	(-)	(-)	(P)	(+)	(-)	(2a)	(5e)	(P)	(-)
11	(-)	(-)	(L)	(+)	(-)	(2b)	(5f)	(P)	(-)
12	(-)	(-)	(L)	(+)	(+)	(2b)	(5f)	(P)	(-)
13	(+)	(-)	(P)	(-)	(+)	(2b)	(5a)	(P)	(+)
14	(+)	(-)	(P)	(-)	(-)	(2b)	(5a)	(P)	(+)
15	(+)	(-)	(L)	(-)	(-)	(2a)	(5b)	(P)	(-)
16	(+)	(-)	(L)	(-)	(+)	(2a)	(5b)	(P)	(-)

[Opracowanie własne].

w prawo – jego wartość ujemną. Kąty nachylenia prostych wyznaczających kierunki główne są następujące:

- przy dodatnich wartościach rzędnych y (przypadki 1, 2, 5, 6, 13, 14 w tablicy 1):

$$\bar{\varphi}_i = \frac{\alpha}{2}, \quad \bar{\varphi}_{i+1} = -\frac{\alpha}{2} \quad (8)$$

- przy ujemnych wartościach rzędnych y (przypadki 3, 4, 7 ÷ 12, 15, 16 w tablicy 1):

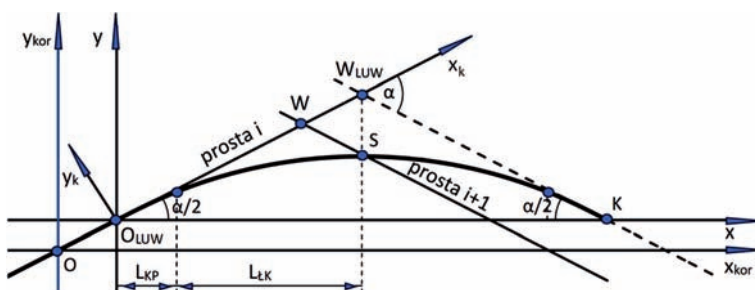
$$\bar{\varphi}_i = -\frac{\alpha}{2}, \quad \bar{\varphi}_{i+1} = \frac{\alpha}{2} \quad (9)$$

Aby zaprojektować układ geometryczny rejonu zmiany kierunku trasy, należy określić jego podstawowe parametry związane z zakładaną prędkością jazdy pociągów V . Wyznaczenie współrzędnych osi toru w układzie x, y wymaga uprzedniego określenia – oprócz kąta zwrotu trasy α – następujących danych:

- promienia R łuku kołowego,
- przechyłki h_0 na łuku,
- rodzaju i długości przyjętych krzywych przejściowych.

Przedstawiona dalej standardowa procedura projektowania dotyczy typowego, najbardziej rozpowszechnionego przypadku, w którym występuje symetryczne usytuowanie krzywych przejściowych względem łuku kołowego [24]. Zarówno w tym, jak również w innych przypadkach (opisanych w pracach [25–27]), w fazie początkowej położenie początku lokalnego układu współrzędnych x, y względem układu PL-2000 nie jest określone, ma ono zatem charakter umowny. Pełna integracja lokalnego układu współrzędnych (LWU) i układu PL-2000 wymaga przeprowadzenia procedury projektowania w LWU prawie do samego końca.

Projektowanie układu geometrycznego odbywa się w kilku etapach. Rozpatrzono tutaj przypadek zwrotu trasy w prawo (rys. 2). Przy zwrocie trasy w lewo uzyskuje się ujemne wartości rzędnych y ; aby wykorzystywać opisany niżej algorytm, trzeba dokonać lustrzanego odbicia tych rzędnych względem osi odciętych i operować wartościami $\bar{y} = -y$.



3.2. Określenie współrzędnych krzywej przejściowej w pomocniczym układzie współrzędnych x_k, y_k

Rozpoczyna się od przeprowadzenia przez punkt $O_{LWU}(0,0)$ w lokalnym układzie współrzędnych x, y prostej imitującej kierunek główny i , nachylonej pod kątem $\alpha/2$ do osi x . Jej równanie jest następujące:

$$y = \tan \frac{\alpha}{2} x \quad (10)$$

Prosta (10) stanowi oś odciętych pomocniczego układu współrzędnych x_k, y_k , związanego z krzywą przejściową.

Zgodnie z ustaleniami podanymi w pracy [25], postać prawidłowej krzywej przejściowej wynika z równania jej krzywizny $\kappa(l)$, gdzie l oznacza położenie danego punktu krzywej mierzone po jej długości. Wyznaczona na tej podstawie krzywa przejściowa jest zapisana za pomocą równań parametrycznych $x_k(l)$ i $y_k(l)$, dla $l \in \langle 0, l_k \rangle$, gdzie l_k oznacza długość krzywej przejściowej. Przykładowo, dla krzywej przejściowej o krzywiznie liniowej, czyli kłotoidy, równania te w układzie x_k, y_k na rysunku 2 są następujące:

$$x_k(l) = l - \frac{1}{40R^2 l_k^2} l^5 + \frac{1}{3456R^4 l_k^4} l^5 \quad (11)$$

$$y_k(l) = -\frac{1}{6R l_k} l^3 + \frac{1}{336R^3 l_k^3} l^7 - \frac{1}{42240R^5 l_k^5} l^{11} \quad (12)$$

Dalszy tok postępowania wymaga znajomości współrzędnych punktu końcowego krzywej przejściowej $x_k(l_k)$ i $y_k(l_k)$ oraz kąta nachylenia krzywej $\theta(l_k)$ w tym punkcie. Dla kłotoidy współrzędne $x_k(l_k)$ i $y_k(l_k)$ wyznacza się ze wzorów (11) i (12), natomiast kąt $\theta_k(l_k)$ z zależności:

$$\theta_k(l_k) = -\frac{l_k}{2R} \quad (13)$$

Rys. 2. Przyjęty lokalny układ współrzędnych w wariancie standardowym AMP (przypadek symetryczny) [opracowanie własne]

3.3. Transformacja krzywej przejściowej do lokalnego układu współrzędnych x, y

Kolejnym etapem działań jest transformacja krzywej przejściowej do przyjętego lokalnego układu współrzędnych, przez dokonanie obrotu jej układu odniesienia o kąt $\alpha/2$. W rozpatrywanym przypadku, w związku z kierunkiem obrotu zgodnym z obrotem wskazówek zegara, w stosowanych wzorach transformacyjnych [31] występują ujemne wartości kąta.

$$x(l) = x_k(l) \cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right) + y_k(l) \sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right) \quad (14)$$

$$y(l) = -x_k(l) \sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right) + y_k(l) \cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right) \quad (15)$$

Ponieważ $\frac{\alpha}{2} \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, otrzymuje się następujące

równania parametryczne krzywej przejściowej w lokalnym układzie współrzędnych:

$$x(l) = x_k(l) \cos \frac{\alpha}{2} - y_k(l) \sin \frac{\alpha}{2} \quad (16)$$

$$y(l) = x_k(l) \sin \frac{\alpha}{2} + y_k(l) \cos \frac{\alpha}{2} \quad (17)$$

Odcięta krzywej przejściowej $x \in \langle 0, L_{KP} \rangle$, gdzie:

$$L_{KP} = x(l_k) = x_k(l_k) \cos \frac{\alpha}{2} - y_k(l_k) \sin \frac{\alpha}{2} \quad (18)$$

Rzędna końcowa krzywej przejściowej wynosi:

$$y_{KP} = y(l_k) = x_k(l_k) \sin \frac{\alpha}{2} + y_k(l_k) \cos \frac{\alpha}{2} \quad (19)$$

a wartość stycznej na końcu

$$s_{KP} = \tan \left[\theta_k(l_k) + \frac{\alpha}{2} \right] \quad (20)$$

3.4. Określenie rzędnych łuku kołowego

Znając położenie krzywej przejściowej, można wpisać w układ geometryczny łuk kołowy o promieniu R . Długość jego rzutu na oś x , tj. wartość L_{LK} , określa się na podstawie warunków styczności:

- na początku łuku, tj. dla $x = L_{KP}$, $y'(L_{KP}) = s_{KP}$,
- na środku łuku, tj. dla $x = L_{KP} + L_{LK}$, $y'(L_{KP} + L_{LK}) = 0$.

Z tych warunków wynika, że:

$$L_{LK} = \frac{s_{KP}}{\sqrt{1 + s_{KP}^2}} R \quad (21)$$

Można teraz zapisać równanie łuku kołowego w postaci funkcji jawnej $y = y(x)$. Ma ono następującą postać:

$$y(x) = y_{KP} + \sqrt{R^2 - (L_{KP} + L_{LK} - x)^2} - \sqrt{R^2 - L_{LK}^2}, \quad (22)$$

$$x \in \langle L_{KP}, L_{KP} + L_{LK} \rangle$$

Rzędna środka łuku kołowego S wynosi:

$$y(L_{KP} + L_{LK}) = y_{KP} + R - \sqrt{R^2 - L_{LK}^2} \quad (23)$$

3.5. Uzupełnienie współrzędnych dla drugiej części projektowanego rejonu trasy

Przedstawione dotąd rozwiązanie obejmuje połowę całego układu geometrycznego, tj. rejon od początku krzywej przejściowej do środka łuku kołowego. Należy więc jeszcze uzupełnić rzędne dla drugiej części projektowanego rejonu, tj. dla $x \in \langle L_{KP} + L_{LK}, 2(L_{KP} + L_{LK}) \rangle$. Ze względu na symetrię, stanowić one będą lustrzane odbicie rozwiązania uzyskanego dla $x \in \langle 0, L_{KP} + L_{LK} \rangle$.

Jeżeli długość rzutu całego układu na oś x oznaczymy jako L , gdzie $L = 2(L_{KP} + L_{LK})$, wówczas dla drugiej krzywej przejściowej, tj. dla $x \in \langle L - L_{KP}, L \rangle$, otrzymuje się równanie odciętej:

$$x(l) = L - \left[x_k(l) \cos \frac{\alpha}{2} - y_k(l) \sin \frac{\alpha}{2} \right], \quad (24)$$

$$l \in \langle 0, l_k \rangle$$

gdzie $x_k(l)$ jest określone równaniem (11), a $y_k(l)$ – równaniem (12). Równanie rzędnej $y(l)$ opisuje – tak jak poprzednio – wzór (17).

Dla drugiej połowy łuku kołowego obowiązuje równanie:

$$y(x) = y_{KP} + \sqrt{R^2 - (x - L_{KP} - L_{LK})^2} - \sqrt{R^2 - L_{LK}^2}, \quad (25)$$

$$x \in \langle L_{KP} + L_{LK}, L_{KP} + 2L_{LK} \rangle$$

3.6. Określenie położenia lokalnego układu współrzędnych na tle kierunków głównych trasy

Wyznaczenie współrzędnych środka łuku kołowego S pozwala określić współrzędne punktu W_{LUW} , stanowiącego przecięcie kierunku głównego i oraz prostej równoległej do kierunku głównego $i+1$ (rys. 2). Odcięta punktu W_{LUW} w lokalnym układzie współrzędnych jest taka sama jak odcięta punktu S , wynosi zatem:

$$x_{W(LUW)} = x_s = L_{KP} + L_{LK} \quad (26)$$

Ponieważ punkt W_{LUW} leży na prostej imitującej kierunek główny i , która jest opisana równaniem (10), wartość jego rzędnej jest równa:

$$y_{W(LUW)} = \tan \frac{\alpha}{2} x_{W(LUW)} = \tan \frac{\alpha}{2} (L_{KP} + L_{LK}) \quad (27)$$

Jak dotąd, lokalny układ współrzędnych był zorientowany względem jednego z kierunków głównych (prostej i). Dzięki wyznaczeniu współrzędnych punktu W_{LUW} , stało się możliwe uwzględnienie również drugiego kierunku (tj. prostej $i+1$). W ten sposób zostało jednoznacznie określone położenie LUW na tle kierunków głównych trasy.

Znajomość współrzędnych wierzchołka W_{LUW} umożliwia wyznaczenie jego odległości od początku lokalnego układu współrzędnych.

$$\overline{W_{LUW}O_{LUW}} = \sqrt{1 + \left(\tan \frac{\alpha}{2}\right)^2} (L_{KP} + L_{LK}) \quad (28)$$

Pozwala to na skorygowanie położenia LUW , polegające na uwzględnieniu prawidłowej odległości jego punktu początkowego od wierzchołka W (rys. 2). Początek skorygowanego układu współrzędnych x_{kor} , y_{kor} znajduje się w punkcie O , którego odległość od wierzchołka W wynosi $OW = \overline{W_{LUW}O_{LUW}}$. Układ ten jest przesunięty względem układu x , y w poziomie o wartość:

$$\Delta x = \overline{OW} \cos \frac{\alpha}{2} \quad (29)$$

a w pionie o

$$\Delta y = \overline{OW} \sin \frac{\alpha}{2} \quad (30)$$

W skorygowanym LUW współrzędne zaprojektowanego układu geometrycznego są takie same jak w układzie x , y ; oznacza to, że $x_{kor} = x$, $y_{kor} = y$.

3.7. Określenie współrzędnych punktu $O(0,0)$ w układzie PL-2000

Określona wzorem (28) odległość pomiędzy punktami O i W występuje również w układzie PL-2000. Współrzędne punktu W są tam opisane równaniami (3) i (4), zaś obydwa punkty leżą na prostej i . W tej sytuacji staje się możliwe określenie współrzędnych punktu O w układzie PL-2000. Wartości tych współrzędnych są następujące:

$$Y_O = Y_W \pm \frac{1}{\sqrt{1+B_i^2}} \overline{OW} \quad (31)$$

$$X_O = X_W \pm \frac{B_i}{\sqrt{1+B_i^2}} \overline{OW} \quad (32)$$

3.8. Przeniesienie zaprojektowanego układu geometrycznego do układu PL-2000

Wyznaczenie współrzędnych Y_O i X_O , przy wykorzystaniu wcześniej określonego kąta obrotu β , umożliwia przeniesienie uzyskanego rozwiązania z lokalnego układu współrzędnych do układu PL-2000. Odbywa się to przy wykorzystaniu następujących wzorów [31]:

$$Y = Y_O + x \cos \beta - y \sin \beta \quad (33)$$

$$X = X_O + x \sin \beta - y \cos \beta \quad (34)$$

3.9. Przykład obliczeniowy I

W układzie PL-2000 prosta przedstawiająca kierunek główny i jest opisana wzorem:

$$X = 42950337,428 - 5,67128182Y,$$

a prosta opisująca kierunek $i+1$ równaniem:

$$X = 552615,938 + 0,83909963Y$$

Współrzędne punktu przecięcia kierunków głównych wynoszą: $Y_W = 6\,512\,325,247$ m, $X_W = 6\,017\,105,651$ m.

W związku z przyjęciem położenia punktu O na prostej i , o współrzędnych $Y_O = 6\,512\,505,628$ m i $X_O = 6\,016\,082,661$ m, w przesuniętym układzie PL-2000 wierzchołek W ma współrzędne: $Y_{PW} = -180,381$ m i $X_{PW} = 1022,990$ m. Z podanych równań kierunków głównych wynika, że kąty nachylenia prostych wynoszą: $\varphi_i = -1,396263$ rad i $\varphi_{i+1} = 0,698132$ rad. Ponieważ występuje tutaj zwrot trasy w prawo, daną sytuację

obejmuje przypadek 5 z tablicy 1. Kąt zwrotu trasy – na podstawie wzoru (2b) – wynosi $\alpha = 1,047198$ rad, wymagany kąt obrotu zaś – wyznaczony wzorem (5c) – jest równy $\beta = 1,221730$ rad. W układzie współrzędnych x, y kąty nachylenia prostych wyniosą: $\bar{\varphi}_i = 0,523599$ rad, $\bar{\varphi}_{i+1} = -0,523599$ rad (taki układ nachyleń to sytuacja typowa dla przypadku zwrotu trasy w prawo).

Założono prędkość jazdy pociągów na projektowanym układzie geometrycznym $V = 160$ km/h. Warunek ten spełnia układ o promieniu $R = 1660$ m i przechyłce $h_0 = 95$ mm, w którym przyspieszenie niezrównoważone $a_m = 0,569$ m/s². Wymagana długość krzywej przejściowej w postaci klotoidy wynosi $l_k = 160$ m (prędkość podnoszenia koła na rampie przechyłkowej $f = 26,389$ mm/s).

Procedurę projektowania rozpoczęto od wyznaczenia współrzędnych krzywej przejściowej w postaci klotoidy w układzie x_k, y_k . W jej punkcie końcowym uzyskano wartości $x_k(l_k) = 159,963$ m i $y_k(l_k) = -2,578$ m oraz kąt nachylenia stycznej $\theta_k(l_k) = -0,04819$ rad. W wyniku obrotu o kąt $\alpha/2$ uzyskano współrzędne krzywej w układzie x, y . Na jej końcu wyniosły one: $x(l_k) = L_{KP} = 139,821$ m i $y(l_k) = 77,749$ m. Kąt nachylenia stycznej miał tam wartość $\theta(l_k) = 0,475406$ rad.

Wykorzystując wzór (21) wyznaczono wartość $L_{LK} = 759,781$ m. Znajomość L_{KP} oraz L_{LK} pozwoliła na wyznaczenie współrzędnych połowy łuku kołowego za pomocą równania (22). Środek łuku kołowego ma odcięta $x_s = L_{KP} + L_{LK} = 899,602$ m oraz rzędną $y_s = 261,831$ m.

Następnie uzupełniono współrzędne dla drugiej połowy projektowanego rejonu trasy. Ze względu na symetrię, stanowią one lustrzane odbicie rozwiązania uzyskanego dla $x \in \langle 0, L_{KP} + L_{LK} \rangle$. Długość rzutu całego układu na oś odciętych wyniosła 1799,204 m. Na rysunku 3 pokazano zaprojektowany układ geometryczny w lokalnym układzie współrzędnych. Kolorem czerwonym oznaczono łuk kołowy, fioletowym – krzywe przejściowe, zielonym zaś – odcinki proste.

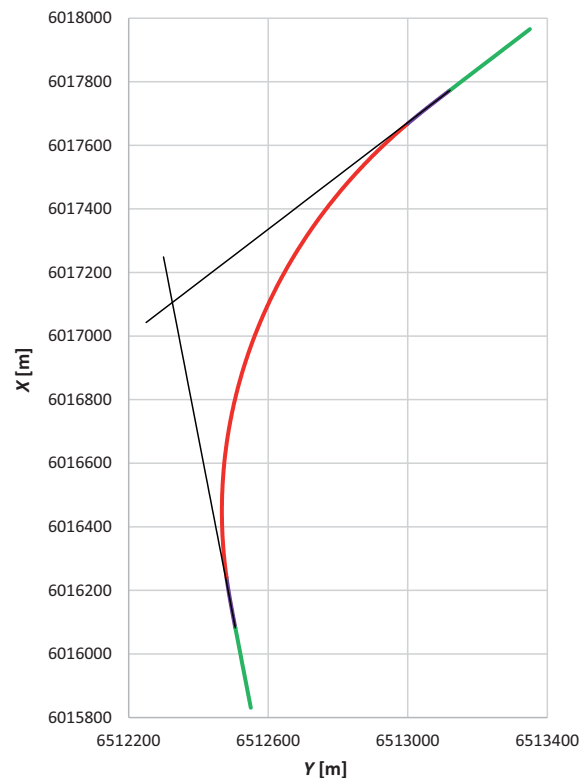
W kolejnym etapie określono współrzędne punktu początkowego LW w układzie PL-2000. Odległość tego punktu od wierzchołka W wyniosła 1038,771 m.

W rozpatrywanym przypadku współrzędne punktu O w układzie PL-2000 wyznaczono z następujących wzorów:

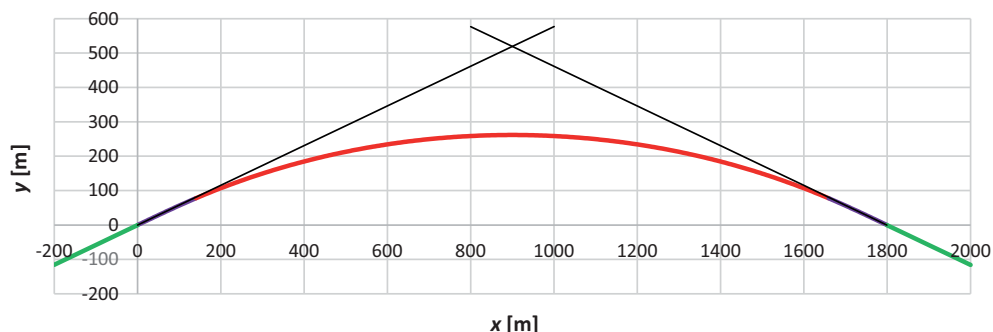
$$Y_O = Y_W + \frac{1}{\sqrt{1+B_i^2}} \overline{OW}$$

$$X_O = X_W + \frac{B_i}{\sqrt{1+B_i^2}} \overline{OW}$$

Na tej podstawie uzyskano $Y_O = 6\,512\,505,628$ m i $X_O = 6\,016\,082,661$ m. Na rysunku 4 pokazano zaprojektowany układ geometryczny w układzie PL-2000.



Rys. 4. Przykład I: układ geometryczny zaprojektowany w wariantcie standardowym AMP w układzie PL-2000 [opracowanie własne]



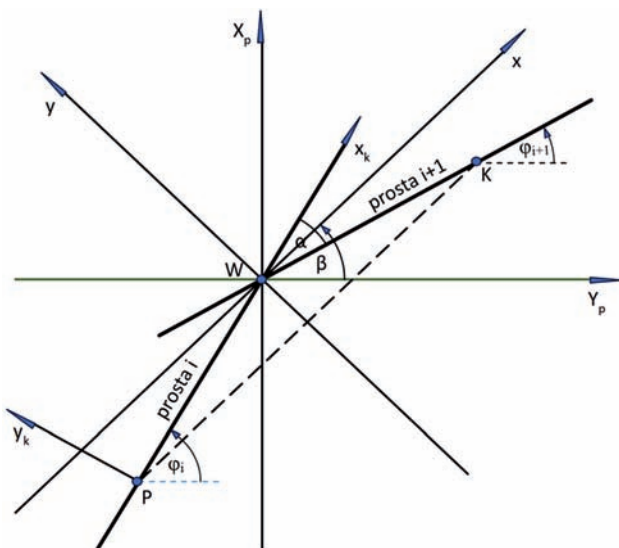
Rys. 3. Przykład I: układ geometryczny zaprojektowany w wariantcie standardowym AMP w lokalnym układzie współrzędnych [opracowanie własne]

4. Zmodyfikowany wariant projektowania

4.1. Charakterystyka ogólna

Do przedstawionego standardowego sposobu projektowania można by wnieść jedno zastrzeżenie natury metodycznej dotyczące operowania, w trakcie realizacji odpowiedniej procedury, niejednoznacznie określonym lokalnym układem współrzędnych. Położenie punktu początkowego tego układu względem odpowiedniego punktu głównego trasy i wynikające stąd jego współrzędne w układzie PL-2000 są wyznaczane dopiero w fazie końcowej. Mogą się przy tym pojawiać pewne problemy interpretacyjne, które wynikają z konieczności właściwego doboru znaków występujących we wzorach (31) i (32). Ponadto współrzędne Y_O i X_O odgrywają kluczową rolę przy przeniesieniu uzyskanego rozwiązania z lokalnego układu współrzędnych do układu PL-2000, z wykorzystaniem wzorów (33) i (34).

W przypadku symetrycznego układu geometrycznego, trudności tych można uniknąć, rezygnując z operowania punktem $O(Y_O, X_O)$. Staje się to możliwe dzięki zlokalizowaniu początku lokalnego układu współrzędnych w punkcie przecięcia obydwu kierunków głównych, którego współrzędne Y_W i X_W są znane. Sposób utworzenia zmodyfikowanego lokalnego układu współrzędnych został przedstawiony na rysunku 5.



Rys. 5. Lokalny układ współrzędnych x, y w wariantcie zmodyfikowanym AMP na tle przecinających się kierunków głównych trasy, w przesuniętym układzie PL-2000 [opracowanie własne]

Tak jak poprzednio, aby uzyskać symetryczne ustawienie kierunków głównych, należy dokonać odpowiedniej transformacji (przesunięcia i obrotu) układu

PL-2000. Jednak tym razem przesunięcie początku układu PL-2000 następuje do punktu $W(Y_W, X_W)$, natomiast obrót odbywa się względem tego punktu o kąt β , aż do osiągnięcia symetrycznego ustawienia obu prostych. Wartość kąta β wyznacza się za pomocą jednego spośród wzorów (35a) ÷ (35g).

$$\beta = \varphi_{i+1} + \frac{\alpha}{2} \quad (35a)$$

$$\beta = \varphi_{i+1} - \frac{\alpha}{2} \quad (35b)$$

$$\beta = \pi - \left(\varphi_{i+1} + \frac{\alpha}{2} \right) \quad (35c)$$

$$\beta = \pi - \left(\varphi_{i+1} - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (35d)$$

$$\beta = \pi + \left(\varphi_{i+1} + \frac{\alpha}{2} \right) \quad (35e)$$

$$\beta = \pi + \left(\varphi_{i+1} - \frac{\alpha}{2} \right) \quad (35f)$$

$$\beta = \left(\varphi_{i+1} + \frac{\alpha}{2} \right) - \pi \quad (35g)$$

W tabelicy 2 zestawiono charakterystyki wszystkich występujących przypadków geometrycznych. Przez Y_{pp} i X_{pp} oznaczono współrzędne rejonu początkowego w przesuniętym układzie PL-2000. Oznaczenia (+) i (-) określają wartości dodatnie i ujemne, zaś (L) i (P) – kierunki zwrotu trasy w lewo lub w prawo. Przytoczono również numerację obowiązujących wzorów na kąty α i β . Projektowanie układu geometrycznego odbywa się w kilku etapach, które przedstawiono w punktach 4.2÷4.4.

4.2. Wyznaczenie podstawowych wielkości charakterystycznych

Aby uzyskać możliwość operowania w lokalnym układzie współrzędnych, należy najpierw wyznaczyć podstawowe wielkości charakterystyczne. Chodzi tu o długości rzutów krzywej przejściowej (L_{KP}) i połowy łuku kołowego (L_{LK}) na oś poziomą oraz o długości rzutów krzywej przejściowej (Δy_{KP}) i środka łuku kołowego (Δy_{LK}) na oś pionową. Występuje przy tym – w ograniczonym zakresie – analogia do toku postępowania, które przedstawiono w punktach 4.2÷4.4.

Tablica 2

Charakterystyki występujących przypadków zmiany kierunku trasy kolejowej w zmodyfikowanym wariancie projektowania

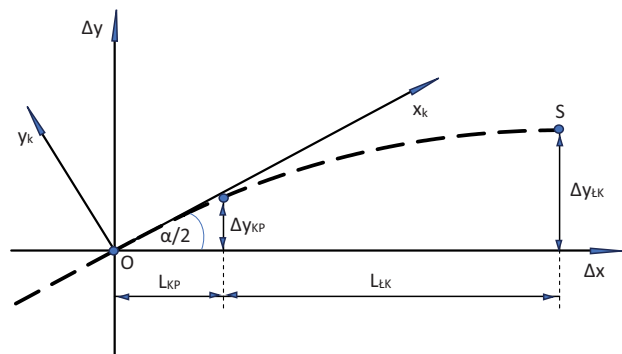
Lp.	Odcięta Y_{pp}	Rzędna X_{pp}	Zwrot trasy	Kąt φ_i	Kąt φ_{i+1}	Różnica $\varphi_{i+1} - \varphi_i$	Kąt α	Kąt β
1	(-)	(-)	(P)	(+)	(+)	(-)	(2a)	(35a)
2	(-)	(-)	(P)	(+)	(-)	(-)	(2a)	(35a)
3	(-)	(-)	(P)	(+)	(+)	(+)	(2b)	(35g)
4	(-)	(-)	(L)	(+)	(+)	(+)	(2a)	(35b)
5	(-)	(-)	(L)	(+)	(-)	(-)	(2b)	(35f)
6	(-)	(-)	(L)	(+)	(+)	(-)	(2b)	(35f)
7	(+)	(-)	(P)	(-)	(-)	(-)	(2a)	(35c)
8	(+)	(-)	(P)	(-)	(+)	(-)	(2b)	(35a)
9	(+)	(-)	(P)	(-)	(-)	(-)	(2b)	(35a)
10	(+)	(-)	(L)	(-)	(-)	(+)	(2a)	(35f)
11	(+)	(-)	(L)	(-)	(+)	(+)	(2a)	(35c)
12	(+)	(-)	(L)	(-)	(-)	(-)	(2b)	(35b)
13	(+)	(+)	(P)	(+)	(+)	(+)	(2b)	(35a)
14	(+)	(+)	(P)	(+)	(-)	(-)	(2b)	(35e)
15	(+)	(+)	(P)	(+)	(+)	(-)	(2a)	(35e)
16	(+)	(+)	(L)	(+)	(+)	(+)	(2a)	(35d)
17	(+)	(+)	(L)	(+)	(-)	(-)	(2b)	(35b)
18	(+)	(+)	(L)	(+)	(+)	(-)	(2b)	(35b)
19	(-)	(+)	(P)	(-)	(-)	(-)	(2a)	(35a)
20	(-)	(+)	(P)	(-)	(+)	(+)	(2b)	(35g)
21	(-)	(+)	(P)	(-)	(-)	(+)	(2b)	(35g)
22	(-)	(+)	(L)	(-)	(-)	(+)	(2a)	(35b)
23	(-)	(+)	(L)	(-)	(+)	(+)	(2a)	(35b)
24	(-)	(+)	(L)	(-)	(-)	(-)	(2b)	(35f)

[Opracowanie własne].

Obliczenia szukanych parametrów są prowadzone w układzie Δx , Δy pokazanym na rysunku 6. W danym przypadku dotyczy on zwrotu trasy w prawo, przy dodatniej wartości kąta nachylenia kierunku głównego i w układzie x , y . W przypadku zwrotu trasy w lewo, gdy wartości kąta nachylenia kierunku głównego i w LUV są ujemne, wystarczy skierować oś Δy do dołu (a następnie odpowiednio skorygować oś y_k), aby uzyskać pełną analogię do rozpatrywanego dalej przypadku zwrotu trasy w prawo.

Projektowanie rozpoczęto od przeprowadzenia przez punkt $O(0, 0)$ w układzie współrzędnych Δx , Δy prostej imitującej kierunek główny i , opisanej równaniem:

$$\Delta y = \tan \frac{\alpha}{2} \Delta x \quad (36)$$



Rys. 6. Schemat do wyznaczania podstawowych wielkości charakterystycznych układu geometrycznego [opracowanie własne]

Prosta stanowi oś odciętych pomocniczego układu współrzędnych x_k , y_k , związanego z krzywą

przejęciową. Istotne są współrzędne punktu końcowego krzywej w tym układzie, które wynikają z odpowiednich równań parametrycznych $x(l)$ i $y(l)$ dla $l = l_k$. Dla klotoidy te współrzędne są następujące:

$$x_k(l_k) = l - \frac{l_k^3}{40R^2} + \frac{l_k^5}{3456R^4} \quad (37)$$

$$y_k(l_k) = -\frac{l_k^2}{6R} + \frac{l_k^4}{336R^3} - \frac{l_k^6}{42240R^5} \quad (38)$$

natomiast kąt nachylenia krzywej $\theta_k(l_k)$ wyznacza się z zależności (13).

Transformacja krzywej przejęciowej do układu współrzędnych Δx , Δy odbywa się przez dokonanie obrotu układu odniesienia o kąt $\alpha/2$. W wyniku tej operacji otrzymuje się szukaną wartość rzutu krzywej przejęciowej na oś poziomą:

$$L_{KP} = \Delta x(l_k) = x_k(l_k) \cos \frac{\alpha}{2} - y_k(l_k) \sin \frac{\alpha}{2} \quad (39)$$

i oś pionową

$$\Delta y_{KP} = \Delta y(l_k) = x_k(l_k) \sin \frac{\alpha}{2} + y_k(l_k) \cos \frac{\alpha}{2} \quad (40)$$

Wartość stycznej na końcu jest opisana wzorem (20). Dla danego promienia R łuku kołowego można bezpośrednio wyznaczyć długość rzutu L_{LK} na oś poziomą za pomocą wzoru (21). Wartość rzutu środka łuku kołowego na oś pionową jest następująca:

$$\Delta y_{\epsilon K} = \Delta y(L_{KP} + L_{LK}) = \Delta y_{KP} + R - \sqrt{R^2 - L_{LK}^2} \quad (41)$$

Należy jeszcze uwzględnić, że w zależności od nachylenia prostej i (dodatniego lub ujemnego), położenie projektowanego układu geometrycznego w lokalnym układzie współrzędnych będzie inne. Dlatego

dla obydwu tych przypadków trzeba zastosować odrębną procedurę obliczeniową.

Projektowanie układu geometrycznego odbywa się kilku etapach, rozpoczynając od założenia pomocniczego układu współrzędnych x_k, y_k , związanego z krzywą przejęciową. Oś odciętych tego układu leży na kierunku głównym i , a jego początek (punkt P) pokrywa się z początkiem projektowanego układu geometrycznego. Tok postępowania obejmuje dwa przypadki, określone usytuowaniem tego układu względem wierzchołka W .

4.3. Wyznaczenie współrzędnych w układzie x, y dla układu geometrycznego położonego poniżej wierzchołka W

W przypadku układu geometrycznego położonego poniżej wierzchołka W występuje dodatkowo nachylenie kierunku głównego i (rys. 7).

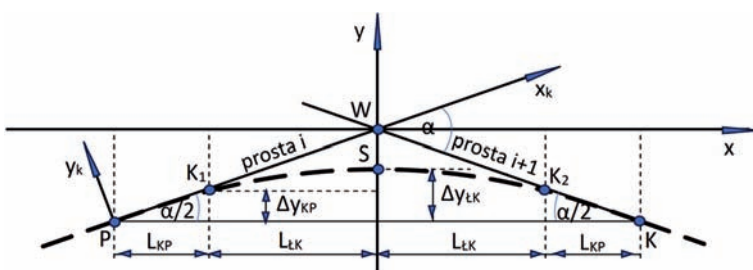
Znajomość długości rzutów krzywej przejęciowej (L_{KP} i Δy_{KP}) oraz połowy łuku kołowego (L_{LK} i Δy_{LK}) na osie układu współrzędnych pozwala utworzyć zmodyfikowany lokalny układ współrzędnych z zaznaczonymi punktami charakterystycznymi. Występujące punkty układu są następujące: W – przecięcie kierunków głównych trasy (początek LUW), P – początek układu geometrycznego, K_1 – koniec pierwszej krzywej przejęciowej, S – środek łuku kołowego, K_2 – koniec drugiej krzywej przejęciowej, K – koniec układu geometrycznego. Współrzędne punktu początkowego P wynoszą:

$$x_P = -(L_{KP} + L_{LK}) \quad (42)$$

$$y_P = x_P \tan \frac{\alpha}{2} = -\tan \frac{\alpha}{2} (L_{KP} + L_{LK}) \quad (43)$$

4.3.1. Pierwsza krzywa przejęciowa (dla $x \in \langle -(L_{KP} + L_{LK}), -L_{LK} \rangle$)

Tak jak podano w punkcie 3.2, krzywa przejęciowa jest zapisana za pomocą równań parametrycznych



Rys. 7. Przyjęty lokalny układ współrzędnych w wariantcie zmodyfikowanym AMP z zaznaczonymi punktami charakterystycznymi dla przypadku układu geometrycznego położonego poniżej wierzchołka W [opracowanie własne]

$x_k(l)$ i $y_k(l)$, dla $l \in \langle 0, l_k \rangle$. Dla klotoidy współrzędne $x_k(l)$ i $y_k(l)$ wyznacza się ze wzorów (11) i (12), natomiast kąt nachylenia stycznej $\theta_k(l_k)$ z zależności (13).

Kolejnym etapem działań jest transformacja krzywej przejściowej do przyjętego lokalnego układu współrzędnych. W rozpatrywanym przypadku transformacja polega na dokonaniu obrotu układu x_k, y_k w prawo o kąt $\alpha/2$ oraz uwzględnieniu lokalizacji punktu P w LUW . Uzyskuje się następujące równania parametryczne krzywej przejściowej:

$$x(l) = -(L_{KP} + L_{LK}) + x_k(l) \cos \frac{\alpha}{2} - y_k(l) \sin \frac{\alpha}{2} \quad (44)$$

$$y(l) = -\tan \frac{\alpha}{2} (L_{KP} + L_{LK}) + x_k(l) \sin \frac{\alpha}{2} + y_k(l) \cos \frac{\alpha}{2} \quad (45)$$

Odcięta punktu końcowego krzywej przejściowej (tj. punktu K_1) wynosi $x_{K1} = -L_{LK}$, natomiast rzędna końcowa krzywej wynika z zależności:

$$y_{K1} = -\tan \frac{\alpha}{2} (L_{KP} + L_{LK}) + x_k(l_k) \sin \frac{\alpha}{2} + y_k(l_k) \cos \frac{\alpha}{2} \quad (46)$$

Wartość stycznej na końcu wyznacza się ze wzoru (20).

4.3.2. Łuk kołowy (dla $x \in \langle -L_{LK}, L_{LK} \rangle$)

Równanie całego łuku kołowego można zapisać w postaci funkcji jawnej $y = y(x)$; ma ono następującą postać:

$$y(x) = y_{K1} + \sqrt{R^2 - x^2} - \sqrt{R^2 - L_{LK}^2} \quad (47)$$

Rzędna środka łuku kołowego (tj. punktu S) wynosi:

$$y_S = y(0) = y_{K1} + R - \sqrt{R^2 - L_{LK}^2} \quad (48)$$

4.3.3. Druga krzywa przejściowa

(dla $x \in \langle L_{LK}, L_{KP} + L_{LK} \rangle$)

Ze względu na symetrię projektowanego układu geometrycznego, w równaniach parametrycznych drugiej krzywej przejściowej wartości rzędnych $y(l)$ opisuje – tak jak poprzednio – wzór (45). Inne jest natomiast równanie odciętej, którego postać jest następująca:

$$x(l) = L_{KP} + L_{LK} - \left[x_k(l) \cos \frac{\alpha}{2} - y_k(l) \sin \frac{\alpha}{2} \right] \quad (49)$$

4.3.4. Przeniesienie zaprojektowanego układu geometrycznego do układu PL-2000

Znane od samego początku współrzędne Y_W i X_W oraz określony wcześniej kąt obrotu β umożliwiają przeniesienie uzyskanego rozwiązania z lokalnego układu współrzędnych do układu PL-2000. Odbywa się to przy wykorzystaniu następujących wzorów:

$$Y = Y_W + x \cos \beta - y \sin \beta \quad (50)$$

$$X = X_W + x \sin \beta + y \cos \beta \quad (51)$$

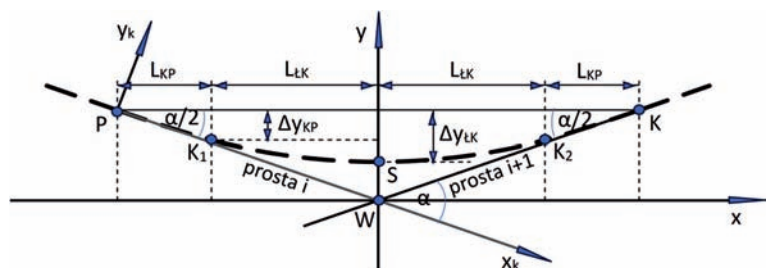
4.4. Wyznaczenie współrzędnych w układzie x, y dla układu geometrycznego położonego powyżej wierzchołka W

W przypadku układu geometrycznego położonego powyżej wierzchołka W występuje ujemne nachylenie kierunku głównego i (rys. 8).

Odcięta punktu początkowego P wynika – jak poprzednio – ze wzoru (42), rzędna zaś – z zależności:

$$y_P = \tan \frac{\alpha}{2} (L_{KP} + L_{LK}) \quad (52)$$

Rys. 8. Przyjęty lokalny układ współrzędnych w wariantcie zmodyfikowanym AMP z zaznaczonymi punktami charakterystycznymi dla przypadku układu geometrycznego położonego powyżej wierzchołka W [opracowanie własne]



4.4.1. Pierwsza krzywa przejściowa (dla $x \in \langle -(L_{KP} + L_{LK}), -L_{LK} \rangle$)

Pierwsza krzywa przejściowa jest zapisana za pomocą równań parametrycznych $x_k(l)$ i $y_k(l)$ dla $l \in \langle 0, l_k \rangle$. W układzie współrzędnych x_k, y_k na rysunku 8 równanie $x(l)$ przyjmuje – tak jak poprzednio – postać (11), natomiast $y_k(l)$ jest następujące:

$$y_k(l) = \frac{1}{6Rl_k}l^3 - \frac{1}{336R^3l_k^3}l^7 + \frac{1}{42240R^5l_k^5}l^{11} \quad (53)$$

Kąt nachylenia stycznej $\theta_k(l_k)$ opisuje wzór:

$$\theta_k(l_k) = \frac{l_k}{2R} \quad (54)$$

Transformacja krzywej przejściowej do przyjętego lokalnego układu współrzędnych polega w danym przypadku na obrocie układu x_k, y_k w lewo o kąt $\alpha/2$. Uzyskuje się następujące równania parametryczne krzywej przejściowej w LUW:

$$x(l) = -(L_{KP} + L_{LK}) + x_k(l) \cos \frac{\alpha}{2} + y_k(l) \sin \frac{\alpha}{2} \quad (55)$$

$$y(l) = \tan \frac{\alpha}{2} (L_{KP} + L_{LK}) - x_k(l) \sin \frac{\alpha}{2} + y_k(l) \cos \frac{\alpha}{2} \quad (56)$$

Odcięta punktu końcowego krzywej przejściowej (tj. punktu K_1) wynosi $x_{K1} = -L_{LK}$, natomiast rzędna końcowa krzywej wynika z zależności:

$$y_{K1} = \tan \frac{\alpha}{2} (L_{KP} + L_{LK}) - x_k(l_k) \sin \frac{\alpha}{2} + y_k(l_k) \cos \frac{\alpha}{2} \quad (57)$$

Wartość stycznej na końcu wyznacza się z zależności:

$$s_{KP} = \tan \left[\theta_k(l_k) - \frac{\alpha}{2} \right] \quad (58)$$

4.4.2. Łuk kołowy (dla $x \in \langle -L_{LK}, L_{LK} \rangle$)

Równanie całego łuku kołowego ma następującą postać:

$$y(x) = y_{K1} - \sqrt{R^2 - x^2} + \sqrt{R^2 - L_{LK}^2} \quad (59)$$

Rzędna środka łuku kołowego (tj. punktu S) wynosi:

$$y_S = y(0) = y_{K1} - R + \sqrt{R^2 - L_{LK}^2} \quad (60)$$

4.4.3. Druga krzywa przejściowa (dla $x \in \langle L_{LK}, L_{KP} + L_{LK} \rangle$)

Ze względu na symetrię projektowanego układu geometrycznego, w równaniach parametrycznych drugiej krzywej przejściowej wartości rzędnych $y(l)$ opisuje – tak jak poprzednio – wzór (56). Inne jest natomiast równanie odciętej, którego postać jest następująca:

$$x(l) = L_{KP} + L_{LK} - \left[x_k(l) \cos \frac{\alpha}{2} + y_k(l) \sin \frac{\alpha}{2} \right] \quad (61)$$

Tak jak w punkcie 4.3.4, przeniesienie zaprojektowanego układu geometrycznego do układu PL-2000 odbywa się z wykorzystaniem wzorów (50) i (51).

4.5. Przykład obliczeniowy II

W układzie PL-2000 prosta przedstawiająca kierunek główny i jest opisana wzorem:

$$X = 17900192,150 - 1,73 205 081 Y$$

a prosta opisująca kierunek $i+1$ równaniem:

$$X = 8696475,885 - 0,36397023 Y$$

Współrzędne punktu przecięcia kierunków głównych wynoszą: $Y_W = 6 727 466,528$ m, $X_W = 6 247 878,317$ m.

W związku z symetrią projektowanego układu geometrycznego zlokalizowano początek lokalnego układu współrzędnych w punkcie przecięcia obydwu kierunków głównych. W przesuniętym układzie PL-2000 jest to punkt $W(0, 0)$. Z podanych równań kierunków głównych wynika, że kąty nachylenia prostych wynoszą: $\varphi_i = -1,047198$ rad i $\varphi_{i+1} = -0,349066$ rad. Ponieważ występuje tutaj zwrot trasy w lewo, daną sytuację obejmuje przypadek 22 z tablicy 2.

Kąt zwrotu trasy – na podstawie wzoru (2a) – wynosi $\alpha = 0,698132$ rad, wymagany zaś kąt obrotu – wyznaczony wzorem (35b) – jest równy $\beta = -0,698132$ rad (co oznacza obrót w prawo). W układzie współrzędnych x, y kąty nachylenia prostych wyniosą: $\bar{\varphi}_i = -0,349066$ rad, $\bar{\varphi}_{i+1} = 0,349066$ rad (taki układ nachyleń to sytuacja typowa dla przypadku zwrotu trasy w lewo, który występuje przy ujemnym nachyleniu kierunku głównego i w układzie x, y).

Założono prędkość jazdy pociągów $V = 120$ km/h na projektowanym układzie geometrycznym. Warunek ten spełnia układ o promieniu $R = 850$ m i przechyłce $h_0 = 110$ mm, w którym przyspieszenie niezrównoważone $a_m = 0,588$ m/s². Wymagana długość krzywej przejściowej w postaci klotoidy wynosi $l_k = 135$ m (prędkość podnoszenia koła na rampie przechyłkowej $f = 27,160$ mm/s).

Pierwszym krokiem było przeprowadzenie pomocniczej operacji mającej na celu określenie wartości L_{KP} i Δy_{KP} oraz L_{LK} i Δy_{LK} . W danym przypadku kierunek główny i ma ujemne nachylenie w układzie x, y . W związku z tym – w odróżnieniu od sytuacji występującej na rysunku 6 – oś Δy musi być skierowana do dołu, zaś oś y_k odpowiednio skorygowana. Należało najpierw wyznaczyć współrzędne końca krzywej przejściowej w układzie współrzędnych x_k, y_k za pomocą wzorów (37) i (38). Wynoszą one: $x_k(l_k) = 134,915$ m i $y_k(l_k) = -3,609$ m. Kąt nachylenia stycznej jest równy $\theta_k(l_k) = -0,079412$ rad. W wyniku obrotu o kąt $\alpha/2$ w lewo uzyskano – z wykorzystaniem wzorów (39) i (40) – szukane wartości L_{KP} i Δy_{KP} ; wynoszą one $L_{KP} = 128,000$ m i $\Delta y_{KP} = 42,787$ m. Niezbędny do wyznaczenia L_{LK} kąt $\theta(l_k)$, na podstawie wzoru (20), jest równy $\theta(l_k) = 0,26965$ rad. W tej sytuacji można wyznaczyć, za pomocą wzorów (21) i (41), wartości L_{LK} i Δy_{LK} ; są one równe: $L_{LK} = 226,438$ m i $\Delta y_{LK} = 73,504$ m.

Dalsze operacje projektowe są wykonywane w lokalnym układzie współrzędnych x, y . Zakłada się pomocniczy układ współrzędnych x_k, y_k , związany z pierwszą krzywą przejściową. Początek tej krzywej stanowi zarazem początek projektowanego układu geometrycznego, a jego współrzędne w LWU wynoszą: $x_p = -354,439$ m, $y_p = 129,005$ m.

Współrzędne klotoidy $x_k(l)$ i $y_k(l)$ wyznaczone za pomocą wzorów (11) i (53) dla $l \in \langle 0; 135 \rangle$ m. Wartość kąta nachylenia stycznej na końcu krzywej – na podstawie wzoru (54) – wyniosła $\theta_k(l_k) = 0,079412$ rad. Kolejnym etapem działań jest transformacja krzywej przejściowej do przyjętego lokalnego układu współrzędnych. W rozpatrywanym przypadku transformacja polega na dokonaniu obrotu układu x_k, y_k w lewo o kąt $\alpha/2$ oraz uwzględnieniu lokalizacji punktu P w LWU . Równania parametryczne $x(l)$ i $y(l)$ wynikają

z zależności (55) i (56), przy czym obowiązuje warunek $x \in \langle -354,439; -226,426 \rangle$ m. Odcięta punktu końcowego krzywej przejściowej (tj. punktu K_i) wynosi $x_{KI} = -226,426$ m, natomiast rzędna końcowa krzywej $y_{KI} = 86,249$ m. Kąt nachylenia stycznej jest równy $\theta(l_k) = -0,26965$ rad.

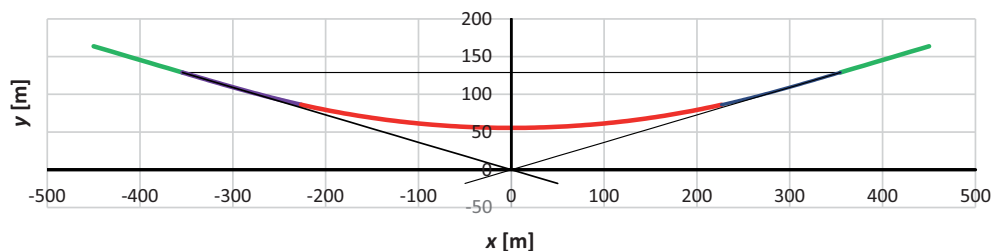
Znajomość L_{KP} oraz L_{LK} umożliwiła wyznaczenie rzędnej środka łuku kołowego (dla $x_s = 0$) za pomocą równania (60). Wynosi ona $y_s = 55,536$ m. Następnie uzupełniono współrzędne dla drugiej połowy projektowanego rejonu trasy. Ze względu na symetrię, stanowią one lustrzane odbicie rozwiązania uzyskanego dla $x \in \langle 0, L_{KP} + L_{LK} \rangle$. Długość rzutu całego układu na oś odciętych wyniosła 708,877 m. Na rysunku 9 pokazano zaprojektowany układ geometryczny w lokalnym układzie współrzędnych. Kolorem czerwonym oznaczono łuk kołowy, fioletowym – krzywe przejściowe, zielonym zaś – odcinki proste.

W kolejnym etapie dokonano transformacji uzyskanego rozwiązania do układu PL-2000, z wykorzystaniem wzorów (50) i (51). Zaprojektowany układ geometryczny przedstawiono na rysunku 10 (przyjęto kolory oznaczeń jak na rysunku 9).

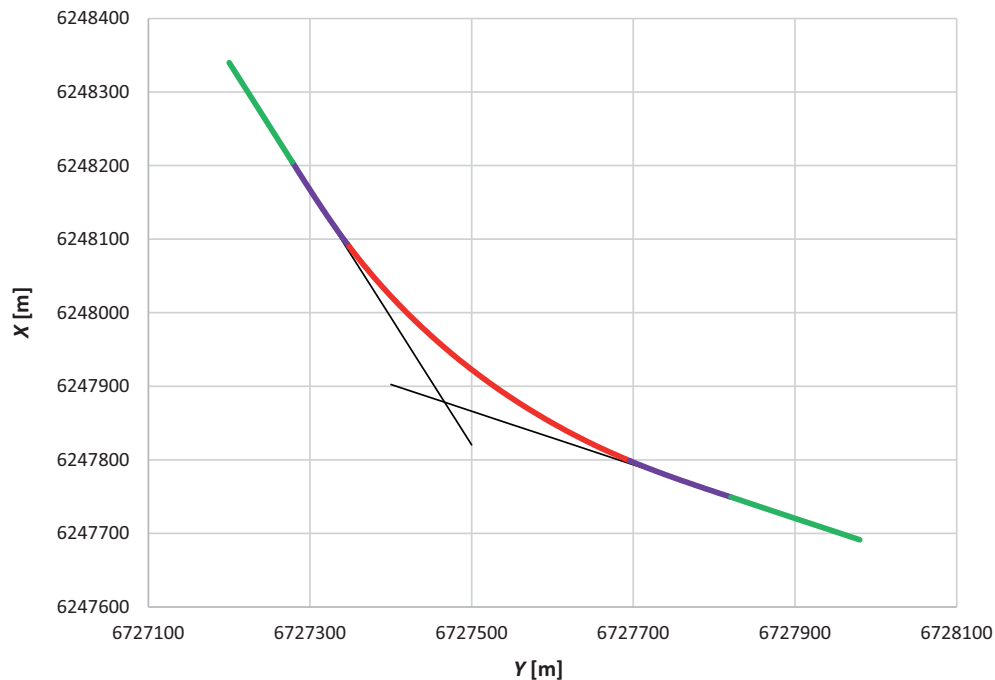
Przedstawiony przykład obliczeniowy wskazuje na wyraźne korzyści, jakie można uzyskać lokalizując początek lokalnego układu współrzędnych w punkcie przecięcia obydwu kierunków głównych trasy (którego współrzędne są znane). Odpowiedni algorytm obliczeniowy prowadzi do rozwiązania problemu w sposób sekwencyjny, znacznie wygodniejszy niż miało to miejsce dotychczas.

5. Wnioski

W artykule zostały przedstawione (i rozszerzone) podstawowe założenia analitycznej metody projektowania układów geometrycznych toru. Inspiracją do opracowania tej metody projektowania były mobilne pomiary satelitarne, zainicjowane w 2009 roku przez zespół naukowy Politechniki Gdańskiej i Akademii Marynarki Wojennej w Gdyni. Pomiary te w bardzo krótkim czasie dostarczają olbrzymią liczbę współrzędnych osi toru – stosowane obecnie odbiorniki



Rys. 9. Przykład II: układ geometryczny zaprojektowany z modyfikowaną metodą analityczną w lokalnym układzie współrzędnych [opracowanie własne]



Rys. 10. Przykład II: układ geometryczny zaprojektowany zmodyfikowaną metodą analityczną w układzie PL-2000 [opracowanie własne]

mają częstotliwość dochodzącą do 100 Hz. Należało to w jakiś sposób wykorzystać, najprościej – odpowiednio dostosowując metodę projektowania.

W analitycznej metodzie projektowania poszczególne elementy układu geometrycznego (odcinki proste, łuki kołowe i krzywe przejściowe) są opisywane za pomocą równań matematycznych. Projektowanie rejonu zmiany kierunku trasy odbywa się w odpowiednim lokalnym układzie współrzędnych kartezjańskich, którego podstawę stanowią symetrycznie ustawione sąsiednie kierunki głównych trasy. Aby można było uzyskać takie ustawienie kierunków głównych, należy dokonać odpowiedniej transformacji (przesunięcia i obrotu) układu PL-2000. Zaprojektowanie układu geometrycznego wymaga uprzedniego określenia jego podstawowych parametrów związanych z zakładaną prędkością jazdy pociągów.

Standardowa procedura projektowania, przedstawiona w artykule, w początkowej fazie charakteryzuje się brakiem znajomości położenia początku lokalnego układu współrzędnych względem układu PL-2000. Pełna integracja tych układów wymaga przeprowadzenia procedury projektowania w układzie lokalnym do samego końca. Położenie punktu początkowego tego układu względem odpowiedniego punktu głównego trasy i wynikające stąd jego współrzędne w układzie PL-2000 są wyznaczane dopiero w końcowej fazie procedury. To właśnie może stanowić podstawowe zastrzeżenie natury metodycznej do omawianej metody projektowania. Z tego powodu mogą się też pojawiać pewne problemy interpretacyjne.

W przypadku symetrycznego układu geometrycznego, tych trudności można uniknąć lokalizując początek lokalnego układu współrzędnych w punkcie przecięcia obydwu kierunków głównych trasy, którego współrzędne są znane. Po wyznaczeniu podstawowych wielkości charakterystycznych, opisany w artykule algorytm obliczeniowy prowadzi do rozwiązania problemu w sposób sekwencyjny, znacznie wygodniejszy niż dotychczas miało to miejsce. Uzyskane korzyści są jednoznacznie ilustrowane przez dwa zamieszczone przykłady obliczeniowe.

Literatura

1. AutoCAD Civil 3D: *Design, Engineering and Construction Software*, Autodesk, San Rafael, CA, USA, <http://www.autodesk.pl/products/civil-3d>
2. Bentley Rail Track: *Rail Infrastructure Design and Optimization*, Bentley Systems, Incorporated, Exton, PA, USA, <https://www.bentley.com/software/rail-design>
3. Bałuch H., Bałuch M.: *Kształtowanie układów geometrycznych toru z uwzględnieniem trwałości nawierzchni*, TTS Technika Transportu Szynowego, nr 7–8/2009, s. 39–42, Instytut Naukowo-Wydawniczy TTS, Radom.
4. Hodas S.: *Design of railway track for speed and high-speed railways*, Procedia Engineering, vol. 91/2014, pp. 256–261, Elsevier.
5. Soleymanifar M., Tavakol M.: *Comparative study of geometric design regulations of railways based on*

- standard optimization*, In Proc. 6th International Conference on Researches in Science and Engineering & 3rd International Congress on Civil, Architecture and Urbanism in Asia, Kasem Bundit University, Bangkok, Thailand, 9th September 2021.
6. Aghastya A. et al.: *A new geometric planning approach for railroads based on satellite imagery*, AIP Conference Proceedings, vol. 2671, 2023, 050005, AIP Publishing.
 7. Zboiński K., Woźnica P.: *Optimisation of polynomial railway transition curves of even degrees*, The Archives of Transport, iss. 3/2015, pp. 71–86, Wydział Transportu Politechniki Warszawskiej.
 8. Bugarin M.R., Orro A., Novales M.: *Geometry of high speed turnouts*, Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board, vol. 2261, iss. 1/2011, pp. 64–72, Sage Journals.
 9. Fellingner M., Marschnig S., Wilfling P.A.: *Innovative track geometry data analysis for turnouts – Preparations to enable the turnout behaviour description*, In Proc. 12th World Congress on Railway Research: Railway Research to Enhance the Customer Experience, Tokyo, Japan, October 2019.
 10. Guerrieri M.: *Fundamentals of railway design, Chapter: The alignment design of ordinary and high-speed railways*, 2023, pp. 21–56, Springer Link.
 11. Andrade A.R., Teixeira P.F.: *A Bayesian model to assess rail track geometry degradation through its life-cycle*, Research in Transportation Economics, iss. 1/2012, pp. 1–8, ScienceDirect.
 12. Li Z.-W., Liu X.-Z., He Y.-L.: *Identification of temperature-induced deformation for HSR slab track using track geometry measurement data*, Sensors, iss. 24/2019, 5446, MDPI.
 13. Khajehei H. et al.: *Allocation of effective maintenance limit for railway track geometry*, Structure and Infrastructure Engineering, iss. 12/2019, pp. 1597–1612, Taylor & Francis Online.
 14. Neuhold J., Vidovic I., Marschnig S.: *Preparing track geometry data for automated maintenance planning*, Journal of Transportation Engineering, Part A: Systems, iss. 5/2020, 04020032, ASCE.
 15. Sadeghi J. et al.: *Development of railway ride comfort prediction model: Incorporating track geometry and rolling stock conditions*, Journal of Transportation Engineering, Part A: Systems, iss. 3/2020, 04020006, ASCE.
 16. Sauni M. et al.: *Investigating root causes of railway track geometry deterioration – A data mining approach*, Frontiers in Built Environment, vol. 6/2020, 122, Frontiers.
 17. Soleimanmeigouni I. et al.: *Prediction of railway track geometry defects: a case study*, Structure and Infrastructure Engineering, iss. 7/2020, pp. 987–1001, Taylor & Francis Online.
 18. Khosravi M. et al.: *Reducing the positional errors of railway track geometry measurements using alignment methods: A comparative case study*, Measurement, vol. 178/2021, 109383, ScienceDirect.
 19. Judek S. et al.: *Preparatory railway track geometry estimation based on GNSS and IMU systems*, Remote Sensing, iss. 21/2022, 5472, MDPI.
 20. Kurhan M., Kurhan D., Hmelevska N.: *Maintenance reliability of railway curves using their design parameters*, Acta Polytechnica Hungarica, 19, iss. 6/2022, pp. 115–127, Springer.
 21. Kampczyk A., Rombalska K.: *Configuration of the geometric state of railway tracks in the sustainability development of electrified traction systems*, Sensors, iss. 5/2023, 2817, MDPI.
 22. Koc W., Specht C.: *Application of the Polish active GNSS geodetic network for surveying and design of the railroad*, In Proc. First International Conference on Road and Rail Infrastructure – CETRA 2010, Opatija, Croatia, pp. 757–762, 2010, University of Zagreb.
 23. Specht C., Koc W.: *Mobile satellite measurements in designing and exploitation of rail roads*, Transportation Research Procedia, vol. 14/2016, pp. 625–634, ScienceDirect.
 24. Koc W.: *Design of rail-track geometric systems by satellite measurement*, Journal of Transportation Engineering, iss. 1/2012, pp. 114–122, ASCE.
 25. Koc W.: *The analytical design method of railway route's main directions intersection area*, Open Engineering, iss. 1/2016, pp. 1–9, De Gruyter.
 26. Koc W.: *Design of compound curves adapted to the satellite measurements*, The Archives of Transport, iss. 2/2015, pp. 37–49, Wydział Transportu Politechniki Warszawskiej.
 27. Koc W.: *Design of reverse curves adapted to the satellite measurements*, Advances in Civil Engineering, vol. 2016, 6503962, Hindawi.
 28. Rozporządzenie Rady Ministrów z dnia 15 października 2012 r. w sprawie państwowego systemu odniesień przestrzennych, Dz.U. 2012, poz. 1247.
 29. Moritz H.: *Geodetic Reference System 1980*, Journal of Geodesy, vol. 74/2000, pp. 128–133, Springer.
 30. Turiño C.E.: *Gauss Krüger projection for areas of wide longitudinal extent*, International Journal of Geographical Information Science, iss. 6/2008, pp. 703–719, Taylor & Francis Online.
 31. Korn G.A., Korn T.M.: *Matematyka dla pracowników naukowych i inżynierów*, PWN Warszawa 1983.