TECHNIKA TRANSPORTU SZYNOWEGO

**Andrzej MACIEJCZYK, Zbigniew ZDZIENNICKI**

# WŁASNOŚCI NIEZAWODNOŚCIOWE UKŁADÓW Z REZERWOWANIEM WEWNĘTRZNYM

***Streszczenie***

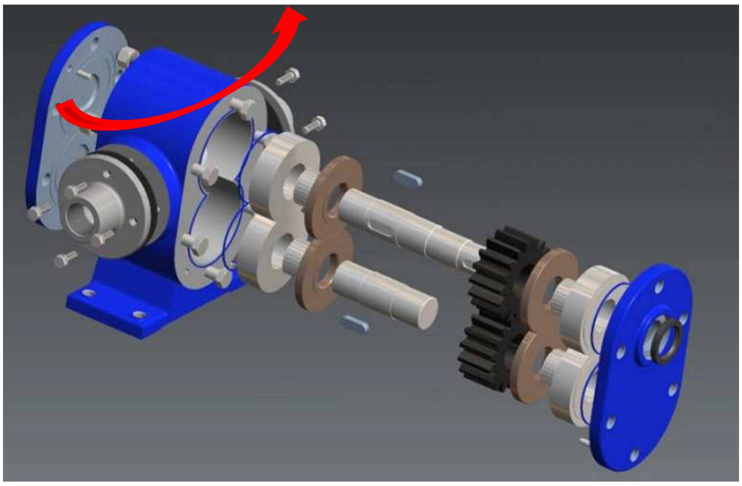
*W artykule przedstawiono i omówiono przykład układu niezawodnościowego z tzw. „rezerwowaniem wewnętrznym”. Do określenia właściwości niezawodnościowych układu posłużono się splotem funkcji dwóch zmiennych losowych, z uwzględnieniem że funkcje prawdopodobieństwa uszkodzeń elementów tego układu opisane są funkcją Gaussa.*

## WSTĘP

Do ogólnie znanych należą układy niezawodnościowe o strukturze równoległej. W tej grupie niezmiernie istotne z punktu widzenia niezawodności obiektu, są układy wyposażone w element rezerwowy. Element rezerwowy pozostaje nieczynny do chwili wystąpienia dysfunkcji elementu podstawowego. Umieszczenie elementu rezerwowego jest celowym działaniem producenta układu. Układy niezawodnościowe tego typu nazywane są układami z „zimną rezerwą”. Z praktyki wiadomo, że istnieją urządzenia, którym w przypadku awarii niektórych elementów możliwe jest przywrócenie pełnej funkcjonalności, mimo że istnienie elementu rezerwowego nie było przewidziane przez producenta i nie jest oczywiste. Takie układy niezawodnościowe nazywane są układami z „rezerwowaniem wewnętrznym”.

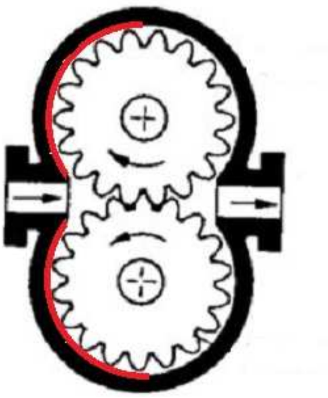
## 1. UKŁAD NIEZAWODNOŚCIOWY Z REZERWĄ WEWNĘTRZNĄ

Przykładem urządzenia będącego układem niezawodnościowym z rezerwą wewnętrzną może być pompa zębata o zewnętrznym zazębieniu (rys. 1).



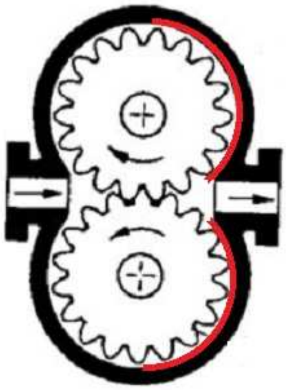
**Rys. 1.** Pompa zębata o zewnętrznym zazębieniu

Podczas pracy pompy zużyciu, poprzez wycieranie się, ulegają między innymi fragmenty powierzchni cylindrycznych korpusu po stronie ssawnej [1] oznaczone na rys. 2.



**Rys. 2.** Schemat działania pompy zębatej (kolorem zaznaczono miejsca zużycia korpusu)

Przyjmuje się, że luz pomiędzy wierzchołkami zębów a powierzchnią cylindra powinien zawierać się między 0,127 – 0,1778 mm. Zwiększenie luzu poza podany zakres będzie skutkowało spadkiem ciśnienia pompowania do 30-40% w stosunku do osiąganego pierwotnie. W przypadku takiej dysfunkcji istnieje prosty sposób na przywrócenie pełnej sprawności pompy. Wystarczy obrót (przełożenie) korpusu zgodnie z rysunkiem 3. Kierunek obrotu oznaczona także strzałką na rysunku 1. Takiego działania nie można uznać za naprawę, gdyż nie dokonano wymiany zużytego elementu. Zauważono i wykorzystano symetrię korpusu. Skorzystano zatem z „ukrytej rezerwy" lub „rezerwy wewnętrznej" eksploatowanego obiektu (pompy).

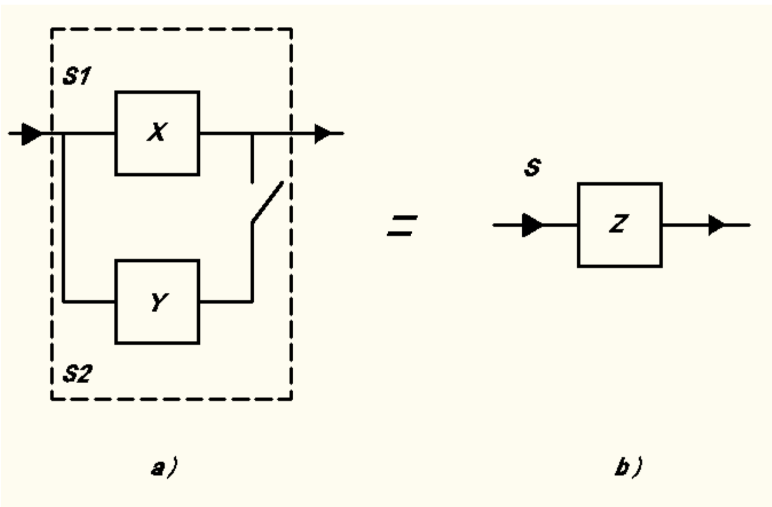


**Rys. 3.** Schemat pompy zębatej po przełożeniu korpusu (kolorem czerwonym oznaczono położenie miejsc zużycia korpusu, strzałka niebieska wskazuje kierunek obrotu korpusu)

## 2. OPIS WŁASNOŚCI NIEZAWODNOŚCIOWYCH UKŁADU Z REZERWĄ WEWNĘTRZNĄ ZA POMOCĄ SPLOTU FUNKCJI DWÓCH ZMIENNYCH LOSOWYCH [2]

Znany z danych literaturowych opis takich struktur ma charakter przybliżony i jest zdecydowanie skomplikowany, [3]. Prostszym i dokładnym sposobem wyznaczania charakterystyk niezawodnościowych struktur z rezerwowaniem, w tym z rezerwowaniem wewnętrznym, jest wykorzystanie splotu funkcji gęstości prawdopodobieństwa uszkodzeń elementów składowych struktury (podstawowego i rezerwowego).

Przedstawiony w przykładzie układ niezawodnościowy to struktura dwuelementowa której schemat przedstawiony jest poniżej (rys. 4).




**Rys.4.** Schemat blokowy dwuelementowego układu niezawodnościowego z rezerwowaniem wewnętrznym (a) i jego schemat zastępczy (b)

Rozważana struktura niezawodnościowa składa się z dwóch, niezależnych niezawodnościowo elementów – S1 i S2. W rozważanym przypadku elementem S1 jest pompa w swojej pierwotnej konfiguracji (rys. 2) a elementem S2 – pompa zębata po zmianie swojej konfiguracji (rys. 3). Zmienne losowe $X$ i $Y$ równe są odpowiednio czasom uszkodzeń (dysfunkcji) tych dwóch elementów. Zmienne losowe $X$ i $Y$ opisane są odpowiednio funkcjami zawodności $F_X(t)$ i $F_Y(t)$ (dystrybuantami zmiennych losowych $X$ i $Y$). Pochodne po czasie tych funkcji są funkcjami prawdopodobieństwa uszkodzeń $f_X(t)$ i $f_Y(t)$ elementów układu (funkcjami gęstości rozkładu zmiennych losowych $X$ i $Y$).

Element podstawowy S1 rozważanej struktury rozpoczyna pracę w chwili t = 0 i pracuje sam aż do chwili swojego uszkodzenia. W chwili uszkodzenia tego elementu, do pracy użyty zostaje znaleziony element rezerwy wewnętrznej S2, który do tej pory nie pracował (był nieczynny). Układ odzyskuje pełną sprawność.

Jeśli przez zmienną losową Z oznaczyć czas uszkodzenia całego układu S (uszkodzone kolejno jego oba elementy S1 i S2), to zmienna ta jest funkcją dwóch zmiennych losowych X i Y o następującej postaci:

$$Z = X + Y \tag{1}$$

Funkcja prawdopodobieństwa uszkodzeń całego układu S (funkcja gęstości rozkładu zmiennej losowej Z) jest przedstawiona wyrażeniem, [4]

$$\begin{aligned} f_Z(t) &= \int_0^t f_X(t-\tau) f_Y(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t f_X(\tau)\, f_Y(t-\tau) d\tau \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie:
$f_X(t)$ – funkcja prawdopodobieństwa uszkodzeń elementu S1 (funkcja gęstości rozkładu zmiennej losowej $X$),
$f_Y(t)$ – funkcja prawdopodobieństwa uszkodzeń elementu S2 (funkcja gęstości rozkładu zmiennej losowej $Y$),
$\tau$ – zmienna całkowania.

Prawe strony zależności (2) są splotem funkcji $f_X(t)$ i $f_Y(t)$, [5]. W konsekwencji możliwe jest zapisanie zależności (2) w postaci symbolicznej:

$$\begin{aligned} f_Z(t) &= f_X(t) * f_Y(t) \\ &= f_Y(t) * f_X(t) \end{aligned} \tag{3}$$

Z powyższych rozważań wynika, że funkcja prawdopodobieństwa uszkodzeń układu z elementem rezerwowym, który zostaje użyty do pracy dopiero po uszkodzeniu elementu podstawowego układu, równa się splotowi funkcji prawdopodobieństw uszkodzeń elementów: podstawowego i rezerwowego układu.

Dysponując dla omawianego układu niezawodnościowego jedną z jego charakterystyk funkcyjnych – funkcją prawdopodobieństwa jego uszkodzeń – możliwe jest wyznaczenie pozostałych czterech charakterystyk funkcyjnych układu.

Dla rozważanego układu funkcja niezawodności ma postać:

$$R_Z(t) = 1 - \int_0^t f_Z(\tau) d\tau \tag{4}$$

## 3. ZASTOSOWANIE SPLOTU FUNKCJI DO OKREŚLANIA WŁASNOŚCI NIEZAWODNOŚCIOWYCH UKŁADÓW MECHANICZNYCH OPISANYCH ZA POMOCĄ ROZKŁADU GAUSSOWSKIEGO ZMIENNEJ LOSOWEJ ICH USZKODZEŃ

Przyjęto, że rozważany układ niezawodnościowy posiada element podstawowy opisany funkcją prawdopodobieństwa uszkodzeń o postaci:

$$f_X(t) = \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(t-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right] \tag{5}$$

a element rezerwowy opisany jest funkcją prawdopodobieństwa uszkodzeń zapisaną równaniem:

$$f_Y(t) = \frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(t-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right] \tag{6}$$

gdzie:
$\mu_X$, $\sigma_X$ – parametry funkcji $f_X(t)$; odpowiednio wartość średnia i odchylenie standardowe,
$\mu_Y$, $\sigma_Y$ – parametry funkcji $f_Y(t)$; odpowiednio wartość średnia i odchylenie standardowe.

Funkcja prawdopodobieństwa uszkodzeń układu jest splotem funkcji (5) i (6). Splot dwóch funkcji Gaussa jest także funkcją Gaussa, [6]

$$f_Z(t) = \left\{\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(t-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right]\right\} * \left\{\frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(t-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_Z\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(t-\mu_Z)^2}{2\sigma_Z^2}\right] \tag{7}$$

gdzie:

wartość średnia $\mu_Z = \mu_X + \mu_Y$ (8)

odchylenie standardowe $\sigma_Z = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$ (9)

W celu wyznaczenia funkcji niezawodności rozważanego układu w oparciu o charakterystykę funkcyjną (7), należy funkcję Gaussa scałkować w granicach od *0* do *t*. Funkcję pierwotną całki z wyrażenia (7) wyrażono za pomocą funkcji błędu erf($t$) w następujący sposób, [1]

$$\int \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \mathrm{d}\, t = \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{t-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right) + C \tag{10}$$

W konsekwencji zależność (4) w tym przypadku przybierze postać:

$$R_Z(t) = 1 - \int_0^t \frac{1}{\sigma_Z\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\tau-\mu_Z)^2}{2\sigma_Z^2}\right] d\tau = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{t-\mu_Z}{\sigma_Z\sqrt{2}}\right) \tag{11}$$

gdzie wielkości $\mu_Z$ i $\sigma_Z$ są określone przez związki (8) i (9).

## PODSUMOWANIE

Przedstawiono przykład układu niezawodnościowego z rezerwą wewnętrzną. Własności niezawodnościowe zaprezentowanego układu zostały w pełni, dokładnie opisane funkcją niezawodności (równanie 4). Wykazano również możliwość opisania własności niezawodnościowych układu z rezerwowaniem wewnętrznym za pomocą rozkładu gaussowskiego zmiennej losowej ich uszkodzeń (równanie 11).

# THE RELIABILITY PROPERTY OF SYSTEMS WITH INTERNAL STANDBY REDUNDANCY


***Abstract***

*The paper presents and discusses the reliability of the system such as the so-called. "internal standby redundancy". To determine the reliability characteristics of the system was used a convolution of two functions, including functions of the damage probability of this system elements which are described with Gaussian function.*


## BIBLIOGRAFIA


1. Nelik L., *Rotary gear pumps. Theory, applications and hands-on.* Westpower Canada Power Conference, Calgary, Alberta, November 8, 2007.
2. Zdziennicki Z., Maciejczyk A., *Zastosowanie splotu funkcji do opisu własności niezawodnościowych układów z rezerwowaniem.* Problemy eksploatacji, 1/2011, s.205.
3. Smith David J.: *Reliability, Maintainability and Risk. Practical method for engineers.* Butterworth-Heinemann, 2000.
4. Papoulis A., Pillai S. U.: *Probability, Random Variables and Stochastic Processes.* McGraw-Hill, 2002.
5. Bracewell R.: The Fourier Transform and Its Applications. McGraw-Hill, 1986,
6. Strona internetowa http://mathworld.wolfram.com/Convolution.html



***Autorzy:***

**dr inż. Andrzej MACIEJCZYK–** Politechnika Łódzka; Katedra Pojazdów i Podstaw Budowy Maszyn

**dr inż. Zbigniew ZDZIENNICKI–** Politechnika Łódzka; Katedra Pojazdów i Podstaw Budowy Maszyn