ZESZYTY PROBLEMOWE POSTĘPÓW NAUK ROLNICZYCH 1974 Z. 147

MODEL MATEMATYCZNY BĘBNOWEGO WSPÓŁPRĄDOWEGO WYMIENNIKA CIEPŁA PRZY STAŁYCH WARTOŚCIACH WSPÓŁCZYNNIKÓW WYMIANY CIEPŁA

S. PABIS, S. P. GADAJ, R. SUPRUNOWICZ — Polska

Proces nagrzewania ziarnistego materiału w bębnie suszarki można traktować jako wymianę ciepła we współprądowym wymienniku ciepła. Ze względu na dość intensywne mieszanie można przyjąć, że materiał jest ciałem jednorodnym o własnościach płynu. Powierzchnia wymiany ciepła między cząstkami materiału a czynnikiem jest trudna do wyznaczenia. W związku z tym wygodnie jest odnosić współczynnik wymiany ciepła do jednostki objętości bębna.

Zmianę temperatury czynnika i nagrzewanego materiału na elementarnym odcinku dx współprądowego wymiennika ciepła opisują następujące równania:

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{dx} = -\dfrac{\pi d_b^2}{4W}(a\alpha)_b(t-t_m), & (1) \\[2ex] \dfrac{dt_m}{dx} = \dfrac{\pi d_b^2}{4W_m}(a\alpha)_b(t-t_m), & (2) \end{cases}$$

gdzie:

$t = t(x)$ — średnia w danym przekroju temperatura czynnika,
$t_m = t_m(x)$ — średnia w danym przekroju temperatura materiału,
d_b — wewnętrzna średnica bębna,
$W = Mc_p$ — równoważnik wodny czynnika,
$W_m = M_m c_{pm}$ — równoważnik wodny materiału,
M — natężenie przepływu (wydatek masowy) czynnika,
M_m — przepustowość bębna (masa materiału przechodzącego przez bęben w jednostce czasu),
c_p, c_{pm} — ciepło właściwe czynnika i materiału,
$(a\alpha)_b$ — objętościowy współczynnik przejmowania ciepła odniesiony do jednostki objętości bębna, określający, jaką ilość ciepła przejmuje od czynnika materiał znajdujący się w jednostce objętości bębna w jednostce czasu przy różnicy temperatur 1°C; przyjęto, że współczynnik ten jest stały w całej objętości bębna, a jego wartość jest identyczna z wartością średniego objętościowego współczynnika przejmowania ciepła w bębnie.

Występujące w równaniach wartości temperatur przyjęto jako wartości średnie dla przekroju poprzecznego bębna. Intensywne mieszanie materiału i czynnika sprawia, że założenie to dość dobrze odpowiada rzeczywistym warunkom procesu. Wszystkie parametry termodynamiczne opisujące własności czynnika i materiału potraktowano jako stałe, średnie dla całej objętości bębna.

Przy rozpatrywaniu rzeczywistego procesu nagrzewania materiału w bębnie należy uwzględnić zjawisko odprowadzania ciepła do otoczenia poprzez płaszcz bębna. Ciepło to jest odprowadzane zarówno od czynnika, jak i od nagrzewanego materiału. Po uwzględnieniu tych strat ciepła równania opisujące zmiany temperatury będą miały postać

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{dx} = -\dfrac{\pi d_b^2}{4W}(a\alpha)_b(t-t_m) - \dfrac{\pi d_b}{W}k(t-t_0), & (3) \\[2ex] \dfrac{dt_m}{dx} = \dfrac{\pi d_b^2}{4W_m}(a\alpha)_b(t-t_m) - \dfrac{\pi d_b}{W_m}k_m(t_m-t_0), & (4) \end{cases}$$

gdzie:

k — współczynnik przenikania ciepła między czynnikiem a otoczeniem określający, jaką ilość ciepła w jednostce czasu przekazuje do otoczenia czynnik przez jednostkę powierzchni bębna przy różnicy temperatur 1°C,

k_m — współczynnik przenikania ciepła między materiałem a otoczeniem, jw.,

t_0 — temperatura otoczenia.

Pozostałe oznaczenia — jak w równaniach (1) i (2).

Współczynniki k i k_m podobnie jak $(a\alpha)_b$ przyjęto jako średnie w całej objętości bębna. Uproszczenia takie nie prowadzą do dużych błędów w przypadku, gdy różnica temperatur czynnika na wlocie do bębna i wylocie z bębna jest niewielka (rzędu kilkudziesięciu stopni).

Warunki brzegowe równań (3) i (4) określone są przez charakter procesów przebiegających w bębnie suszarki

$$x = x_{\mathrm{I}} = 0, \quad t = t_{\mathrm{I}}, \quad t_m = t_{m\mathrm{I}} = t_0, \tag{5}$$

$$x = \infty, \quad t_m = t = t_0. \tag{6}$$

W rzeczywistym bębnie, który ma skończoną długość, warunek (6) można zastąpić warunkami

$$x = x_{\mathrm{II}}, \ t = t_{\mathrm{II}}, \ t_m = t_{m\mathrm{II}}. \tag{7}$$

Zastosowano tu oznaczenia:

x_{I} — współrzędna początku bębna,

x_{II} — współrzędna końcowa bębna,

$t_{\mathrm{I}}, t_{\mathrm{II}}$ — temperatury czynnika na wlocie i wylocie z bębna,

$t_{m\mathrm{I}}, t_{m\mathrm{II}}$ — temperatury materiału na wlocie i wylocie z bębna,

t_0 — temperatura otoczenia.

Przyjęto, że temperatura materiału przed wlotem do bębna jest równa temperaturze otoczenia.

W celu uproszczenia zapisu równań zostały wprowadzone oznaczenia

$$\frac{\pi d_b^2}{4W}(a\alpha)_b = A, \tag{8}$$

$$\frac{\pi d_b^2}{4W_m}(a\alpha)_b = C, \tag{9}$$

$$\frac{\pi d_b}{W}k = B, \tag{10}$$

$$\frac{\pi d_b}{W_m}k_m = D. \tag{11}$$

Po ich podstawieniu otrzymano

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{dx} = -A(t-t_m)-B(t-t_0), & (12) \\[2ex] \dfrac{dt_m}{dx} = C(t-t_m)-D(t_m-t_0). & (13) \end{cases}$$

Jest to układ równań różniczkowych pierwszego rzędu, liniowych, niejednorodnych.

Z równania (13) wyznaczono t, a po zróżniczkowaniu $\frac{dt}{dx}$. Wstawiając te wielkości do równania (12) otrzymano jedno równanie różniczkowe drugiego rzędu

$$\frac{d^2t_m}{dx^2}+(A+B+C+D)\frac{dt_m}{dx}+(BC+AD+BD)t_m+(BC+AD+BD)t_0 = 0. \tag{14}$$

Rozwiązanie ogólne tego równania jest funkcją wykładniczą typu e^{rx}. Równanie charakterystyczne będzie następujące

$$r^2+(A+B+C+D)r+BC+AD+BD = 0.$$

Wyróżnik tego równania

$$\Delta = (A+B-C-D)^2+4AC$$

jest zawsze większy od zera. Równanie charakterystyczne ma więc dwa pierwiastki rzeczywiste

$$r_1 = \frac{1}{2}\left[-(A+B+C+D)-\sqrt{(A+B-C-D)^2+4AC}\right], \tag{15}$$

$$r_2 = \frac{1}{2}\left[-(A+B+C+D)+\sqrt{(A+B-C-D)^2+4AC}\right]. \tag{16}$$

Wartości tych pierwiastków są zawsze mniejsze od zera, niezależnie od wartości stałych A, B, C, D. Rozwiązanie ogólne równania (14) ma zatem postać

$$t_m = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + t_0,$$

gdzie C_1 i C_2 — stałe całkowania.

Po wstawieniu tego wzoru do równania (13) i wykonaniu przekształceń otrzymano rozwiązanie ogólne układu równań (13), (14) w postaci

$$t = \frac{C+D+r_1}{C} C_1 e^{r_1 x} + \frac{C+D+r_2}{C} C_2 e^{r_2 x} + t_0, \tag{17}$$

$$t_m = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + t_0. \tag{18}$$

Wprowadzono oznaczenia

$$\frac{C+D+r_1}{C} = R_1,$$

$$\frac{C+D+r_2}{C} = R_2.$$

Rozwiązanie szczególne układu równań (12), (13) otrzymuje się biorąc dowolną kombinację dwu spośród podanych warunków brzegowych.

Dla warunków brzegowych

$$x = 0, \qquad t_m = t_0$$

$$x = x_{II}, \qquad t_m = t_{mII}$$

otrzymano

$$C_2 = -C_1, \tag{19}$$

$$C_1 = \frac{t_{mII} - t_0}{e^{r_1 x_{II}} - e^{r_2 x_{II}}}, \tag{20}$$

stąd rozwiązanie szczególne

$$t = \frac{t_{mII} - t_0}{e^{r_1 x_{II}} - e^{r_2 x_{II}}} R_1 e^{r_1 x} - \frac{t_{mII} - t_0}{e^{r_1 x_{II}} - e^{r_2 x_{II}}} R_2 e^{r_2 x} + t_0, \tag{21}$$

$$t_m = \frac{t_{mII} - t_0}{e^{r_1 x_{II}} - e^{r_2 x_{II}}} e^{r_1 x} - \frac{t_{mII} - t_0}{e^{r_1 x_{II}} - e^{r_2 x_{II}}} e^{r_2 x} + t_0. \tag{22}$$

Dla innej pary warunków brzegowych

$$x = 0, \qquad t_m = t_0,$$

$$x = x_{II}, \qquad t = t_{II}$$

stałe całkowania wynoszą

$$C_2 = -C_1, \tag{23}$$

$$C_1 = \frac{t_{II} - t_0}{R_1 e^{r_1 x_{II}} - R_2 e^{r_2 x_{II}}}, \tag{24}$$

a rozwiązanie układu równań ma postać

$$t = \frac{(t_{II}-t_0)R_1}{R_1 e^{r_1 x_{II}} - R_2 e^{r_2 x_{II}}} e^{r_1 x} - \frac{(t_{II}-t_0)R_2}{R_1 e^{r_1 x_{II}} - R_2 e^{r_2 x_{II}}} e^{r_2 x} + t_0, \tag{25}$$

$$t_m = \frac{t_{II}-t_0}{R_1 e^{r_1 x_{II}} - R_2 e^{r_2 x_{II}}} e^{r_1 x} - \frac{t_{II}-t_0}{R_1 e^{r_1 x_{II}} - R_2 e^{r_2 x_{II}}} e^{r_2 x} + t_0. \tag{26}$$

Podane wyżej przypadki zostały wybrane ze względu na to, że pomiary temperatur t_0, t_{mII} i t_{II} nastręczają najmniej trudności.

Dla $x = x_{II}$ wartości C_1 określone wzorami (20) i (24) są równe. Stąd dzieląc stronami otrzymuje się

$$\frac{t_{mII}-t_0}{t_{II}-t_0} = \frac{e^{r_1 x_{II}} - e^{r_2 x_{II}}}{R_1 e^{r_1 x_{II}} - R_2 e^{r_2 x_{II}}}. \tag{27}$$

Rozwikłanie tego wzoru względem $(a\alpha)_b$ jest niemożliwe. Można jednak sporządzić wykres funkcji

$$F(a\alpha)_b = \frac{e^{r_1 x_{II}} - e^{r_2 x_{II}}}{R_1 e^{r_1 x_{II}} - R_2 e^{r_2 x_{II}}}$$

i dla danych wartości temperatur t_0, t_{II} i t_{mII} odczytywać wartości $(a\alpha)_b$.

W przypadku gdy powierzchnia boczna bębna jest dobrze izolowana i wymiany ciepła z otoczeniem można nie uwzględniać, rozwiązanie ogólne układu równań (12), (13) ma postać

$$t = \frac{A}{C} C_1 e^{-(A+C)x} + C_2, \tag{28}$$

$$t_m = C_1 e^{-(A+C)x} + C_2. \tag{29}$$

Stałe C_1 i C_2 przy warunkach brzegowych

$$x = 0, \qquad t_m = t_0,$$

$$x = x_{II}, \qquad t_m = t_{mII}$$

mają postać

$$C_1 = \frac{t_{mII}-t_0}{e^{-(A+C)x_{II}}-1},$$

$$C_2 = \frac{e^{-(A+C)x_{II}}-t_{mII}}{e^{-(A+C)x_{II}}-1}.$$

W wyniku doświadczeń można uzyskać przebiegi temperatur czynnika i materiału wzdłuż długości bębna. Konfrontacja wyników doświadczeń z rozwiązaniami teoretycznymi pozwala wyznaczyć objętościowy współczynnik przejmowania ciepła dla danych warunków pracy suszarki. Może to być podstawą do porównywania konstrukcji bębnów i wpływu parametrów procesu na wymianę ciepła.

LITERATURA

1. Ciborowski J.: Inżynieria chemiczna, cz. I. PWT, Warszawa 1953.
2. Kröll K.: Die Vorgänge in Trocknungs und Erwärmungstrommeln für rieselfähige Güter. Spinger Verlag. Berlin 1950.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ БАРАБАННОГО ПРЯМОТОЧНОГО ТЕПЛООБМЕННИКА ПРИ ПОСТОЯННЫХ ВЕЛИЧИНАХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕПЛООБМЕНА

С. ПАБИС, С. П. ГАДАЙ, Р. СУПРУНОВИЧ — Польша

Резюме

Процесс теплообмена в барабанной сушке можно представить при помощи системы уравнений, описывающих изменения температур агента (нагретого воздуха), а также нагреваемого материала в прямоточном теплообменнике. Обмен тепла между агентом и материалом определяет объёмный коэффициент теплообмена, величина которого является показателем интенсивности процесса нагревания. В этих уравнениях выступают также коэффициенты теплопереноса между агентом и средой, а также материалом и средой, определяющие потери тепла. Они определяются на основании эксперимента. Граничными условиями для этой системы уравнений являются величины температур агента и материала в определенных точках барабана.

Все термодинамические параметры агента и материала, коэффициенты потерь, а также объёмный коэффициент теплообмена считаются постоянными величинами, средними по всему объёму барабана. Величины температур приняты как средние в данном разрезе (поперечном) барабана.

Представленный здесь анализ касается чистого теплообмена.

В результате была получена система двух дифференциальных уравнений первого порядка линейных неоднородных. Эти уравнения решены для нескольких комбинаций граничных условий. В результате получены распределения температур агента и материала вдоль длины барабана.

Конфронтация теоретических решений с результатами опытов дала возможность определить обьёмный коэффициент теплообмена для данных условий работы сушилки. Это может быть основой для сравнения конструкции барабанов и влияния параметров процесса на теплообмен.

MATHEMATICAL MODEL OF CONCURRENT FLOW DRUM HEAT EXCHANGER AT CONSTANT VALUES OF HEAT TRANSFER COEFFICIENTE

S. PABIS, S. P. GADAJ, R. SUPRUNOWICZ — Poland

Summary

The process of heat exchange in the drum drier can be presented by the equation system describing the temperature changes of agent (heated air) and the material being heated in co-flow heat exchanger. The heat transfer between the agent and material is determined by a volume coefficient of heat transfer; the value of this coefficient indicates the intensity of heating process. The coefficients of heat transfer between the agent and environment, as well as between the material and environment, determining the losses of heat, are also involved in mentioned equations. They can be found experimentally. The temperature values of agent and material in particular points of the drum are the boundary conditions for this system of equations.

All the thermodynamic parameters of the agent and material, the heat losses coefficients and the volume coefficient of heat transfer, have been treated as the constant mean values, of the whole drum capacity. The temperature values were assumed as values on the whole cross-section of drum.

The deliberations discussed here concern the heat transfer under the conditions where the mass transfer does not arise.

In consequence of the application of mentioned assumptions the system of two differential linear, non-homogeneous equations of the first order, was obtained. The solution of equations has been found for the few combinations of boundary conditions.

In result, the temperature distribution of the agent and material along the lenght of drum was obtained.

Confrontation of the theoretical solutions with the results of experiments allowed to find the volume coefficient of heat transfer under given conditions of the drier performance. This may be a basis to compare the construction of drums and effects of the process parameters on the heat exchange.

DAS MATHEMATISCHE MODELL DES TROMELLIGEN GLEICHSTROMWÄRMETAUSCHERS BEI DEN STÄNDIGEN WERTEN DER KOEFFIZIENTE DES AUSTAUSCHES DER WÄRME

S. PABIS, S. P. GADAJ, R. SUPRUNOWICZ — Polen

Zusammenfassung

Das Verfahren des Austausches der Wärme in dem Trommeltrockner kann man mit der Anordnung der Gleichungen vorstellen die Veränderungen der Temperaturen des Trocknungsmittels (angewärmte Luft) und des angewärmten Materials in dem Gleichstromwärmetauscher beschreiben.

Den Wärmeaustausch zwischen dem Trocknungsmittel und dem Material bezeichnet der Raumkoeffizient der Wärmeübernahme. Seiner Wert zeigt die Intensivität des Anwärmeverfahrens. In diesen Gleichungen erscheinen auch die Koeffiziente der Durchdringung der Wärme zwischen dem Trocknungsmittel und der Umgebung wie auch zwischen dem Material und der Umgebung, welche die Wärmeverluste bestimmen. Man kann sie experimental bezeichnen. Die Grenzbedingungen für diese Anordnung der Gleichungen bilden die Werte der Temperaturen des Trocknungsmittels und des Materials in den bestimmten Punkten des Trommels.

Alle thermodynamischen Parametern des Trocknungsmittels und des Materials, die Verlustkoeffiziente und der Raumkoeffizient der Wärmeübernahme hat man als ständige Werte und zwar Mittelwerte für den ganzen Trommelraum betrachtet. Die Temperaturwerte hat man als Mittelwerte in dem angegebenen Querschnitt des Trommels angenommen.

Hier beschriebene Betrachtungen treffen dem Wärmeaustausch in den Bedingungen zu, wo der Massenaustausch nicht ausgetreten war.

Im Ergebnis der Anwendung dieser Voraussetzungen hat man die Anordnung der zwei Differentialgleichungen der ersten. Stufe, linear, ungleichartig bekommen. Man hat diese Gleichungen für einige Kombinationen den Grenzbedingungen gelöst. Im Ergebnis hat man den Temperaturverlauf des Trocknungsmittels und des Materials längs dem Trommel bekommen.

Die Konfrontation der theoretischen Lösungen mit dem Experiment ermöglichte die Bestimmung des Raumkoeffizienten der Wärmeübernahme für die angegebenen Bedingungen der Arbeit des Trockners bestimmen. Das kann die Grundlage zur Vergleichung der Trommelkonstruktion und des Einflusses der Verfahrensparametern auf den Wärmeaustausch sein.