Journal of KONBiN 2019
Volume 49, Issue 3
DOI 10.2478/jok-2019-0055

Jarosław ZIÓŁKOWSKI, Aleksandra LĘGAS
Military University of Technology (Wojskowa Akademia Techniczna)

PROBLEM OF MODELLING ROAD TRANSPORT

Problematyka modelowania transportu drogowego

Abstract: *The article addressed road transport based on the proprietary numerical example. It is a typical optimization issue consisting in reducing the transportation costs between different drop-off locations. To determine the optimum transport plan, the following methods were used: North West Corner Method, Matrix Minima Method and Vogel's Approximation Method (VAM).*
Keywords: modelling, transport, optimization, costs

Streszczenie: *W artykule przedstawiono problem transportowy na autorskim przykładzie liczbowym. Jest to typowe zagadnienie optymalizacyjne polegające na minimalizacji kosztów przewozu towarów pomiędzy wieloma punktami nadania. W celu wyznaczenia optymalnego planu transportu wykorzystano metody: kąta północno-zachodniego, minimalnego elementu macierzy kosztów oraz VAM.*
Słowa kluczowe: modelowanie, transport, optymalizacja, koszty

1. Optimizing transportation routes – theoretical aspect

Designing a supply network is a complex issue since it involves to analyse the warehouse resources, means of transport, availability of infrastructure and cost analysis enabling the smooth delivery of commodities [1,4,12,15]. One of the primary problems is the optimization of transport, which, as a consequence, shall ensure financial benefits, both for the carrier and service provider. It requires to appropriately control the transportation processes. In the case when the fleet of vehicles is few, ensuring the continuity of work does not require to apply special assignment methods. The tasks are established based on the analysis of the possibilities of ensuring loads for each vehicle during the workday. To optimize the work of a high number of the means of transport, analytic-accounting methods are used [6,11,14].

The appropriate construction of a model involves finding analytical dependencies corresponding to the formulated problem described in the form of optimization task, which is to define a decision node in mathematical language. Taking the appropriate decision requires to determine priorities, i.e. the sequence of the solved problems and the availability of resources. It is the so-called establishing constraints [3].

Identification of the decision problem is to precisely determine the current state of undertaken activities and identify the areas of difficulties. Subsequently, a decision problem is orally described. The description of the decision problem in the mathematical form requires to determine:

1) parameters – known values or a priori defined values, unchanged while solving a given problem,
2) decision variables – searched quantities, which need to be established while solving the problem,
3) limitations – expressed algebraically by the system of equations and inequalities relative to decision variables,
4) criterion function – quality coefficient of the solution expressed algebraically relative to decision variables [1,3].

Further deliberations concern modelling the situation for which constraints and selection criteria may be described by a mathematical language. Constraints are most often defined by the system of equations and inequalities where occur certain quantities, the so-called parameters, and quantities, which should be determined by completing the task, i.e. decision variables. There may also be conditions regarding the character of variables or type of variables (e.g. condition of their continuity, the existence of integers or binarity) [3].

The feasible solution of optimization task will be associated with such a system of decision variables, which meet all constraints describing the examined situation or a particular parameter, by a unit of its measure, used to predict or estimate the durability or reliability [8,9,10,13]. The selection criterion of the optimal solution is function measuring an objective, which has to be achieved. The criterion of optimizing the transportation schedule is usually defined as the reduction of total transportation costs [4]. Solving the optimization task is thus to determine such a feasible solution by which the criterion function has the extreme value. If D^{dop} means a set of feasible solutions of optimization task, X – any solution, a F – criterion function, then the optimization task is [3]:

to find such a feasible solution $X^* \in D^{dop}$, for which:

$F(X^*) = max \{F(X) : X \in D^{dop}\}$ – *if a person taking a decision has interest in maximization of criterion function* (1)

or

$F(X^*) = min \{F(X) : X \in D^{dop}\}$ – *if a person taking a decision has interest in minimization of criterion function* (2)

where:

D^{dop} – set of feasible solutions of optimization task,
X – any solution,
F – criterion function.

For the solutions of such a task would enable the selection of the best decision by the established constraints, it is essential to indicate:

- quantities, which are to be determined (defining decision variables),
- quantities, which are given (defining task parameters),
- conditions, which limit the given decision variables,
- objective function as a function of decision variables [5].

Providing in a decision task, the objective function and all constraints are linear; then the task is called a linear decision task. If additionally, all variables are continuous, such a problem is then called a linear programming task [5]. The idea of applying linear programming for the minimization of empty runs is to use the so-called classic transportation task to determine the optimum relationships for the means of transport between recipients and supplies of shipment [1,6].

Transportation problem consists in minimizing the transportation costs (i.e. transport optimization) of commodities between various drop-off locations. The classic transportation problem is to [1,3,4,12]:

- determine a transport plan of uniform product from N drop–off locations (deliveries) to M pick-up locations,
- devise a transportation plan, which aims at minimizing the total transportation costs (criterion function), by the pre-defined parameters, such as:
  - quantity of supply on the suppliers' side (possibilities of suppliers),
  - size of needs on the recipients' side (demand of recipients),
  - unit costs of transport from the supplier to the recipient.

Model for classic transportation problem includes [1,3,4,12]:

1. Identification (defining data), i.e.:
   - set of suppliers $I = \{1, 2, \ldots, i, \ldots, N\}$ where: i – supplier identification number, N – the amount of suppliers;
   - set of suppliers $J = \{1, 2, \ldots, j, \ldots, M\}$ where: j – recipient identification number, M – the amount of recipients;
   - production capacities of suppliers: $a = [a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_N]$;
   - demand of recipient: $b = [b_1, b_2, \ldots, b_j, \ldots, b_M]$;
   - unit cost c_{ij} of transport of commodities between and j-this recipients, presented in the form of matrix $C = [c_{ij}]_{NxM}$.
2. Defining decision variables (determining searched quantities):
   Decision variables will be variables x_{ij} defining the size of shipment of commodities between i-this supplier and j-this recipient; expressed in the matrix form $X = [xc_{ij}]_{NxM}$.
3. Defining constraints, which consist of:
   - production capacity of the i- this supplier (drop-off location) amounts to a_i and will be fully used to meet the demand of recipients in the form of:

$$\sum_{j=1}^{M} x_{ij} = a_i \text{ for every } i = 1, \ldots, N \tag{3}$$

where:

x_{ij} – decision variables,
M – amount of recipients,
j – recipient identification number,
a – production capacity of suppliers.

- demand to store the commodity by the j-this recipient (pick-up location) is b_j and j-you, the demand capacity of commodity is as follows:

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij} = b_i \text{ for every } j = 1, \ldots, M \tag{4}$$

where:

x_{ij} – decision variables,
N – amount of suppliers,
i – supplier identification number,
b – demand of recipients.

– the transported commodity between the i-this supplier and the j-this recipient does not have to assume negative values, which is reflected below:

$$x_{ij} \geq 0 \text{ for every } i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M \tag{5}$$

Formulating the criterion function (defining the minimization of total delivery costs of commodity).

Haulages should be organised in such a way that a criterion function will achieve the minimum value [7] according to the relation:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} c_{ij}\, x_{ij} \tag{6}$$

where:

$F(x)$ – criterion function,
c_{ij} – unit transportation cost of commodities.

The general form of transportation task becomes [5]:

- objective function:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j \rightarrow max. (\text{min.}) \tag{7}$$

- constraints:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \leq b_i \; for \; (\text{i} = 1,2, \dots, \text{m}) \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \geq b_i \; for \; (\text{i} = \text{m} + 1, \dots, \text{p}) \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i for \; (\text{i} = \text{p} + 1, \dots, \text{r}) \tag{10}$$

and

$$x_{ij} = 0 \; for \; (j = 1,2, \dots, n_1 = n \tag{11}$$

where:

c_j – task execution cost of the j-this task.

In this case, each vector of decision variables:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{12}$$

Meeting the constraints is a feasible solution. If the objective function for such a solution attains an extreme value, then it is optimal [5].

By solving decision tasks, it is indispensable to assume that the task of searching for the maximum [5]:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \, x_j \ \rightarrow max. \tag{13}$$

Is equivalent to the task of searching for the minimum:

$$\sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j \ \rightarrow min. \tag{14}$$

Linear programming tasks in a matrix form can thus be summarized in the following form:

$$\sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j \ \rightarrow min. \tag{15}$$

where:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} - matrix\ of\ coefficients$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} - vector\ of\ absolute\ terms$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} - vector\ of\ decision\ variables$$

$$\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{c_1}\ \boldsymbol{c_2}\ \cdots\ \boldsymbol{c_n}] - objective\ function\ weight\ vector$$

The basic method enabling to solve any linear programming task is a Simplex method. It consists in the sequential, strictly defined review of the subsequently created Simplex tableaus [5].

With every variable x_j, the index of optimization criterion is associated. For basic variables it is always zero, but for non-basic variables how the value of objective function will change when a variable x_j will assume the value 1 and the values of basic variables will be appropriately changed to maintain the feasibility of solution [5].

Assuming that a linear programming task becomes [5]:

$$\begin{cases} cx \ \rightarrow maks. \\ Ax = b \\ x \ \geq 0 \end{cases} \tag{16}$$

where:

b – square matrix m – this degree, consisting of m linear independent columns of matrix A.

Matrix b is called a basic and their columns are called basic columns, but the remaining columns are called non-basic. The variables associated with basic columns are called basic variables and other variables are called non-basic variables. Every base is related to the basic solution.

If the system $Ax = b$ is consistent and $n > m$, then it has infinitely many solutions and finitely many basic solutions according to the relation:

$$\frac{n\,!}{m!(n-m)} \tag{17}$$

For the tasks regarding the linear programming, the following statement is true: *If the task has an optimal solution, then it also has an optimal basic solution* [1].

A particular example of linear decision tasks are the so-called classic transportation tasks (fig.1). They are distinguished by a specific system of matrix coefficients and constraints. A transportation task is also called a Hitchcock problem.

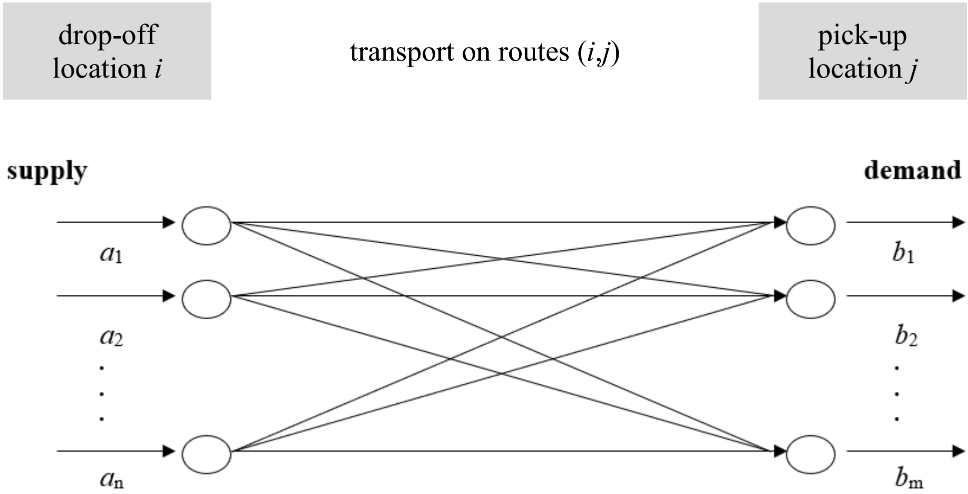


Fig. 1. Diagram of a classic transportation task, own study based on [5, p. 182]

By using an algorithm used to solve a transportation task, it is possible to approach decision problems regarding the flow of goods between n – suppliers with a_i units of a product $(i = \ldots n)$ and m – recipients expressing the demand for b_j units of the product $(j = 1 \ldots m)$. Additionally, every supplier can supply any recipient, and any recipient can pick up the commodity from any supplier. Moreover, unit costs c_{ij} associated with the flow of goods from the delivery i and to the recipient j [5].

When we define by x_{ij} (decision variables) the delivery quantity from i-this supplier to j-this recipient, the transportation task adopts the following form:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, for\ (j = 1, 2, \ldots m) \tag{18}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, for\ (i = 1, 2, \ldots n) \tag{19}$$

and:

$$x_{ij} = 0\ for\ (i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, m) \tag{20}$$

for which the objective function:

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \ \rightarrow min. \tag{21}$$

attains the minimum value.

Additionally, the condition of the balance of supply and demand has to be met. It is the so-called closed transportation task [5]:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{22}$$

In practice, usually, we deal with the problem that supply exceeds demand or demand is higher than the available amount of commodity. In the case of the lack of balance, the problem is described as an open transportation task, which should be converted to the balanced form, considering the two cases [5]:

1) including an insufficient amount of supplies in relation to the needs of all clients (supply smaller than demand), which is expressed by the following equation:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{23}$$

To achieve a balanced form, a dummy supplier, which has exactly a_{m+1} products, is introduced to the task:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \tag{24}$$

where:
a_{m+1} – dummy supplier.

Additionally, the following coefficients are added to the cost matrix:

$$c_{m+1,1} = 0, \dots, c_{m+1,n} = 0 - (costs\ of\ fake\ transport) \tag{25}$$

2) in which the demand for products is smaller than the warehouse reserves (supply greater than the demand), which is expressed by the following relation:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{26}$$

To obtain a balanced form the dummy recipient, which has precisely b_{n+1} products, is introduced:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_j - \sum_{j=1}^{n} b_i \tag{27}$$

where:
b_{n+1} – dummy supplier.

Additionally, the following coefficients are added to the matrix of costs:

$$c_{n+1,1} = 0, \dots, c_{n+1,m} = 0 - (costs\ of\ fake\ transport) \tag{28}$$

In determining the delivery quantity, two stages have to be taken into consideration [5]:

1) defining an initial plan of feasible transport, i.e. initial basic feasible solution. To this end, the following methods are used:

- North West Corner Method,
- Vogel's Approximation Method (VAM),
- Matrix Minima Method.

2) Determining the optimal solution based on the initial basic feasible solution. To determine an optimal solution, MODI method (*Modified Distribution Method*) is most frequently used to determine an optimal solution.

2. Closed transportation task – numerical example

In the example, three suppliers D_1, D_2, D_3 were considered, which provided to four recipients O_1, O_2, O_3, O_4 a homogeneous product by assuming the compatibility of demand with supply. It is necessary to devise such a transport plan that transportation cost was minimum. Tab.1 summarized data on supply, demand and transportation costs of product unit between suppliers and recipients.

If the total supply equals the aggregated demand, then the task is balanced, described as:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{29}$$

where:

a_i – suppliers of a certain homogeneous product,
m – number of suppliers,
b_j – recipients of a certain homogeneous product,
n – number of recipients,
x_{ij} – decision variables, i.e. commodity quantity shipped from i-this supplier to j-this recipient.

Table 1

Supply, demand and unit transportation cost in the delivery network

	O_1	O_2	O_3	O_4	Supply a_j
D_1	$k_{11} = 10$	$k_{12} = 13$	$k_{13} = 5$	$k_{14} = 7$	$a_1 = 170$
D_2	$k_{21} = 8$	$k_{22} = 7$	$k_{23} = 14$	$k_{24} = 9$	$a_2 = 80$
D_3	$k_{31} = 12$	$k_{32} = 9$	$k_{33} = 11$	$k_{34} = 6$	$a_3 = 150$
Demand b_i	$b_1 = 120$	$b_2 = 90$	$b_3 = 80$	$b_4 = 110$	$\sum = 400$

For the problem described above it is necessary to write the constraints:

- for suppliers:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 170 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 80 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 150 \end{aligned} \tag{30}$$

- for recipients:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 120 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 90 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 80 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 110 \end{aligned} \tag{31}$$

Objective function is understood as a minimum transportation cost and in the analyzed example it adopts the following form:

$$Z_0 = 10x_{11} + 13x_{12} + 5x_{13} + 7x_{14} + 8x_{21} + 7x_{22} + 14x_{23} + 9x_{24} + 12x_{31} + 9x_{32} + 11x_{33} + 6x_{34} \rightarrow min \tag{32}$$

In practice, there are a lot of methods, which facilitate obtaining the initial basic solution. The most common include the methods mentioned above:

- North West Corner role (NWC) Method,
- Matrix Minima Method,
- Vogel's Approximation Method [2].

North West Corner Method is known as the basic and the easiest methods of obtaining the initial basic solution. Its fundamental assumption is a subsequent assignment of correct values to the variables, every time for these routes, which are observed in the left upper corner (north-west) of the table of transfers.

Searching for the basic solution starts from value x_{ij} for route 11. Value x_{11} is derived from the formula:

$$x_{11} = min \{a_1, b_1\} \tag{33}$$

The next step is to subtract x_{11} from values a_1 and b_1, column or row is deleted from consideration, for which such difference amounts to zero and for the row or column, where this difference is greater than zero (positive). Next computations are done with the use of the value of obtained difference, and once again, we start with the North-West corner (tab. 2). When all columns and rows will be deleted from consideration, determining an initial basic solution will be treated as complete. As a consequence, the initial basic solution is reached. (tab. 3) [2].

Table 2

Step 1 – North-West Corner Method

	O_1	O_2	O_3	O_4	Podaż a_j
D_1	120				$a_1 = 50$
D_2	0				$a_2 = 80$
D_3	0				$a_3 = 150$
Popyt b_i	$b_1 = 0$	$b_2 = 90$	$b_3 = 80$	$b_4 = 110$	

Table 3

Initial basic solution: North-West Corner Method

	O_1	O_2	O_3	O_4	Podaż a_j
D_1	120	50	0	0	$a_1 = 0$
D_2	0	40	40	0	$a_2 = 0$
D_3	0	0	40	110	$a_3 = 0$
Popyt b_i	$b_1 = 0$	$b_2 = 0$	$b_3 = 0$	$b_4 = 0$	

The value of the objective function for this solution is thus computed as:

$$Z_0 = 10 \cdot 120 + 13 \cdot 50 + 7 \cdot 40 + 14 \cdot 40 + 11 \cdot 40 + 6 \cdot 110 = 3790 \text{ zł}$$

The second method of determining an initial basic solution is a Matrix Minima Method, in which filling transfer table starts with routes with the lowest unit costs. In the example outlined above, minima $k_{mn} = 6$ has route 13, this cell enables to make calculations. The transport quantity is established according to the condition $x^1_{1,3} = \min\{a_1, b_3\} = 80$ (tab. 4).

In the next step, the route x^2_{34} is filled, because this route has the lowest unit cost. Next steps are carried out analogically, and the algorithm is repeated until the last column of matrix [2] is eliminated.

Table 5 presents the obtained basic solution.

Table 4

Step 1 – Matrix Minima Method

	O_1	O_2	O_3	O_4	Podaż a_j
D_1			80		$a_1 = 90$
D_2			0		$a_2 = 80$
D_3			0		$a_3 = 150$
Popyt b_i	$b_1 = 120$	$b_2 = 90$	$b_3 = 0$	$b_4 = 110$	$\sum = 400$

Table 5

Initial basic solution: Matrix Minima Method

	O_1	O_2	O_3	O_4	Podaż a_j
D_1	90	0	80	0	$a_1 = 0$
D_2	0	80	0	0	$a_2 = 0$
D_3	30	10	0	110	$a_3 = 0$
Popyt b_i	$b_1 = 0$	$b_2 = 0$	$b_3 = 0$	$b_4 = 0$	$\sum = 400$

Value of the objective function for this solution is as follows:

$$Z_0 = 10 \cdot 90 + 12 \cdot 30 + 7 \cdot 80 + 9 \cdot 10 + 5 \cdot 80 + 6 \cdot 110 = 2970 \text{ zł}$$

The last presented method is VAM, which considers the criterion of costs. In this case, in a given computational iteration, the following differences are searched for: Δh_i and Δw_i between the lowest (k_{ia}) and second-lowest (tab. 6) delivery possibility (k_{ie}) for each row and column [2].

Table 6

Cost differences in VAM method for the first iteration

	O_1	O_2	O_3	O_4	Δh_i
D_1	$k_{11} = 10$	$k_{12} = 13$	$k_{13} = 5$	$k_{14} = 7$	2
D_2	$k_{21} = 8$	$k_{22} = 7$	$k_{23} = 14$	$k_{24} = 9$	1
D_3	$k_{31} = 12$	$k_{32} = 9$	$k_{33} = 11$	$k_{34} = 6$	3
Δw_i	2	2	6	1	

The next step, once all cost differences are determined, is to find a row or a column with the difference of the greatest value. In the designated row or column, it is necessary to insert a value satisfying the demand to the cell with the lowest cost. In this case, it will be route 13. According to the condition $w^1_{1,3} = \min\{a_1, b_3\} = 80$. After reducing a_1 i b_2, which amount to $a^1_1 = 170 - 80 = 90$ and $b^1_3 = 80 - 80 = 0$ respectively, column No. 3 has to be rejected from further considerations (exactly as in the previous methods, it is necessary to fill route 23 and 33 with zeroes), as it is observed in tab.7 depicted below [2].

Table 7

Transport matrix after the first iteration in the VAM method

	O_1	O_2	O_3	O_4	Supply a_j
D_1			80		$a_1 = 90$
D_2			0		$a_2 = 80$
D_3			0		$a_3 = 150$
Demand b_i	$b_1 = 120$	$b_2 = 90$	$b_3 = 0$	$b_4 = 110$	$\sum = 400$

Then, it is essential to repeat (tab. 8) the above steps for the reduced table.

Table 8

Cost differences in VAM method for the second iteration

	O_1		O_2	O_3	O_4	Δh_i
D_1	$k_{11} = 10$		$k_{12} = 13$		$k_{14} = 7$	3
D_2	$k_{21} = 8$		$k_{22} = 7$		$k_{24} = 9$	1
D_3	$k_{31} = 12$		$k_{32} = 9$		$k_{34} = 6$	3
Δw_i	2		2		1	

Again, the column or row with the difference of the greatest value needs to be found, and then the route with the lowest cost has to be filled [2]. In a situation when there are cost differences with the identical value, the choice has to be made arbitrarily. One of the possibilities is to select a column or a row with the highest cost, due to the fact that once this column or row is reduced, it will also be reduced [2].

In the following stages, it is necessary to proceed analogical until the initial basic feasible solution, which was described in tab.9, is obtained.

Table 9

Initial basic solution: VAM method

	O_1	O_2	O_3	O_4	Podaż a_j
D_1	0	0	80	90	$a_1 = 0$
D_2	80	0	0	0	$a_2 = 0$
D_3	40	90	0	20	$a_3 = 00$
Demand b_i	$b_1 = 0$	$b_2 = 0$	$b_3 = 0$	$b_4 = 0$	$\sum = 400$

The value of the objective function for this solution amounts to:

$$Z_0 = 5 \cdot 80 + 7 \cdot 90 + 8 \cdot 80 + 12 \cdot 40 + 9 \cdot 90 + 6 \cdot 20 = 3080 \text{ zł}$$

Figure 2 outlines a graphical image of the value of the objective function by applying the three above mentioned methods of computing the initial basic feasible solution.

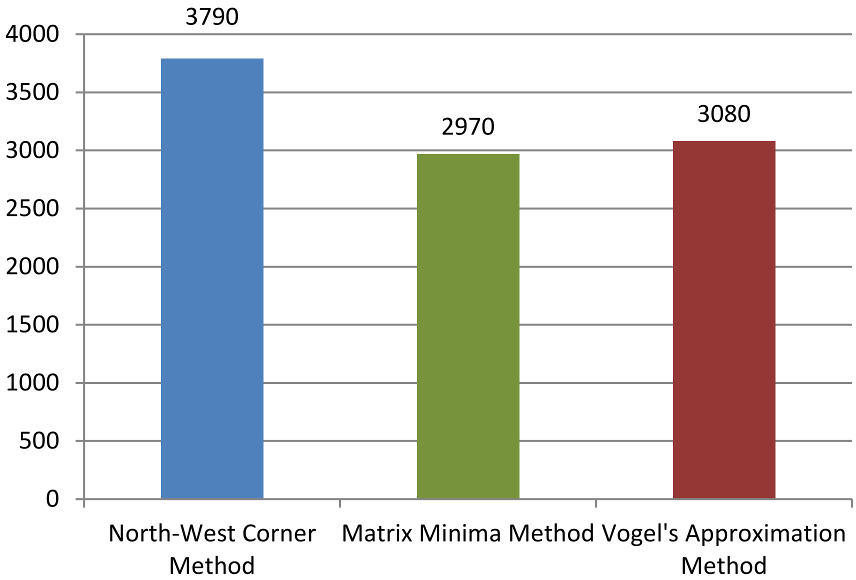


Fig. 2. Values of the objective function achieved for different methods of determining the initial basic feasible solution [PLN]

The presented transportation task was to determine such a solution, by which an established function – criterion function – attain a minimum value. It was the main objective of the task, which was achieved. In the case under consideration, the lowest value of objective function was reached by using a Matrix Minima Method.

3. Summary

The optimization methodology of transportation routes based on the solution of the proprietary numerical example was depicted in practice. The presented numerical example, which is one of the issues of the transportation problem in distribution logistics, enabled to identify a method, which proved to be the best in the selection of the optimal solution. Three suppliers were thus assumed providing a homogenous product to four recipients. It was also established that demand equals supply, and thus, the example of a closed transportation task was discussed. To solve a problem formulated in such a way the so-called initial basic feasible solution was formulated for three presented methods, i.e.:

- North-West Corner Method amounting to PLN 3 790;
- Matrix Minima Method amounting to PLN 2 790;
- Vogel's Approximation Method amounting to PLN 3 080.

The lowest value of objective function – equalling 2970 was obtained for the Matrix Minima Method.

4. References

1. Bonkowska K., Ziółkowski J.: Zamknięte zadania transportowe, SLW nr 45.
2. Cyplik P., Głowacka-Fertsch D., Fertsch M.: Logistyka przedsiębiorstw dystrybucyjnych, ILiM, Poznań 2008.
3. Jacyna M.: Wybrane zagadnienia modelowania systemów transportowych, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2009.
4. Kauf S., Tłuczak A.: Optymalizacja decyzji logistycznych, Difin, Warszawa 2016.
5. Michlowicz E.: Zarys logistyki przedsiębiorstwa, Wydawnictwo AGH, Kraków 2012.
6. Mindura L. (red.): Technologie transportowe, Wydawnictwo Naukowe Instytutu Technologii Eksploatacji – PIB, Radom 2014.
7. Niziński S., Żurek J., Ligier K.: Logistyka dla inżynierów*,* WKiŁ, Warszawa 2011.
8. Tomaszek H., Zieja M., Ważny M.: A method for reliability assessment of structural components of aircraft and sea-going ships with taking into account a given failure generation model. Polish Maritime Research 23(2), 2016.
9. Zieja M., A method of predicting reliability and lifetime of aeronautical hardware with the characteristic function applied. Transport Means – Proceedings of 19th International Scientific Conference on Transport Means, Kaunas, Lithuania 2015.
10. Zieja M., Ważny M., Stępień S.: Outline of a method for estimating the durability of components or device assemblies while maintaining the required reliability level. Eksploatacja i Niezawodność - Maintenance and Reliability 20(2), 2018.
11. Ziółkowski J., Borucka A.: Markov model in logistic management of enterprise. Journal of KONBiN 38(1), 2016, DOI 10.1515/jok-2016-0027.
12. Ziółkowski J., Lęgas A.: Minimisation of empty runs in transport. Journal of KONBiN 48(1), 2018, DOI 10.2478/jok-2018-0067.
13. Żurek J., Kaleta R., Zieja M.: An application of characteristic function in order to predict reliability and lifetime of aeronautical hardware. AIP Conference Proceedings of International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics 2015, ICNAAM 2015, Volume 1738 (2016), Article number 440004.

14. Żurek J., Ziółkowski J.: Method of formulating the required number of vehicles for delivery aircrafts in aviation fuel. Journal of KONBiN 44(1), 2017, DOI 10.1515/jok-2017-0078.
15. Żurek J., Ziółkowski J., Szkutnik-Rogoż J., Stochastic dominance application for optimal transport company selection. AIP Conference Proceedings of 15th Conference on Computational Technologies in Engineering, TKI 2018; Volume 2078 (2019), Article number 020074.

PROBLEMATYKA MODELOWANIA TRANSPORTU DROGOWEGO

1. Optymalizacja tras przewozowych – ujęcie teoretyczne

Projektowanie sieci dystrybucji jest zagadnieniem złożonym, gdyż wymaga analizy posiadanych zasobów magazynowych, środków transportu, dostępności infrastruktury oraz analizy kosztów umożliwiających sprawne dostarczanie towarów [1,4,12,15]. Jednym z kluczowych problemów jest optymalizacja przewozów, która powinna w konsekwencji zapewnić korzyści ekonomiczne, zarówno samemu przewoźnikowi, jak i usługodawcy. Wymaga jednak odpowiedniego sterowania procesami przewozowymi. W przypadku gdy tabor jest mało liczny, zapewnienie ciągłości pracy nie wymaga zastosowania specjalnych metod dyspozycyjnych. Zadania ustala się na podstawie analizy możliwości zapewnienia ładunków dla każdego pojazdu podczas dnia pracy. Do optymalizacji pracy dużej liczby środków transportu mają zastosowanie metody analityczno-obrachunkowe [6,11,14].

Właściwe zbudowanie modelu polega na znalezieniu zależności analitycznych odpowiadających formułowanemu problemowi przedstawionemu w postaci zadania optymalizacyjnego, które polega na opisie węzła decyzyjnego w języku matematyki. Podjęcie właściwej decyzji wymaga ustalenia priorytetów, tj. kolejności rozwiązywania problemów, oraz dostępności zasobów, jest to tzw. ustalenie ograniczeń [3].

Identyfikacja problemu decyzyjnego polega na dokładnym określeniu aktualnego stanu realizowanych działań oraz wskazaniu obszarów występowania trudności. W następnej kolejności wykonuje się werbalny opis problemu decyzyjnego. Zapis problemu decyzyjnego w postaci matematycznej wymaga określenia:

1) parametrów – wielkości znane lub zdefiniowane a priori, niezmienne podczas rozwiązywania danego problemu,
2) zmiennych decyzyjnych – wielkości poszukiwane, które wymagają ustalenia podczas rozwiązywania problemu,
3) ograniczeń – wyrażone algebraicznie przez układ równań i nierówności względem zmiennych decyzyjnych,

4) funkcji kryterium – wskaźnik jakości rozwiązania wyrażony algebraicznie względem zmiennych decyzyjnych [1,3].

Przedmiotem dalszych rozważań będzie modelowanie sytuacji, dla których warunki ograniczające oraz kryteria wyboru dają się opisać językiem matematycznym. Warunki ograniczające opisywane są najczęściej za pomocą układu równań lub nierówności, w których występują pewne wielkości, zwane parametrami, oraz wielkości, które należy wyznaczyć w wyniku rozwiązania zadania, tj. zmienne decyzyjne. Mogą także występować warunki dotyczące np. znaku zmiennych lub typu zmiennych (np. warunek ich ciągłości, całkowitoliczbowość lub binarność) [3].

Rozwiązanie dopuszczalne zadania optymalizacyjnego będzie kojarzone z takim układem wartości zmiennych decyzyjnych, które spełniają wszystkie warunki ograniczające opisujące badaną sytuację lub konkretny parametr poprzez jednostkę jego miary służącą do prognozy lub oceny trwałości lub niezawodności [8,9,10,13]. Kryterium wyboru rozwiązania optymalnego będzie funkcja mierząca cel, który ma być osiągnięty. Kryterium optymalizacji planu przewozów jest najczęściej zdefiniowane jako minimalizacja łącznych kosztów przewozów [4]. Rozwiązanie zadania optymalizacyjnego polega więc na wyznaczeniu takiego rozwiązania dopuszczalnego, przy którym funkcja kryterium osiąga wartość ekstremalną. Jeżeli D^{dop} oznaczać będzie zbiór dopuszczalnych rozwiązań zadania optymalizacyjnego, X – dowolne rozwiązaniu, a F – funkcję kryterium, to zadanie optymalizacyjne będzie miało postać [3]:

znaleźć takie rozwiązanie dopuszczalne $X^* \in D^{dop}$, dla którego:

$F(X^*) = \max \{F(X) : X \in D^{dop}\}$ – jeżeli osobie podejmującej decyzje zależy na maksymalizacji funkcji kryterium (1)

lub

$F(X^*) = \min \{F(X) : X \in D^{dop}\}$ – jeżeli osobie podejmującej decyzje zależy na minimalizacji funkcji kryterium (2)

gdzie:

D^{dop} – zbiór dopuszczalnych rozwiązań zadania optymalizacyjnego,
X – dowolne rozwiązanie,
F – funkcja kryterium.

Aby rozwiązanie takiego zadania umożliwiło wybór najlepszej decyzji przy ustalonych ograniczeniach, należy wskazać:

- wielkości, które mają być wyznaczone (określenie zmiennych decyzyjnych),
- wielkości, które są dane (określone parametrów zadania),
- warunki będące ograniczeniem dla danych zmiennych decyzyjnych,
- funkcję celu jako funkcję zmiennych decyzyjnych [5].

Jeżeli w zadaniu decyzyjnym funkcja celu i wszystkie warunki ograniczające są liniowe, to zadanie takie nazywa się liniowym zadaniem decyzyjnym. Jeśli dodatkowo wszystkie zmienne są ciągłe, to taki problem jest nazywany zadaniem programowania liniowego [5]. Idea zastosowania programowania liniowego do minimalizacji próżnych przebiegów polega na wykorzystaniu tzw. klasycznego zadania transportowego do ustalenia optymalnych powiązań dla środków transportu między odbiorcami i dostawcami ładunków [1,6].

Problem transportowy polega na minimalizacji kosztów przewozu (tzw. optymalizacji przewozów) towarów między wieloma punktami nadania (dostawcy). Klasyczny problem transportowy polega na [1,3,4,12]:

- wyznaczeniu planu przewozu jednorodnego wyrobu z N punktów nadania (dostaw) do M punktów odbioru,
- skonstruowaniu planu przewozu, którego celem jest minimalizacja całkowitych kosztów przewozu (funkcja kryterium), przy zadanych parametrach, takich jak:
  – wielkości podaży po stronie dostawców (możliwości dostawców),
  – wielkości potrzeb po stronie odbiorców (zapotrzebowanie odbiorców),
  – jednostkowe koszty przewozu od dostawcy do odbiorcy.

Model klasycznego problemu transportowego obejmuje [1,3,4,12]:

1. Identyfikację (określenie danych), tj.:
   – zbiór dostawców $I = \{1, 2, \ldots, i, \ldots, N\}$, gdzie: i – numer dostawcy, N – liczba dostawców;
   – zbiór odbiorców $J = \{1, 2, \ldots, j, \ldots, M\}$, gdzie: j – numer odbiorcy, M – liczba odbiorców;
   – możliwości produkcyjne dostawców: $a = [a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_N]$;
   – zapotrzebowanie odbiorców: $b = [b_1, b_2, \ldots, b_j, \ldots, b_M]$;
   – koszt jednostkowy c_{ij} przewozu towarów między i-tym dostawcą oraz j-tym odbiorcą, przedstawiony w postaci macierzy $C = [c_{ij}]_{NxM}$.
2. Zdefiniowanie zmiennych decyzyjnych (określenie wielkości poszukiwanych):
   Zmiennymi decyzyjnymi będą zmienne x_{ij} określające wielkości dostaw towaru między i-tym dostawcą oraz j-tym odbiorcą; zapisane w postaci macierzy $X = [xc_{ij}]_{NxM}$.
3. Zdefiniowanie ograniczeń, w ramach których mieszczą się:

– zdolność produkcyjna i-tego dostawcy (punkt nadania) wynosi a_i i będzie ona całkowicie wykorzystana do zaspokojenia zapotrzebowania odbiorców, w postaci:

$$\sum_{j=1}^{M} x_{ij} = a_i \text{ dla każdego } i = 1, \dots, N \tag{3}$$

gdzie:

x_{ij} – zmienne decyzyjne,
M – liczba odbiorców,
j – numer odbiorcy,
a – możliwości produkcyjne dostawców.

– zapotrzebowanie zmagazynowania towaru przez j-tego odbiorcę (punkt odbioru) wynosi b_j oraz j-ty odbiorca otrzyma tę wielkość zapotrzebowania towaru, w postaci:

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij} = b_i \text{ dla każdego } j = 1, \dots, M \tag{4}$$

gdzie:

x_{ij} – zmienne decyzyjne,
N – liczba dostawców,
i – numer dostawcy,
b – zapotrzebowanie odbiorców.

– przewożony towar pomiędzy i-tym dostawcą oraz j-tym odbiorcą nie może przyjmować wartości ujemnych, co określa zapis:

$$x_{ij} \geq 0 \text{ dla każdego } i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M \tag{5}$$

4. Formułowanie funkcji kryterium (określającej minimalizację całkowitych kosztów dostawy towaru).

Przewozy powinny być tak zorganizowane, aby funkcja kryterium osiągnęła wartość minimalną [7] zgodnie z zależnością:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} c_{ij}\, x_{ij} \tag{6}$$

gdzie:

$F(x)$ – funkcja kryterium,
c_{ij} – jednostkowy koszt przewozu towarów.

Ogólna postać zadania transportowego jest zatem następująca [5]:

- funkcja celu:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j \rightarrow maks.\,(\mathrm{min.}) \tag{7}$$

- ograniczenia:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \leq b_i\; dla\; (\mathrm{i} = 1{,}2, \dots, \mathrm{m}) \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \geq b_i\; dla\; (\mathrm{i} = \mathrm{m} + 1, \dots, \mathrm{p}) \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = b_i\; dla\; (\mathrm{i} = \mathrm{p} + 1, \dots, \mathrm{r}) \tag{10}$$

oraz

$$x_{ij} = 0\; dla\; (j = 1{,}2, \dots, n_1 = n \tag{11}$$

gdzie:
c_j – koszt wykonania *j*-tego zadania.

W takim przypadku każdy wektor zmiennych decyzyjnych:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{12}$$

spełniający warunki ograniczające jest rozwiązaniem dopuszczalnym. Jeżeli funkcja celu dla takiego rozwiązania osiąga ekstremum, to jest ono optymalne [5].

Przy rozwiązywaniu zadań decyzyjnych istotne jest założenie, że zadanie poszukiwania maksimum [5]:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j \rightarrow maks. \tag{13}$$

jest równoważne zadaniu poszukiwania minimum:

$$\sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j \rightarrow min. \tag{14}$$

Zadania programowania liniowego w postaci macierzowej można zatem zapisać w następującej postaci:

$$\sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j \rightarrow min. \tag{15}$$

gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} - macierz\ współczynników$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} - wektor\ wyrazów\ wolnych$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} - wektor\ zmiennych\ decyzyjnych$$

$$\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{c_1}\ \boldsymbol{c_2}\ \cdots\ \boldsymbol{c_n}] - wektor\ wag\ funkcji\ celu$$

Podstawową metodą pozwalającą na rozwiązanie dowolnego zadania programowania liniowego jest metoda Simpleks. Polega ona na sekwencyjnym, ściśle określonym przeglądzie tworzonych kolejno tablic simpleksowych [5].

Z każdą zmienną x_j związany jest wskaźnik kryterium optymalności. Dla zmiennych bazowych ma on zawsze wartość zero, natomiast dla zmiennych niebazowych określa, jak zmieni się wartość funkcji celu, gdy zmienna x_j przyjmie wartość jeden, a wartości zmiennych bazowych zostaną odpowiednio zmienione w celu zachowania dopuszczalności rozwiązania [5].

Przy założeniu, że zadanie programowania liniowego ma postać [5]:

$$\begin{cases} cx \ \rightarrow maks. \\ Ax = b \\ x \ \geq 0 \end{cases} \tag{16}$$

gdzie:

b – macierz kwadratowa m-tego stopnia, składająca się z m liniowo niezależnych kolumn macierzy A.

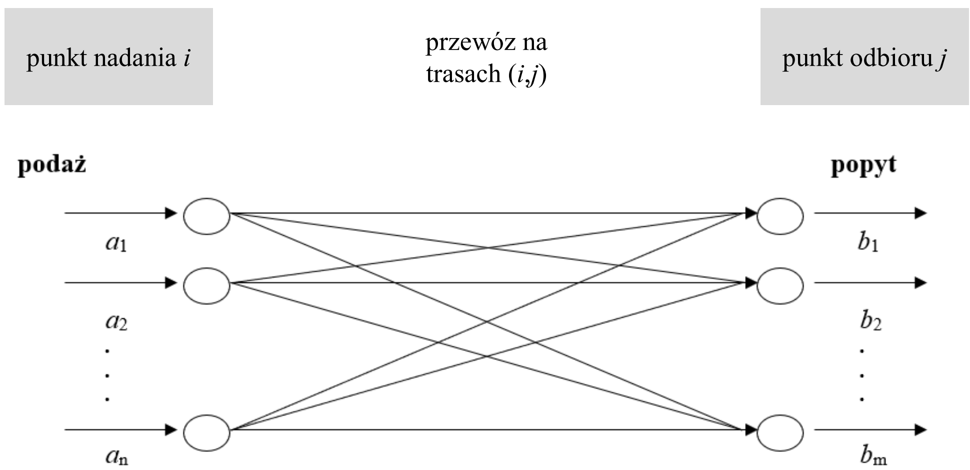
Macierz b nazywana jest bazową, a jej kolumny bazowymi, natomiast pozostałe niebazowymi. Zmienne związane z kolumnami bazowymi noszą miano bazowych, a pozostałe zmienne – zmiennych niebazowych. Z każdą bazą związane jest rozwiązanie bazowe.

Jeżeli układ $Ax = b$ jest niesprzeczny oraz $n > m$, to posiada on nieskończenie wiele rozwiązań i skończenie wiele rozwiązań bazowych, zgodnie z zależnością:

$$\frac{n!}{m!(n-m)} \tag{17}$$

Dla zadań dotyczących programowania liniowego prawdziwe jest wówczas stwierdzenie: *jeżeli zadanie ma rozwiązanie optymalne, to posiada również optymalne rozwiązanie bazowe* [1].

Szczególnym przypadkiem liniowych zadań decyzyjnych są tzw. klasyczne zadania transportowe (rys. 1). Cechuje je specyficzny układ macierzy współczynników oraz warunków ograniczających. Zadanie transportowe zwane jest także problemem Hitchcocka.



Rys. 1. Schemat klasycznego zdania transportowego, opracowanie własne na podstawie [5, s. 182]

Z wykorzystaniem algorytmu służącego do rozwiązywania zadań transportowych można rozstrzygać problemy decyzyjne dotyczące przepływu dóbr pomiędzy n – dostawcami posiadającymi a_i jednostek produktu $(i = \ldots n)$ oraz m – odbiorcami wyrażającymi zapotrzebowanie na b_j jednostek produktu $(j = 1 \ldots m)$. Dodatkowo każdy dostawca może zaopatrywać dowolnego odbiorcę, a każdy odbiorca może odebrać towar od dowolnego dostawcy. Muszą być również znane koszty jednostkowe c_{ij} związane z przepływem dóbr od dostawy i do odbiorcy j [5].

Gdy określimy przez x_{ij} (zmienne decyzyjne) wielkość dostawy od i-tego dostawcy do j-tego odbiorcy, zadanie transportowe przyjmie następującą postać:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, dla\ (j = 1, 2, \ldots m) \tag{18}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, dla\ (i = 1, 2, \ldots n) \tag{19}$$

oraz:

$$x_{ij} = 0\ dla\ (i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, m) \tag{20}$$

dla których funkcja celu:

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \ \rightarrow min. \tag{21}$$

osiąga wartość minimalną.

Dodatkowo musi być spełniony warunek równowagi popytu i podaży. Jest to tzw. zamknięte zadanie transportowe (ZZT) [5]:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{22}$$

W praktyce przeważnie pojawia się problem, w którym podaż przewyższa popyt lub zapotrzebowanie jest większe od dostępnej ilości towaru. W przypadku braku bilansu problem jest określany jako otwarte zadanie transportowe (OZT), które należy sprowadzić do postaci zbilansowanej, rozważając dwa przypadki [5]:

1) Obejmujący niewystarczającą ilość zapasów w stosunku do potrzeb wszystkich klientów (podaż mniejsza od popytu), co wyraża następujący wzór:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{23}$$

Do uzyskania postaci zbilansowanej, do zadania wprowadza się fikcyjnego dostawcę mającego dokładnie a_{m+1} produktów:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \tag{24}$$

gdzie:

a_{m+1} – fikcyjny dostawca.

Dodatkowo do macierzy kosztów dodane zostają współczynniki:

$$c_{m+1,1} = 0, \dots, c_{m+1,n} = 0 - (koszty\ fikcyjnego\ transportu) \quad (25)$$

2) W którym zapotrzebowanie na produkty jest mniejsze niż zapasy magazynowe (podaż większa niż popyt), co wyraża zależność:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \quad (26)$$

Do uzyskania postaci zbilansowanej wprowadza się fikcyjnego odbiorcę, który potrzebuje dokładnie b_{n+1} produktów:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_j - \sum_{j=1}^{n} b_i \quad (27)$$

gdzie:

b_{n+1} – fikcyjny dostawca.

Dodatkowo do macierzy kosztów dodane zostają współczynniki:

$$c_{n+1,1} = 0, \dots, c_{n+1,m} = 0 - (koszty\ fikcyjnego\ transportu) \quad (28)$$

W wyznaczaniu wielkości dostaw wyróżnia się dwa etapy [5]:

1) Wyznaczenie wstępnego planu dopuszczalnego transportu, tzw. pierwszego bazowego rozwiązania dopuszczalnego. Do tego celu wykorzystuje się następujące metody:
- kąta północno-zachodniego,
- Vogla (Vogel's Approximation Method, VAM),
- minimalnego elementu macierzy kosztów.

2) Wyznaczenie rozwiązania optymalnego na podstawie pierwszego rozwiązania bazowego. Natomiast do wyznaczenia rozwiązania optymalnego najczęściej stosowana jest metoda MODI (j. ang. *Modified Distribution Method*).

2. Zamknięte zadanie transportowe – przykład liczbowy

W przykładzie rozważono trzech dostawców D_1, D_2, D_3 dostarczających do czterech odbiorców O_1, O_2, O_3, O_4 produkt jednolity gatunkowo przy założeniu zgodności popytu z podażą. Należy zaprojektować taki plan przewozów, aby koszty przewozu były minimalne. W tab. 1 zestawiono dane dotyczące podaży, popytu, jak i kosztów przewozu jednostki produktu między dostawcami a odbiorcami. Jeżeli łączna podaż będzie równa zagregowanemu popytowi, to zadanie będzie zbilansowane, opisane jako:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{29}$$

gdzie:

- a_i – dostawcy pewnego jednolitego produktu,
- m – liczba dostawców,
- b_j – odbiorcy pewnego jednolitego produktu,
- n – liczba odbiorców,
- x_{ij} – zmienne decyzyjne, tj. ilość towaru przewożona od *i*-tego dostawcy do *j*-tego odbiorcy.

Tabela 1

Podaż, popyt oraz jednostkowe koszty przewozu w sieci dostaw

	O_1	O_2	O_3	O_4	Podaż a_j
D_1	$k_{11} = 10$	$k_{12} = 13$	$k_{13} = 5$	$k_{14} = 7$	$a_1 = 170$
D_2	$k_{21} = 8$	$k_{22} = 7$	$k_{23} = 14$	$k_{24} = 9$	$a_2 = 80$
D_3	$k_{31} = 12$	$k_{32} = 9$	$k_{33} = 11$	$k_{34} = 6$	$a_3 = 150$
Popyt b_i	$b_1 = 120$	$b_2 = 90$	$b_3 = 80$	$b_4 = 110$	$\sum = 400$

Dla przedstawionego powyżej problemu należy zapisać warunki ograniczające:

- dla dostawców:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 170 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 80 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 150 \end{aligned} \tag{30}$$

- dla odbiorców:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 120 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 90 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 80 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 110 \end{aligned} \tag{31}$$

Funkcja celu rozumiana jest jako minimalny koszt przewozu i w analizowanym przykładzie przyjmuje następującą postać:

$$Z_0 = 10x_{11} + 13x_{12} + 5x_{13} + 7x_{14} + 8x_{21} + 7x_{22} + 14x_{23} + 9x_{24} + 12x_{31} + 9x_{32} + 11x_{33} + 6x_{34} \rightarrow min \quad (32)$$

W praktyce istnieje szereg metod wspomagających otrzymanie początkowego rozwiązania bazowego. Do najbardziej powszechnych zalicza się wcześniej wspomniane metody:

- kąta północno-zachodniego (metodę N-W),
- minimalnego elementu macierzy kosztów,
- VAM (Vogel's Approximation Method) [2].

Metoda kąta północno-zachodniego jest zaliczana do podstawowych i najłatwiejszych sposobów otrzymywania początkowego rozwiązania bazowego. Podstawowym jej założeniem jest kolejne przyporządkowanie zmiennym prawidłowych wartości, za każdym razem dla tych tras, które widnieją w lewym górnym rogu (północno-zachodnim) tabeli przewozów.

Szukanie rozwiązania bazowego zaczyna się od wartości x_{ij} dla trasy 11. Wartość x_{11} określamy z formuły:

$$x_{11} = \min \{a_1, b_1\} \quad (33)$$

W kolejnym kroku od wartości a_1 i b_1 odejmujemy x_{11}, usuwamy z dalszych rozważań kolumnę bądź wiersz, dla którego ta różnica jest równa zero, a dla wiersza bądź kolumny, gdzie ta różnica jest większa od zera (dodatnia), do kolejnych obliczeń przystępujemy z wartością otrzymanej różnicy i po raz kolejny rozpoczynamy od wierzchołka północno-zachodniego (tab. 2). Gdy z rozwiązań wykluczone zostaną wszystkie kolumny i wiersze, wyznaczanie początkowego rozwiązania bazowego uznaje się definitywnie za zakończone. W efekcie otrzymuje się rozwiązanie bazowe – początkowe (tab. 3) [2].

Tabela 2

Krok 1 – metoda kąta północno-zachodniego

	O_1	O_2	O_3	O_4	Podaż a_j
D_1	120				$a_1 = 50$
D_2	0				$a_2 = 80$
D_3	0				$a_3 = 150$
Popyt b_i	$b_1 = 0$	$b_2 = 90$	$b_3 = 80$	$b_4 = 110$	

Tabela 3

Początkowe rozwiązanie bazowe: metoda kąta północno-zachodniego

	O_1	O_2	O_3	O_4	Podaż a_j
D_1	120	50	0	0	$a_1 = 0$
D_2	0	40	40	0	$a_2 = 0$
D_3	0	0	40	110	$a_3 = 0$
Popyt b_i	$b_1 = 0$	$b_2 = 0$	$b_3 = 0$	$b_4 = 0$	

Wartość funkcji celu dla tego rozwiązania jest zatem obliczana jako:

$$Z_0 = 10 \cdot 120 + 13 \cdot 50 + 7 \cdot 40 + 14 \cdot 40 + 11 \cdot 40 + 6 \cdot 110 = 3790 \text{ zł}$$

Drugi sposób wyznaczania początkowego rozwiązania bazowego stanowi metoda minimalnego elementu macierzy, w której wypełnianie tabeli przewozów rozpoczyna się od tras o najniższych kosztach jednostkowych. W przedstawionym przykładzie minimalne $k_{mn} = 6$ posiada trasa 13, komórka ta daje początek przeprowadzenia obliczeń. Ustala się wielkości przewozu zgodnie z warunkiem $x^1_{1,3} = \min \{a_1, b_3\} = 80$ (tab. 4).

W następnym kroku wypełnia się trasę x^2_{34}, gdyż to właśnie ona posiada najmniejszy jednostkowy koszt. W dalszych krokach postępuje się analogicznie i powtarza algorytm, do chwili wyeliminowania ostatniej kolumny macierzy [2]. W tab. 5 przedstawiono otrzymane rozwiązanie bazowe.

Tabela 4

Krok 1 – metoda minimalnego elementu macierzy

	O_1	O_2	O_3	O_4	Podaż a_j
D_1			80		$a_1 = 90$
D_2			0		$a_2 = 80$
D_3			0		$a_3 = 150$
Popyt b_i	$b_1 = 120$	$b_2 = 90$	$b_3 = 0$	$b_4 = 110$	$\sum = 400$

Tabela 5

Początkowe rozwiązanie bazowe: metoda minimalnego elementu macierzy

	O_1	O_2	O_3	O_4	Podaż a_j
D_1	90	0	80	0	$a_1 = 0$
D_2	0	80	0	0	$a_2 = 0$
D_3	30	10	0	110	$a_3 = 0$
Popyt b_i	$b_1 = 0$	$b_2 = 0$	$b_3 = 0$	$b_4 = 0$	$\sum = 400$

Wartość funkcji celu dla tego rozwiązania wynosi:

$$Z_0 = 10 \cdot 90 + 12 \cdot 30 + 7 \cdot 80 + 9 \cdot 10 + 5 \cdot 80 + 6 \cdot 110 = 2970 \text{ zł}$$

Ostatnią zaprezentowaną metodę stanowi VAM, która uwzględnia kryterium kosztów. W tym przypadku w danej iteracji obliczeniowej szukane są różnice: Δh_i i Δw_i pomiędzy najtańszą (k_{ia}) i drugą co do kosztu (tab. 6) możliwością dostawy (k_{ie}) dla każdego wiersza oraz kolumny [2].

Tabela 6

Różnice kosztowe w metodzie VAM dla pierwszej iteracji

	O_1	O_2	O_3	O_4	Δh_i
D_1	$k_{11} = 10$	$k_{12} = 13$	$k_{13} = 5$	$k_{14} = 7$	2
D_2	$k_{21} = 8$	$k_{22} = 7$	$k_{23} = 14$	$k_{24} = 9$	1
D_3	$k_{31} = 12$	$k_{32} = 9$	$k_{33} = 11$	$k_{34} = 6$	3
Δw_i	2	2	6	1	

Kolejnym krokiem po wyznaczeniu wszystkich różnic kosztowych jest znalezienie wiersza bądź kolumny z różnicą o największej wartości. W wyznaczony wiersz albo kolumnę do komórki o najmniejszym koszcie należy wstawić wartość nasycającą popyt. W tym przypadku będzie to trasa 13. Zgodnie z warunkiem $w^1_{1,3} = \min \{a_1, b_3\} = 80$. Po zredukowaniu a_1 i b_2, które wynoszą odpowiednio $a^1_1 = 170 - 80 = 90$ i $b^1_3 = 80 - 80 = 0$, należy odrzucić kolumnę nr 3 z dalszych rozważań (tak jak w poprzednich metodach, uzupełnić zerami trasy 23 i 33), jak w tab. 7 przedstawionej poniżej [2].

Tabela 7

Macierz transportowa po pierwszej iteracji w metodzie VAM

	O_1	O_2	O_3	O_4	Podaż a_j
D_1			80		$a_1 = 90$
D_2			0		$a_2 = 80$
D_3			0		$a_3 = 150$
Popyt b_i	$b_1 = 120$	$b_2 = 90$	$b_3 = 0$	$b_4 = 110$	$\sum = 400$

W następnej kolejności dla zredukowanej tablicy (brak kolumny nr 3) należy powtórzyć (tab. 8) powyższe kroki.

Tabela 8

Różnice kosztowe w metodzie VAM dla drugiej iteracji

	O_1	O_2	O_3	O_4	Δh_i
D_1	$k_{11} = 10$	$k_{12} = 13$		$k_{14} = 7$	3
D_2	$k_{21} = 8$	$k_{22} = 7$		$k_{24} = 9$	1
D_3	$k_{31} = 12$	$k_{32} = 9$		$k_{34} = 6$	3
Δw_i	2	2		1	

Po raz kolejny należy odnaleźć kolumnę lub wiersz z różnicą o największej wartości, a następnie uzupełnić trasę o najmniejszym koszcie [2]. W sytuacji gdy pojawią się różnice kosztowe o jednakowej wartości, wyboru należy dokonać arbitralnie. Jedną z możliwości jest wybranie kolumny bądź wiersza, w którym znajduje się największy koszt, gdyż przy redukcji tej kolumny lub wiersza on również zostanie zredukowany [2].

W kolejnych etapach należy postępować analogicznie aż do uzyskania początkowego rozwiązania bazowego, które zostało przedstawione w tab. 9.

Tabela 9

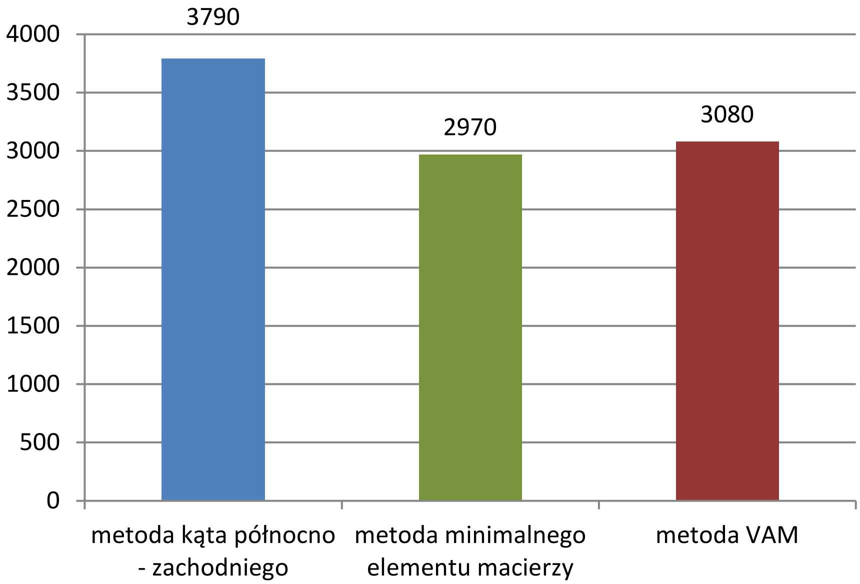
Początkowe rozwiązanie bazowe: metoda VAM

	O_1	O_2	O_3	O_4	Podaż a_j
D_1	0	0	80	90	$a_1 = 0$
D_2	80	0	0	0	$a_2 = 0$
D_3	40	90	0	20	$a_3 = 00$
Popyt b_i	$b_1 = 0$	$b_2 = 0$	$b_3 = 0$	$b_4 = 0$	$\sum = 400$

Wartość funkcji celu dla tego rozwiązania wynosi:

$$Z_0 = 5 \cdot 80 + 7 \cdot 90 + 8 \cdot 80 + 12 \cdot 40 + 9 \cdot 90 + 6 \cdot 20 = 3080 \text{ zł}$$

Rysunek 2 przedstawia graficzny obraz wartości funkcji celu uzyskanych przy zastosowaniu trzech powyżej omówionych metod obliczania początkowego rozwiązania bazowego.



Rys. 2. Wartości funkcji celu uzyskane dla różnych metod wyznaczania początkowego rozwiązania bazowego [zł]

Zaprezentowane zadanie transportowe polegało na wyznaczeniu takiego rozwiązania, przy którym ustalona funkcja – funkcja kryterium – osiągnie wartość minimalną. Był to główny cel zadania, który został osiągnięty. W rozpatrywanym przykładzie najmniejszą wartość funkcji celu uzyskano przy zastosowaniu metody minimalnego elementu macierzy.

3. Podsumowanie

Przedstawiono w praktyce metodykę optymalizacji tras przewozowych opartą na rozwiązaniu autorskiego przykładu liczbowego. Przedstawiony przykład liczbowy, będący jednym z zagadnień problematyki transportu w logistyce dystrybucji, pozwolił na wskazanie metody, która okazała się najlepsza w wyborze optymalnego rozwiązania. Założono bowiem trzech dostawców dostarczających produkt jednorodny gatunkowo do czterech odbiorców. Ustalono ponadto, że popyt jest równy podaży, a zatem omówiony został przykład zamkniętego zadania transportowego. W celu rozwiązania tak sformułowanego problemu otrzymano tzw. początkowe rozwiązanie bazowe dla trzech prezentowanych metod, tj.:

- kąta północno-zachodniego wynoszące 3790 zł;
- minimalnego elementu macierzy wynoszące 2970 zł;
- Vogla wynoszące 3080 zł.

Najmniejszą wartość funkcji celu – wynoszącą 2970 uzyskano dla metody minimalnego elementu macierzy.

4. Literatura

1. Bonkowska K., Ziółkowski J.: Zamknięte zadania transportowe, SLW nr 45.
2. Cyplik P., Głowacka-Fertsch D., Fertsch M.: Logistyka przedsiębiorstw dystrybucyjnych, ILiM, Poznań 2008.
3. Jacyna M.: Wybrane zagadnienia modelowania systemów transportowych, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2009.
4. Kauf S., Tłuczak A.: Optymalizacja decyzji logistycznych, Difin, Warszawa 2016.
5. Michlowicz E.: Zarys logistyki przedsiębiorstwa, Wydawnictwo AGH, Kraków 2012.
6. Mindura L. (red.): Technologie transportowe, Wydawnictwo Naukowe Instytutu Technologii Eksploatacji – PIB, Radom 2014.
7. Niziński S., Żurek J., Ligier K.: Logistyka dla inżynierów, WKiŁ, Warszawa 2011.
8. Tomaszek H., Zieja M., Ważny M.: A method for reliability assessment of structural components of aircraft and sea-going ships with taking into account a given failure generation model. Polish Maritime Research 23(2), 2016.

9. Zieja M., A method of predicting reliability and lifetime of aeronautical hardware with the characteristic function applied. Transport Means – Proceedings of 19th International Scientific Conference on Transport Means, Kaunas, Lithuania 2015.
10. Zieja M., Ważny M., Stępień S.: Outline of a method for estimating the durability of components or device assemblies while maintaining the required reliability level. Eksploatacja i Niezawodność - Maintenance and Reliability 20(2), 2018.
11. Ziółkowski J., Borucka A.: Markov model in logistic management of enterprise. Journal of KONBiN 38(1), 2016, DOI 10.1515/jok-2016-0027.
12. Ziółkowski J., Lęgas A.: Minimisation of empty runs in transport. Journal of KONBiN 48(1), 2018, DOI 10.2478/jok-2018-0067.
13. Żurek J., Kaleta R., Zieja M.: An application of characteristic function in order to predict reliability and lifetime of aeronautical hardware. AIP Conference Proceedings of International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics 2015, ICNAAM 2015, Volume 1738 (2016), Article number 440004.
14. Żurek J., Ziółkowski J.: Method of formulating the required number of vehicles for delivery aircrafts in aviation fuel. Journal of KONBiN 44(1), 2017, DOI 10.1515/jok-2017-0078.
15. Żurek J., Ziółkowski J., Szkutnik-Rogoż J., Stochastic dominance application for optimal transport company selection. AIP Conference Proceedings of 15th Conference on Computational Technologies in Engineering, TKI 2018; Volume 2078 (2019), Article number 020074.