

IDENTYFIKACJA MATEMATYCZNYCH MODELI LEPKOSPĘŻYSTYCH MATERIAŁÓW BIOLOGICZNYCH METODĄ PRONY'EGO

Anna Stankiewicz

Akademia Rolnicza w Lublinie

Streszczenie. W pracy przedstawiono bazujący na metodzie Prony'ego algorytm identyfikacji modułu relaksacji liniowych materiałów lepkospężystych opisanych modelem Maxwella. Udowodniono, że jeśli rzeczywisty moduł relaksacji dany jest czteroelementowym modelem Maxwella, a jego pomiary nie są obciążone zakłóceniami, to algorytm ten zapewnia identyfikowalność rzeczywistych parametrów modułu relaksacji. Pokazano, że wszystkie zadania obliczeniowe algorytmu są dobrze postawione w sensie Hadamarda i podano konieczne i dostateczne warunki stosowalności algorytmu do zadania identyfikacji czteroelementowych modeli Maxwella. Efektywność algorytmu zilustrowano wyznaczając funkcję relaksacji naprężeń próbki korzenia buraka cukrowego w warunkach stanu jednoosiowego odkształcenia oraz dla danych Lanczosa.

Słowa kluczowe: lepkospężystość, funkcja relaksacji naprężeń, model Maxwella, metoda Prony'ego, algorytm identyfikacji

WPROWADZENIE

W zakresie niewielkich deformacji związek pomiędzy odkształceniem $\varepsilon(t)$ a naprężeniem $\sigma(t)$ w izotropowych materiałach lepkospężystych opisuje całkowe równanie konstytutywne [Flügge 1967, Derski i Ziemia 1968]

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t - \lambda) \dot{\varepsilon}(\lambda) d\lambda \quad (1)$$

gdzie $G(t)$ jest liniowym modułem relaksacji (jednoosiową funkcją relaksacji). Równanie (1) wynika z zasady superpozycji Boltzmanna i jest właściwe dowolnym liniowym systemom stacjonarnym. Bazując na modelach mechanicznych złożonych z liniowych

Adres do korespondencji – Corresponding Author: Anna Stankiewicz, Katedra Podstaw Techniki, Akademia Rolnicza w Lublinie, ul. Doświadczalna 50A, 20-280 Lublin, e-mail: anna.stankiewicz@ar.lublin.pl

elementów sprężystych i lepkich związek pomiędzy odkształceniem a naprężeniem w materiale lepkosprężystym można także opisać za pomocą liniowego równania różniczkowego postaci:

$$b_n \frac{d^n \sigma(t)}{dt^n} + \dots + b_1 \frac{d\sigma(t)}{dt} + b_0 \sigma(t) = d_m \frac{d^m \varepsilon(t)}{dt^m} + \dots + d_1 \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + d_0 \varepsilon(t) \quad (2)$$

w którym interpretacja fizyczna stałych b_i i d_j zależy od struktury modelu [Flügge 1967].

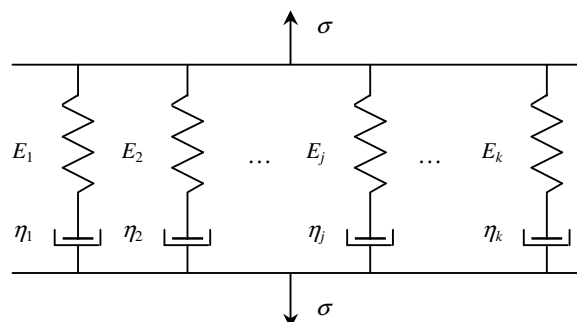
Powszechnie przyjętym sposobem opisu zjawiska relaksacji naprężeń zachodzącego w materiale liniowo lepkosprężystym jest uogólniony model Maxwella o strukturze przedstawionej na rysunku 1. Jednoosiowa funkcja relaksacji naprężeń $G(t)$ przyjmuje dla modelu Maxwella postać [Derski i Ziemia 1968]

$$G(t) = \sum_{j=1}^k E_j e^{-t/\tau_j} \quad (3)$$

gdzie E_j oznaczają moduły sprężystości, $\tau_j = \eta_j/E_j$ to czasy relaksacji, natomiast η_j są współczynnikami lepkości dynamicznej, k oznacza liczbę gałęzi w modelu (rys. 1). Moduły sprężystości E_j oraz czasy relaksacji τ_j wyznacza się zazwyczaj na podstawie dyskretnych pomiarów funkcji relaksacji $G(t)$ zgromadzonych w standardowym teście relaksacji naprężeń [Gołacki 1998, Rao 1999]. Problem identyfikacji modelu Maxwella (3) jest więc zadaniem aproksymacji danych pomiarowych sumą dodatnich funkcji wykładniczych. Jak wiadomo, problem aproksymacji danych sumą funkcji wykładniczych (3) jest zadaniem skomplikowanym, stosunkowo trudnym w implementacji, a przede wszystkim źle postawionym [Kammler 1981, Varah 1985]. Standardowe metody identyfikacji, takie jak nieliniowa metoda najmniejszej sumy kwadratów, nie są więc skutecznym narzędziem wyznaczenia parametrów modelu Maxwella (3). W ciągu ostatnich kilkudziesięciu lat opracowano kilka specjalnych metod aproksymacji danych pomiarowych sumą funkcji wykładniczych [Kammler 1979, Evans i in. 1980, Ruhe 1980]. Osborne [1975] a następnie Osborne i Smyth [1995], Pisarenko [Ouibrahim 1989] oraz Petersson i Holmström [1998] zastosowali do rozwiązania tego zadania ideę starej osiemnastowiecznej metody Prony'ego [1795].

W tej pracy zastosowano modyfikację metody Prony'ego przypisywaną Hildebrandowi [1956], która w przypadku czteroparametrowych modeli Maxwella prowadzi do bardzo prostego w implementacji schematu identyfikacji. Funkcje relaksacji naprężeń materiałów liniowo lepkosprężystych dane są wykładniczym szeregiem Prony'ego, zastosowanie metody Prony'ego do identyfikacji parametrów tego modelu, jest więc zarówno naturalne, jak i bardzo dogodne, co wykazano w tej pracy.

Metoda Prony'ego i jej modyfikacje są od lat stosowane do identyfikacji i modelowania systemów i sygnałów w automatyce [Trudnowski i in. 1998, Hasanovic i in. 2004], do modelowania i identyfikacji systemów napędowych [Lu i in. 2001, Tawfik i Morcos 2001, Hasanovic i in. 2004], a także w systemach radarowych [Younan 2000].

Rys. 1. Model Maxwella (σ – naprężenie)Fig. 1. Maxwell model (σ – stress)

Już od kilkudziesięciu lat znajduje ona również zastosowanie do modelowania i przetwarzania sygnałów [Ribeiro i in. 2003], w tym sygnałów radiowych [Street i in. 2000], a nawet w technikach detekcji min [Brooks i Maier 1996] i lokalizacji uszkodzeń i awarii [Tawfik i Morcos 2001]. Metoda Prony'ego jest także stosowana w algorytmach modelowania oraz przetwarzania sygnałów w biologii [Fargues i in. 1993] i w medycynie [Szi-Wen 2000]. Uniwersalność metody Prony'ego potwierdzają również jej zastosowania w algorytmach z zakresu sztucznej inteligencji: w technikach sieci neuronowych [Farrokhi i Isik 1994] oraz sterowaniu opartym na zbiorach rozmytych [Lu i in. 2001].

MATERIAŁ I METODY

Problem identyfikacji funkcji relaksacji materiałów biologicznych

Funkcję relaksacji $G(t)$ materiałów roślinnych można przybliżyć [Chen i Chen 1986, Bzowska-Bakalarz 1994, Gołacki 1998, Rao 1999] stosując czteroelementowy model Maxwella, w którym funkcja relaksacji dana jest sumą dwu dodatnich funkcji wykładniczych:

$$G(t) = E_1 e^{-a_1 t} + E_2 e^{-a_2 t} \quad (4)$$

gdzie $a_j = 1/\tau_j$, $j = 1, 2$.

Funkcję relaksacji $G(t)$ można wyznaczyć eksperymentalnie rejestrując siłę reakcji próbki badanego materiału w standardowym teście relaksacji naprężeń, podczas którego próbka najpierw ściskana jest gwałtownie wzdłuż osi aż do uzyskania założonego odkształcenia, a następnie rejestruje się przebieg siły reakcji próbki w czasie utrzymując stałe odkształcenie [Gołacki 1998, Rao 1999].

Będziemy zakładać, że przeprowadzono eksperyment dyskretny (test relaksacji naprężeń), którego rezultatem jest zbiór pomiarów funkcji relaksacji $G(t_i)$ dla $t_i \geq 0$, $i = 0, 1, \dots, N - 1$.

Problem identyfikacji modelu Maxwella polega na wyznaczeniu takich parametrów E_1 i E_2 oraz a_1 i a_2 , dla których model (4) najlepiej przybliży dane eksperymentalne $\{G(t_i)\}$. W klasycznie sformułowanym zadaniu wyboru optymalnego modelu postaci (4) współczynniki sprężystości E_1 i E_2 oraz wykładniki a_1 i a_2 dobiera się tak, aby model (4) przybliżał wyniki eksperymentu jak najlepiej w sensie najmniejszej sumy kwadratów

$$\min_{(E_1, E_2, a_1, a_2)} \sum_{i=0}^{N-1} [G(t_i) - (E_1 e^{-a_1 t} + E_2 e^{-a_2 t})]^2 \quad (5)$$

Jak wiadomo, nieliniowy problem średniokwadratowej aproksymacji danych sumą funkcji wykładniczych (5) jest nawet w rozpatrywanym w tej pracy przypadku sumy dwu funkcji wykładniczych trudny numerycznie [Kammler 1979, Varah 1985]. Także istnienie jego rozwiązania można wykazać tylko wówczas, gdy nałoży się dodatkowe ograniczenia na klasę modeli (3) lub zbiór danych doświadczalnych. Kammler [1979] wykazał, że jeżeli ciąg danych pomiarowych (tu: $\{G(t_i)\}$) jest monotonicznie malejący, to optymalny model postaci (4) istnieje i zarówno parametry E_j jak i wykładniki a_j są dodatnie. Lanczos [1956], a następnie Kammler [1979] oraz Varah [1985] pokazali, iż w rozpatrywanym tu zadaniu aproksymacji ciągu monotonicznie malejącego sumą dwu funkcji wykładniczych, może istnieć kilka modeli optymalnych. Lanczos wskazał także na skrajną wrażliwość wykładników a_j na nawet bardzo małe zaburzenia danych. Standardowe numeryczne techniki minimalizacji, takie jak algorytmy kierunków poprawy lub metody kierunków sprzężonych, nie są więc skutecznym narzędziem rozwiązania zadania (5), szczególnie wówczas, gdy nie dysponujemy dobrym punktem startowym. W tej pracy do identyfikacji modelu (4) zastosowano modyfikację metody Prony'ego.

Zastosowanie metody Prony'ego do identyfikacji modelu Maxwella

Rozważmy problem identyfikacji czteroelementowego modelu Maxwella postaci (4).

Dany jest zbiór pomiarów $\{t_i, G(t_i)\}$, $i = 0, 1, \dots, N-1$ przeprowadzonych w stałych odstępach czasu Δ , tzn. $t_i = i\Delta$. Dla $t_i = i\Delta$ zachodzą równości

$$G(t_i) = G(i\Delta) = E_1 q_1^i + E_2 q_2^i, \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6)$$

gdzie

$$q_1 = e^{-a_1 \Delta}, \quad q_2 = e^{-a_2 \Delta} \quad (7)$$

Niech q_1 i q_2 będą pierwiastkami następującego równania algebraicznego

$$q^2 + p_2 q + p_1 = 0 \quad (8)$$

Łatwo sprawdzić, że zachodzą następujące liniowe równania różnicowe

$$G(t_{i+2}) + p_2 G(t_{i+1}) + p_1 G(t_i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N-3 \quad (9)$$

które po wprowadzeniu notacji wektorowo-macierzowej

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} G(t_0) & G(t_1) \\ G(t_1) & G(t_2) \\ \vdots & \vdots \\ G(t_{N-3}) & G(t_{N-2}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} -G(t_2) \\ -G(t_3) \\ \vdots \\ -G(t_{N-1}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

można zapisać w zwartej postaci

$$\mathbf{U} = \mathbf{W} \mathbf{p} \quad (11)$$

Stosując do równania (11) metodę najmniejszych kwadratów, czyli minimalizując kwadratowy wskaźnik jakości identyfikacji $\|\mathbf{U} - \mathbf{W} \mathbf{p}\|^2$ zależny od wektora \mathbf{p} , otrzymujemy następujące oszacowanie wektora współczynników układu równań różnicowych (9)

$$\mathbf{p} = (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{U} \quad (12)$$

Znając współczynniki p_1 i p_2 możemy łatwo policzyć pierwiastki q_1 i q_2 równania kwadratowego (11) oraz na podstawie wzorów (10) parametry a_1 i a_2 .

$$a_1 = -\ln(q_1)/\Delta \quad \text{i} \quad a_2 = -\ln(q_2)/\Delta \quad (13)$$

Parametry E_1 i E_2 wyznaczmy na podstawie układu równań (6). Definiując wektor wszystkich pomiarów $\hat{\mathbf{U}}$ oraz wektor parametrów \mathbf{E} i macierz \mathbf{Q} :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ q_1 & q_2 \\ \vdots & \vdots \\ q_1^{N-1} & q_2^{N-1} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} G(t_0) \\ G(t_1) \\ \vdots \\ G(t_{N-1}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

układu równań (6) można zapisać w równoważnej postaci

$$\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{Q} \mathbf{E} \quad (15)$$

Stosując ponownie metodę najmniejszych kwadratów do równania (15), tzn. minimalizując wskaźnik kwadratowy $\|\hat{\mathbf{U}} - \mathbf{Q} \mathbf{E}\|^2$ względem wektora \mathbf{E} , otrzymujemy

$$\mathbf{E} = (\mathbf{Q}^T \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^T \hat{\mathbf{U}} \quad (16)$$

Wobec tego parametry modelu Maxwella (4) można wyznaczyć na podstawie pomiarów funkcji relaksacji naprężeń $G(t)$ stosując procedurę przedstawioną w następnym rozdziale.

WYNIKI I DYSKUSJA

Algorytm identyfikacji funkcji relaksacji naprężeń

Krok 1. Przeprowadź eksperyment dyskretny i wyznacz zbiór pomiarów $\{G(t_i)\}$ funkcji relaksacji $G(t)$ przeprowadzonych w stałych odstępach czasu Δ , $t_i = i\Delta$, dla $i = 0, 1, \dots, N - 1$.

Krok 2. Utwórz macierz i wektor pomiarów \mathbf{W} oraz \mathbf{U} o strukturze (10), a następnie wyznacz wektor parametrów \mathbf{p} zgodnie z wzorem (12).

Krok 3. Oblicz pierwiastki q_1 i q_2 , równania kwadratowego (8), a następnie wyznacz wykładniki a_1 i a_2 na podstawie wzorów (13).

Krok 4. Utwórz macierz \mathbf{Q} oraz wektor pomiarów $\hat{\mathbf{U}}$ o strukturze (14), a następnie oblicz wektor współczynników sprężystości \mathbf{E} stosując wzór (16).

Łatwo zauważyć, że w obu formułach najmniejszych kwadratów (12) i (16) macierze $\mathbf{W}^T\mathbf{W}$ i $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}$ to macierze 2×2 wymiarowe, wyznaczenie ich odwrotności nie wymaga więc stosowania numerycznych technik wyznaczania macierzy odwrotnych. Również rozwiązywanie równania kwadratowego (8) dane są wzorami analitycznymi.

Identyfikowalność

Podstawowym i oczywistym wymaganiem stawianym każdej metodzie identyfikacji jest żądanie aby w przypadku, gdy badany proces opisany jest modelem z przyjętej klasy, a jego pomiary nie są obciążone zakłóceniami, metoda gwarantowała jednoznaczne wyznaczenie rzeczywistego opisu procesu, czyli zapewniała jego identyfikowalność [Bubnicki 1980]. Dla przedstawionego algorytmu rozstrzyga to następujące twierdzenie, jego dowód podano w Dodatku A.

Twierdzenie 1. *Jeśli rzeczywisty moduł relaksacji $G(t)$ opisany jest sumą dwu dodatnich funkcji wykładniczych $G(t) = \tilde{E}_1 e^{-\tilde{a}_1 t} + \tilde{E}_2 e^{-\tilde{a}_2 t}$, gdzie $\tilde{a}_1 \neq \tilde{a}_2$, a jej pomiary $G(t_i)$ nie są obciążone zakłóceniami, to przedstawiona procedura identyfikacji prowadzi do wyznaczenia rzeczywistych parametrów \tilde{E}_1 i \tilde{E}_2 oraz \tilde{a}_1 i \tilde{a}_2 .*

Czy zadania obliczeniowe algorytmu są dobrze postawione w sensie Hadamarda?

Jak wcześniej podkreślono, klasyczne nieliniowe zadanie najmniejszej sumy kwadratów (5) jest zadaniem źle postawionym. Problem będziemy nazywać dobrze postawionym w sensie Hadamarda, jeśli rozwiązanie problemu istnieje, jest jednoznaczne i ciągłe względem danych [Gutenbaum 2003]. Ciągłość rozwiązania względem danych gwarantuje, iż małym zaburzeniem danych odpowiadają małe zmiany rozwiązania. Zapewnia to stabilność algorytmu.

Obecnie zbadamy czy i kiedy poszczególne zadania obliczeniowe przedstawionego algorytmu są dobrze postawione w sensie Hadamarda. Będziemy zakładać, że

(A1) pomiary modułów relaksacji $G(t_i)$ tworzą ciąg monotonicznie malejący i $G(t_i) \geq 0$ dla $i = 0, 1, \dots, N-1$.

(A2) faktory $\alpha_i = G(t_{i+1})/G(t_i)$ tworzą ciąg niemalejący, $i = 0, 1, \dots, N-2$.

Oczywiście wobec założenia (A1) $0 < \alpha_i < 1$. Założenie (A1) jest naturalne w kontekście modelowania procesów relaksacji naprężeń. Aby wyjaśnić założenie (A2), rozważmy spadki wartości funkcji relaksacji $G(t)$ w dwu kolejnych przedziałach czasu $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i = \Delta$ i $\Delta t_{i-1} = t_i - t_{i-1} = \Delta$ dane wzorami

$$\Delta G_i = G(t_{i+1}) - G(t_i) = (\alpha_i - 1)G(t_i) \text{ i } \Delta G_{i-1} = G(t_i) - G(t_{i-1}) = (1 - 1/\alpha_{i-1})G(t_i) \quad (17)$$

Ponieważ $1/\alpha_{i-1} + \alpha_{i-1} > 2$, wobec (A2) również $1/\alpha_{i-1} + \alpha_i > 2$. Stąd $\alpha_i - 1 > 1 - 1/\alpha_{i-1}$, czyli na podstawie wzorów (17) zachodzi nierówność $0 > \Delta G_i > \Delta G_{i-1}$. Założenie (A2), oznacza więc, że spadki ΔG_i oraz ΔG_{i-1} wartości modułu relaksacji w kolejnych przedziałach czasu są coraz mniejsze. Jest ono także naturalne dla rozpatrywanego procesu.

Rozważmy najpierw formułę najmniejszych kwadratów (12). Uwzględniając strukturę macierzy \mathbf{W} (10), można pokazać (Dodatek B, punkt 1), że:

$$\det(\mathbf{W}^T \mathbf{W}) = \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{k=i+1}^{N-1} [\alpha_{i-1} - \alpha_{k-1}]^2 G(t_{i-1})^2 G(t_{k-1})^2 \quad (18)$$

Wobec tego $\det(\mathbf{W}^T \mathbf{W}) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy wskaźniki α_i tworzą ciąg stały. Wykorzystując teorię równań funkcyjnych [Aczél 1966] łatwo sprawdzić, iż pełna klasa funkcji spełniających ten warunek dana jest wzorem $G(t) = \alpha \gamma^{\beta t} = \alpha e^{-\beta t}$, gdzie $\beta_1 = -\beta \ln(\gamma)$. Zjawiska zachodzące w materiale roślinnym podczas procesu relaksacji naprężeń są jednak bardziej skomplikowane niż proces opisany modelem wykładniczym postaci $G(t) = \alpha e^{-\beta t}$.

Jeśli wyznacznik $\det(\mathbf{W}^T \mathbf{W}) > 0$ to macierz odwrotna $(\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1}$ istnieje i wektor optymalnych parametrów \mathbf{p} dany regułą najmniejszych kwadratów $\mathbf{p} = (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{U}$ jest funkcją ciągłą zarówno macierzy \mathbf{W} , jak i wektora \mathbf{U} , a więc także danych pomiarowych $\{G(t_i)\}$ [Kielbasiński i Schwetlick 1994, str. 60-61]. Zachodzi więc następująca własność.

Własność 1. *Problem najmniejszych kwadratów $\mathbf{p} = (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{U}$ jest dobrze postawiony w sensie Hadamarda wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg faktorów $\{\alpha_i\}$ nie jest ciągiem stałym.*

Przejdziemy obecnie do analizy zadań rozwiązywanych w kroku 3 algorytmu. Równanie kwadratowe (8) posiada dwa jednoznaczne pierwiastki dla dowolnych parametrów p_1 i p_2 . Rozwiązania równania kwadratowego są funkcjami ciągłymi jego

współczynników, a wykładniki a_1 i a_2 (13) są ciągłymi funkcjami q_1 i q_2 , można więc sformułować następującą własność.

Własność 2. *Zadania wyznaczenia parametrów q_1 i q_2 oraz wykładników a_1 i a_2 w kroku 3 algorytmu są dobrze postawione w sensie Hadamarda.*

Na podstawie znanego warunku nieosobliwości macierzy Vandermonde'a, macierz Vandermonde'a \mathbf{Q} jest pełnego rzędu wtedy i tylko wtedy, gdy $q_1 \neq q_2$. Wówczas $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}$ jest macierzą nieosobliwą i formuła najmniejszych kwadratów (16) obliczana w kroku 4 algorytmu jest dobrze postawiona. Warunek $q_1 \neq q_2$ jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $p_2^2 \neq 4p_1$, pozwala to sformułować następującą własność.

Własność 3. *Zadanie najmniejszych kwadratów $\mathbf{E} = (\mathbf{Q}^T \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^T \hat{\mathbf{U}}$ jest dobrze postawione w sensie Hadamarda wtedy i tylko wtedy, gdy $q_1 \neq q_2$, lub równoważnie $p_2^2 \neq 4p_1$.*

Warunki stosowalności algorytmu

Spełnienie warunków podanych we Własnościach 1 i 3 nie gwarantuje, iż wyznaczone parametry modelu (4) są rzeczywiste i dodatnie. Na problem występowania zespolonych pierwiastków równania (8), czyli w konsekwencji zespolonych wykładników a_1 i a_2 , zwraca uwagę wielu autorów, np. [Kundu i Mitra 1998]. Również parametry liniowe E_1 i E_2 obliczone według wzoru (16), nawet jeśli są rzeczywiste, niekoniecznie muszą być dodatnie. We wszystkich takich przypadkach algorytm, mimo że poprawny numerycznie, prowadzi do wyznaczenia rozwiązania fizycznie bezsensownego. Uzasadnia to wprowadzenie następującej definicji.

Przedstawiony algorytm identyfikacji będziemy nazywać *stosowalnym* do zadania identyfikacji modelu Maxwella jeśli:

- (i) zadania (12), (8), (13) oraz (16) są dobrze postawione w sensie Hadamarda,
- (ii) spełniony jest warunek identyfikowalności rzeczywistej funkcji relaksacji danej modelem Maxwella (4),
- (iii) wyznaczone wykładniki a_1 i a_2 są rzeczywiste, dodatnie i $a_1 \neq a_2$,
- (iv) wyznaczone współczynniki E_1 i E_2 są rzeczywiste i dodatnie.

Można pokazać (Dodatek B, punkt 2), że jeśli spełnione są założenia (A1) i (A2) to

$$p_1 > 0 \quad \text{i} \quad -p_2 > 0 \quad (19)$$

Przeanalizujemy kolejno zadania identyfikacji parametrów nieliniowych a_1 i a_2 oraz parametrów liniowych E_1 i E_2 . Nie zmniejszając ogólności rozważań, będziemy przyjmować, że pierwiastki q_1 i q_2 równania kwadratowego (8) spełniają warunek $q_1 \leq q_2$.

Analizując wzory (13), łatwo zauważyć, że warunek (iii) stosowalności algorytmu jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy rozwiązania q_1 i q_2 równania kwadratowego

(8) są rzeczywiste i spełniają nierówności $0 < q_1 < q_2 < 1$. Oczywistym warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby q_1 i q_2 były rzeczywiste i takie, że $q_1 \neq q_2$, jest $p_2^2 > 4p_1$. Wobec (19) nierówność $p_2^2 > 4p_1$ jest, w przypadku (A1)-(A2), również warunkiem wystarczającym na to, aby pierwiastek $q_1 = \left[-p_2 - \sqrt{p_2^2 - 4p_1} \right] / 2 > 0$. Łatwo także sprawdzić, że gdy $p_2^2 > 4p_1$, to $0 < q_2 = \left[-p_2 + \sqrt{p_2^2 - 4p_1} \right] / 2 < 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $0 < \sqrt{p_2^2 - 4p_1} < 2 + p_2$, lub równoważnie $0 < p_2^2 - 4p_1 < 4 + p_2^2 + 4p_2$, czyli $p_2 + p_1 + 1 > 0$. Udowodniliśmy więc następującą własność.

Własność 4. *Jeśli spełnione są założenia (A1) i (A2), to parametry nieliniowe a_1 i a_2 modelu Maxwella (4) generowane przez przedstawiony algorytm spełniają warunek (iii) wtedy i tylko wtedy, gdy składowe p_1 i p_2 wektora \mathbf{p} (12) spełniają nierówności*

$$p_2^2 > 4p_1 \quad \text{i} \quad p_2 + p_1 + 1 > 0 \quad (20)$$

Można pokazać (Dodatek B, punkt 3), że jeśli spełnione są założenia (A1) i (A2), to

$$-p_2 = |p_2| < \alpha_{N-1} + \frac{1}{\alpha_0} p_1 \quad (21)$$

Nierówność ta jest słabsza niż drugi z warunków koniecznych i dostatecznych (20), jednak wszystkie przetestowane przykłady wskazują, że w przypadku (A1)-(A2) spełniony jest także warunek $p_2 + p_1 + 1 > 0$, dowód nierówności (21) bazuje bowiem na ciągu bardzo silnych oszacowań (p. Dodatek B, nierówność (D6)).

Przejdziemy obecnie do analizy zadania najmniejszych kwadratów (16) rozwiązywanego w kroku 4 algorytmu. Zgodnie z Własnością 3 zadanie to jest dobrze postawione, wtedy i tylko wtedy, gdy $q_1 \neq q_2$, czyli równoważnie $p_2^2 \neq 4p_1$. Jeśli $p_2^2 > 4p_1$, to q_1 oraz q_2 są rzeczywiste. Wartości rzeczywiste przyjmują więc także elementy wektora \mathbf{E} . Ponieważ wektor \mathbf{E} spełnia równanie normalne $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{E} = \mathbf{Q}^T \hat{\mathbf{U}}$, a jak łatwo sprawdzić, wszystkie elementy 2×2 wymiarowej macierzy $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}$ oraz wektora $\mathbf{Q}^T \hat{\mathbf{U}}$ są dodatnie, przynajmniej jeden z elementów wektora \mathbf{E} jest również dodatni. Warunek konieczny i dostateczny na to aby $E_1 > 0$ i równocześnie $E_2 > 0$ podaje następująca własność, wprowadzona w Dodatku C, punkt 1.

Własność 5. *Jeśli spełnione są założenia (A1)-(A2) i $p_2^2 > 4p_1$, to parametry liniowe E_1 i E_2 modelu Maxwella (4) są rzeczywiste i dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są dwie nierówności*

$$\left[\sum_{i=1}^{N-1} G(t_i) q_1^i \right] \frac{1 - (q_2)^{2N}}{1 - (q_2)^2} > \left[\sum_{k=i}^{N-1} G(t_i) q_2^i \right] \frac{1 - (q_1 q_2)^N}{1 - (q_1 q_2)} \quad (22)$$

$$\left[\sum_{i=1}^{N-1} G(t_i) q_2^i \right] \frac{1 - (q_1)^{2N}}{1 - (q_1)^2} > \left[\sum_{i=1}^{N-1} G(t_i) q_1^i \right] \frac{1 - (q_1 q_2)^N}{1 - (q_1 q_2)} \quad (23)$$

Mnożąc nierówności (22) i (23), obustronnie otrzymujemy warunek konieczny na to, aby parametry E_1 i E_2 były rzeczywiste i dodatnie

$$\left[\frac{1 - (q_1)^{2N}}{1 - (q_1)^2} \right] \left[\frac{1 - (q_2)^{2N}}{1 - (q_2)^2} \right] > \left[\frac{1 - (q_1 q_2)^N}{1 - (q_1 q_2)} \right]^2 \quad (24)$$

Z kolei uwzględniając strukturę macierzy \mathbf{Q} (14) łatwo sprawdzić, że wyznacznik

$$\det(\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}) = \left[\sum_{i=0}^{N-1} (q_1)^{2i} \right] \left[\sum_{i=1}^{N-1} (q_2)^{2i} \right] - \left[\sum_{i=0}^{N-1} (q_1 q_2)^i \right]^2$$

czyli równoważnie

$$\det(\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}) = \left[\frac{1 - (q_1)^{2N}}{1 - (q_1)^2} \right] \left[\frac{1 - (q_2)^{2N}}{1 - (q_2)^2} \right] - \left[\frac{1 - (q_1 q_2)^N}{1 - (q_1 q_2)} \right]^2 \quad (25)$$

Wyznacznik $\det(\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}) > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $q_1 \neq q_2$, na mocy wzoru (25) warunek konieczny (24) jest wówczas spełniony tożsamościowo. Badania numeryczne przeprowadzone dla danych empirycznych, a także badania symulacyjne wskazują, że w przypadku (A1)-(A2) spełnienie warunku (24) gwarantuje, że parametry E_1 i E_2 są dodatnie, jeśli tylko $q_1 \neq q_2$. Poniżej podano także prosty warunek wystarczający, udowodniony w Dodatku C, punkt 2.

Własność 6. Jeśli spełnione są założenia (A1)-(A2) i $p_2^2 > 4p_1$ oraz dla każdego $i = 1, \dots, N-1$ spełnione są nierówności

$$\left[\frac{1}{(\alpha_1)} \right] \left[\frac{1 - (\alpha_1 q_1)^i}{1 - (\alpha_1 q_1)} \right] \left[\frac{1 - (q_2)^{2N}}{1 - (q_2)^2} \right] \geq \left[\frac{1}{(\alpha_{N-1})} \right] \left[\frac{1 - (\alpha_{N-1} q_2)^i}{1 - (\alpha_{N-1} q_2)} \right] \left[\frac{1 - (q_1 q_2)^N}{1 - (q_1 q_2)} \right] \quad (26)$$

$$\left[\frac{1}{(\alpha_1)} \right] \left[\frac{1 - (\alpha_1 q_2)^i}{1 - (\alpha_1 q_2)} \right] \left[\frac{1 - (q_1)^{2N}}{1 - (q_1)^2} \right] \geq \left[\frac{1}{(\alpha_{N-1})} \right] \left[\frac{1 - (\alpha_{N-1} q_1)^i}{1 - (\alpha_{N-1} q_1)} \right] \left[\frac{1 - (q_1 q_2)^N}{1 - (q_1 q_2)} \right] \quad (27)$$

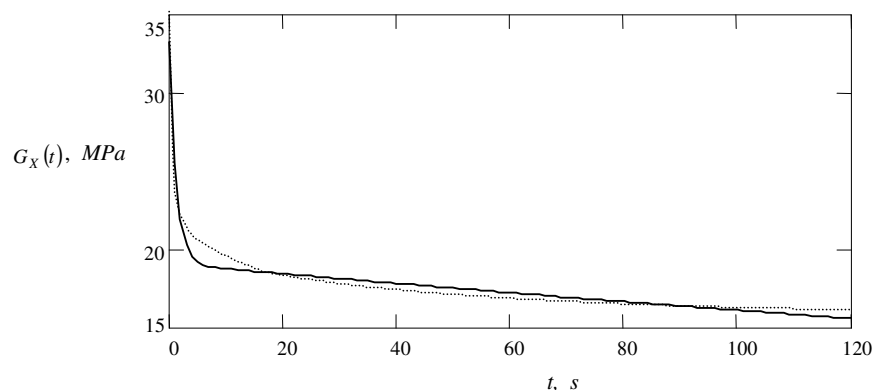
to parametry liniowe E_1 i E_2 modelu Maxwella (4) są rzeczywiste i dodatnie.

Przykład 1

W pracy [Stankiewicz i Gołacki 2004] przedstawiony algorytm zastosowano do wyznaczenia modeli Maxwella opisujących funkcje relaksacji próbek korzenia buraka cukrowego Oktawia w stanie jednoosiowego naprężenia i w stanie jednoosiowego odkształcenia na podstawie danych uzyskanych doświadczalnie przez Gołackiego. Zastosowanie lepkosprężystego liniowego modelu Maxwella do opisu własności mechanicznych próbek korzenia buraka cukrowego uzasadniają wyniki badań prezentowane w wielu pracach, np. [Bzowska-Bakalarz 1994, Gołacki 2002].

Tabela 1. Parametry modelu Maxwella (4) wyznaczone dla jednoosiowej funkcje relaksacji $G_X(t)$ próbki korzenia buraka cukrowego
 Table 1. The parameters for Maxwell model (4) of uniaxial relaxation functions $G_X(t)$ of a sample of the sugar beet root

	E_1 , MPa	E_2 , MPa	a_1 , s^{-1}	a_2 , s^{-1}	J_N , MPa
Metoda Prony'ego	14.10074	19.10886	0.78195	0.001686	0.240338
Metoda quasi-Newtona	14.20997	19.12032	0.80391	0.001694	0.429453



Rys. 2. Funkcja relaksacji $G_X(t)$ próbki korzenia buraka cukrowego w stanie jednoosiowego odkształcenia: wyznaczona metodą Prony'ego (linia ciągła) i wyniki eksperymentu (linia przerywana)

Fig. 2. Relaxation function $G_X(t)$ of a sample of the sugar beet root in the state of uniaxial strain determined by using the Prony method (solid line) and the experimental results (dash line)

W tabeli 1 zestawiono wartości parametrów modelu Maxwella opisującego przykładową funkcję relaksacji $G_X(t)$ w stanie jednoosiowego odkształcenia wyznaczonych na podstawie przedstawionego algorytmu i parametrów wyznaczonych standardową metodą quasi-Newtona. Obliczenia bazują na pomiarach siły reakcji próbki w $N = 240$

punktach pomiarowych rozłożonych równomiernie w przedziale czasu $0 \div 120 s$. Do oceny jakości obu modeli zastosowano średniokwadratowy wskaźnik jakości

$$J_N = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left[G(t_i) - (E_1 e^{-a_1 t} + E_2 e^{-a_2 t}) \right]^2$$

Przebieg funkcji relaksacji $G_X(t)$ wyznaczonej metodą Prony'ego przedstawiono na rysunku 2.

Przykład 2

Efektywność algorytmu Prony'ego ilustruje także następujący przykład, bazujący na historycznych już danych Lanczosa [1956, str. 276] podanych w tabeli 2, którym swoje rozważania ilustruje wielu autorów, np. [Varah 1985]. W tabeli 3 zestawiono parametry modelu wykładniczego postaci (4) uzyskane metodą Prony'ego oraz metodą quasi-Newtona dla dwu punktów początkowych. Do oceny jakości modeli zastosowano klasyczny kwadratowy wskaźnik jakości

$$J = \sum_{i=0}^{N-1} \left[G(t_i) - (E_1 e^{-a_1 t} + E_2 e^{-a_2 t}) \right]^2 \quad (28)$$

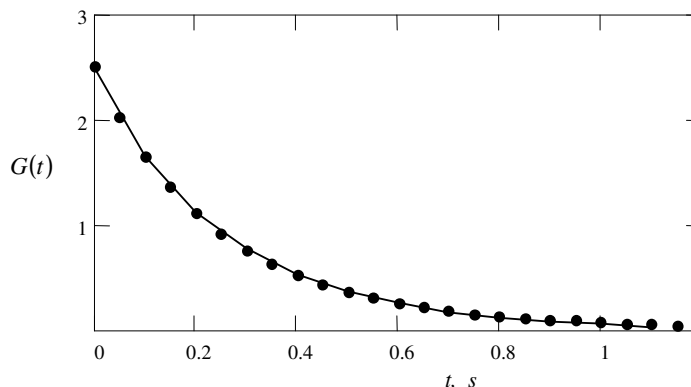
Tabela 2. Dane Lanczosa [Lanczos 1956]
Table 2. The Lanczos data [Lanczos 1956]

t_i	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55
$G(t_i)$	2.51	2.04	1.67	1.37	1.12	0.93	0.77	0.64	0.53	0.45	0.38	0.32
t_i	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10	1.15
$G(t_i)$	0.27	0.23	0.20	0.17	0.15	0.13	0.11	0.10	0.09	0.08	0.07	0.06

Tabela 3. Parametry modelu wykładniczego postaci (4) wyznaczone dla danych Lanczosa
Table 3. The parameters for exponential model of (4) form computed for Lanczos data

Parametry	E_1	E_2	a_1	a_2	J
Metoda Prony'ego					
Wyznaczone parametry	0.339	2.168	8.457	3.531	0.00562
Metoda quasi-Newtona					
Punkt startowy	1.2	1.5	2	1	15.36403
Wyznaczone parametry	-0.1970	2.66184	3.86821	3.79850	0.01601
Punkt startowy	0.5	2	8	4	0.17786
Wyznaczone parametry	2.1050	0.4032	4.5719	1.8088	0.00256

Jeśli dysponujemy dobrym punktem startowym (drugi punkt), to metoda quasi-Newtona zapewnia lepszą aproksymację danych niż metoda Prony'ego. Jednak wówczas, gdy punkt startowy jest źle dobrany (pierwszy punkt), może ona prowadzić do



Rys. 3. Przebieg funkcji $G(t)$ danej modelem wykładniczym (4) wyznaczonej metodą Prony'ego (linia ciągła) i wyniki eksperymentu (punkty) dla danych Lanczosa
 Fig. 3. The function $G(t)$ described by exponential model of (4) form computed by using the Prony method (solid line) and the experimental results (points) for Lanczos data

wyznaczenia rozwiązania fizycznie bezsensownego (parametr $E_1 < 0$), metoda ta zapewnia bowiem tylko wyznaczenia lokalnego minimum wskaźnika jakości J (28). Przebieg wyznaczonej metodą Prony'ego funkcji $G(t)$ danej modelem postaci (4) przedstawiono na rysunku 3.

PODSUMOWANIE

Zastosowanie metody Prony'ego do identyfikacji modelu Maxwella prowadzi do dwustopniowego schematu identyfikacji. Najpierw w kroku 2 wyznaczone są współczynniki równań różnicowych (9) optymalne w sensie najmniejszych kwadratów, to umożliwia wyznaczenie parametrów nieliniowych modelu a_1 i a_2 . Następnie w 4 kroku wyznacza się liniowe parametry modelu E_1 i E_2 , stosując ponownie metodę najmniejszych kwadratów. Taka dekompozycja klasycznego nieliniowego zadania najmniejszych kwadratów (5) powoduje, że otrzymany model jest z reguły suboptymalny w sensie globalnego kwadratowego wskaźnika jakości występującego w (5). Obliczenia są jednak znacznie szybsze niż przy bezpośredniej minimalizacji wskaźnika jakości, metoda nie wymaga też wyznaczania wektora gradientu i macierzy hesjanu funkcji celu oraz doboru punktu startowego i zapewnia bardzo dobre rezultaty w przypadku pomiarów bezsumowych oraz przy niewielkich zakłóceniach. W przypadku silniejszych zakłóceń lepsze rezultaty można osiągnąć, stosując mniej efektywną obliczeniowo, metodę Osborna i Smytha [1995], ewentualnie stosując wstępną filtrację sygnałów.

Rozpatrywany w tej pracy problem aproksymacji danych sumą funkcji wykładniczych jest jednym z najistotniejszych i najczęściej w analizie danych występujących problemów identyfikacji. Modele wykładnicze są bowiem stosowane nie tylko do modelowania własności mechanicznych materiałów lepkosprężystych, ale także w modelowaniu przepływów międzykomorowych w medycynie i biologii, taką postać przyjmują również modele kompartmentowe [Kundu i Mitra 1998, Gutenbaum 2003]. Założenie dodatniej wartości współczynników E_j oraz wykładników a_j jest także typowe dla wielu dziedzin zastosowania. Z matematycznego punktu widzenia koresponduje ono z założeniem, że dane pomiarowe tworzą ciąg monotonicznie malejący.

DODATEK A

Dowód Twierdzenia 1. Niech rzeczywista funkcja relaksacji $G(t)$ będzie postaci $G(t) = \tilde{E}_1 e^{-\tilde{a}_1 t} + \tilde{E}_2 e^{-\tilde{a}_2 t}$, gdzie $\tilde{a}_1 \neq \tilde{a}_2$ i $\tilde{E}_1 > 0$, $\tilde{E}_2 > 0$. Niech \tilde{W} i \tilde{U} oznaczają macierze o strukturze (10) dla $G(t_i) = \tilde{E}_1 (\tilde{q}_1)^i + \tilde{E}_2 (\tilde{q}_2)^i$, gdzie $\tilde{q}_1 = e^{-\tilde{a}_1 \Delta}$ a $\tilde{q}_2 = e^{-\tilde{a}_2 \Delta}$. Definiując macierze \tilde{V} i M_1 oraz wektor M_2

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \tilde{q}_1 & \tilde{q}_2 \\ \vdots & \vdots \\ (\tilde{q}_1)^{N-3} & (\tilde{q}_2)^{N-3} \end{bmatrix}, \quad M_1 = \begin{bmatrix} \tilde{E}_1 & \tilde{E}_1 \tilde{q}_1 \\ \tilde{E}_2 & \tilde{E}_2 \tilde{q}_2 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} \tilde{E}_1 (\tilde{q}_1)^2 \\ \tilde{E}_2 (\tilde{q}_2)^2 \end{bmatrix} \quad (D1)$$

macierz \tilde{W} i wektor \tilde{U} można zapisać w postaci $\tilde{W} = \tilde{V} M_1$ i $\tilde{U} = -\tilde{V} M_2$. Stąd wektor parametrów p wyznaczany w kroku 2 algorytmu według formuły (12) dany jest wzorem

$$p = (\tilde{W}^T \tilde{W})^{-1} \tilde{W}^T \tilde{U} = -(M_1^T \tilde{V}^T \tilde{V} M_1)^{-1} M_1^T \tilde{V}^T \tilde{V} M_2 \quad (D2)$$

Ponieważ $\tilde{q}_1 \neq \tilde{q}_2$, macierz $\tilde{V}^T \tilde{V}$ jest nieosobliwa (\tilde{V} jest macierzą Vandermonde'a). Również macierz M_1 jest nieosobliwa, ponieważ $\det(M_1) = \tilde{E}_1 \tilde{E}_2 (\tilde{q}_2 - \tilde{q}_1) > 0$. W konsekwencji na podstawie wzoru (D2) mamy

$$p = -(M_1^T \tilde{V}^T \tilde{V} M_1)^{-1} M_1^T \tilde{V}^T \tilde{V} M_2 = -(M_1)^{-1} (\tilde{V}^T \tilde{V})^{-1} (M_1^T)^{-1} M_1^T \tilde{V}^T \tilde{V} M_2$$

czyli $p = -(M_1)^{-1} M_2$. Stąd uwzględniając strukturę macierzy M_1 i wektora M_2 (D1), otrzymujemy

$$p = \frac{-1}{\tilde{E}_1 \tilde{E}_2 (\tilde{q}_2 - \tilde{q}_1)} \begin{bmatrix} \tilde{E}_2 \tilde{q}_2 & -\tilde{E}_1 \tilde{q}_1 \\ -\tilde{E}_2 & \tilde{E}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_1 (\tilde{q}_1)^2 \\ \tilde{E}_2 (\tilde{q}_2)^2 \end{bmatrix}$$

i ostatecznie po prostych przekształceniach

$$\mathbf{p} = \frac{-1}{(\tilde{q}_2 - \tilde{q}_1)} \begin{bmatrix} (\tilde{q}_1)^2 \tilde{q}_2 - \tilde{q}_1 (\tilde{q}_2)^2 \\ (\tilde{q}_2)^2 - (\tilde{q}_1)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \tilde{q}_2 \\ -(\tilde{q}_2 + \tilde{q}_1) \end{bmatrix}$$

Wobec tego \tilde{q}_1 i \tilde{q}_2 są jedynymi pierwiastkami równania (8) rozwiązywanego w kroku 3 algorytmu dla parametrów $p_1 = \tilde{q}_1 \tilde{q}_2$ i $p_2 = -(\tilde{q}_1 + \tilde{q}_2)$. Na podstawie wzorów (13) uzyskujemy więc $a_1 = -\ln(\tilde{q}_1)/\Delta = \tilde{a}_1$ i $a_2 = -\ln(\tilde{q}_2)/\Delta = \tilde{a}_2$.

Niech $\tilde{\mathbf{Q}}$ i $\hat{\mathbf{U}}$ oznaczają macierze \mathbf{Q} i $\hat{\mathbf{U}}$ o strukturze (14) dla $q_1 = \tilde{q}_1$ i $q_2 = \tilde{q}_2$. Ponieważ $G(t_i) = \tilde{E}_1(\tilde{q}_1)^i + \tilde{E}_2(\tilde{q}_2)^i$, uwzględniając strukturę macierzy $\hat{\mathbf{U}}$ i $\tilde{\mathbf{Q}}$ (14) oraz $\tilde{\mathbf{E}} = [\tilde{E}_1 \quad \tilde{E}_2]^T$, łatwo sprawdzić, że zachodzi równość $\hat{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{E}}$. Macierz $\tilde{\mathbf{Q}}^T\tilde{\mathbf{Q}}$ jest nieosobliwa, gdyż $\tilde{q}_1 \neq \tilde{q}_2$. Wobec tego wektor współczynników sprężystości \mathbf{E} obliczony w kroku 4 algorytmu jest równy $\mathbf{E} = (\tilde{\mathbf{Q}}^T\tilde{\mathbf{Q}})^{-1}\tilde{\mathbf{Q}}^T\hat{\mathbf{U}} = (\tilde{\mathbf{Q}}^T\tilde{\mathbf{Q}})^{-1}\tilde{\mathbf{Q}}^T\tilde{\mathbf{Q}}\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}$. Algorytm identyfikacji gwarantuje więc wyznaczenie rzeczywistych parametrów \tilde{E}_1, \tilde{E}_2 oraz \tilde{a}_1 i \tilde{a}_2 .

DODATEK B

1. Wyprowadzenie wzoru (18). Uwzględniając strukturę macierzy \mathbf{W} łatwo sprawdzić, że

$$\det(\mathbf{W}^T\mathbf{W}) = \left[\sum_{i=0}^{N-2} G(t_i)^2 \right] \left[\sum_{i=1}^{N-1} G(t_i)^2 \right] - \left[\sum_{i=0}^{N-2} G(t_i)G(t_{i+1}) \right]^2$$

Wykorzystując tożsamość Lagrange'a [Leśmanowicz i Łoś 1972]:

$$\left[\sum_{i=1}^N x_i^2 \right] \left[\sum_{i=1}^N y_i^2 \right] - \left[\sum_{i=1}^N x_i y_i \right]^2 = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=i+1}^N [x_i y_k - x_k y_i]^2$$

po prostych przekształceniach algebraicznych otrzymujemy

$$\det(\mathbf{W}^T\mathbf{W}) = \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{k=i+1}^{N-1} [G(t_i)G(t_{k-1}) - G(t_{i-1})G(t_k)]^2$$

a stąd, po uwzględnieniu definicji czynników α_i , wynika wzór (18).

2. Dowód nierówności (19). Analizując strukturę macierzy \mathbf{W}^T i $(\mathbf{W}^T\mathbf{W})^{-1}$ oraz wektora \mathbf{U} łatwo sprawdzić, że parametr p_1 dany jest wzorem

$$p_1 = \frac{-1}{\det(\mathbf{W}^T\mathbf{W})} \left\{ \left[\sum_{i=1}^{N-1} G(t_i)^2 \right] \left[\sum_{i=1}^{N-1} G(t_{i-1})G(t_{i+1}) \right] - \left[\sum_{i=1}^{N-1} G(t_{i-1})G(t_i) \right] \left[\sum_{i=1}^{N-1} G(t_i)G(t_{i+1}) \right] \right\}$$

Wykorzystując tożsamość Czebyszewa [Leśmanowicz i Łoś 1972]:

$$\left[\sum_{i=1}^N x_i \right] \left[\sum_{i=1}^N y_i \right] = N \left[\sum_{i=1}^N x_i y_i \right] - \sum_{i=1}^N \sum_{k=i+1}^N [x_i - x_k][y_i - y_k]$$

można pokazać, że

$$p_1 = \frac{1}{\det(\mathbf{W}^T \mathbf{W})} \left\{ \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{k=i+1}^{N-1} [G(t_{i-1})G(t_k) - G(t_i)G(t_{k-1})][G(t_i)G(t_{k+1}) - G(t_{i+1})G(t_k)] \right\}$$

lub równoważnie

$$p_1 = \frac{1}{\det(\mathbf{W}^T \mathbf{W})} \left\{ \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{k=i+1}^{N-1} \alpha_{k-1} \alpha_{i-1} [\alpha_{k-1} - \alpha_{i-1}] [\alpha_k - \alpha_i] [G(t_{i-1})G(t_{k-1})]^2 \right\} \quad (D3)$$

Ponieważ $\det(\mathbf{W}^T \mathbf{W}) > 0$, w przypadku (A1)-(A2) pierwsza z nierówności (19) wynika wprost z (D3). Podobnie można pokazać, że

$$p_2 = \frac{-1}{\det(\mathbf{W}^T \mathbf{W})} \left\{ \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{k=i+1}^{N-1} [\alpha_{k-1} - \alpha_{i-1}] [\alpha_{k-1} \alpha_k - \alpha_{i-1} \alpha_i] [G(t_{i-1})G(t_{k-1})]^2 \right\} \quad (D4)$$

a stąd, w przypadku (A1)-(A2), natychmiast otrzymujemy nierówność $p_2 < 0$.

3. Dowód nierówności (21). Łatwo sprawdzić, że

$$[\alpha_{k-1} - \alpha_{i-1}] [\alpha_k \alpha_{k-1} - \alpha_i \alpha_{i-1}] = \alpha_k [\alpha_{k-1} - \alpha_{i-1}]^2 + \frac{1}{\alpha_{k-1}} [\alpha_{k-1} \alpha_{i-1} [\alpha_{k-1} - \alpha_{i-1}] [\alpha_k - \alpha_i]] \quad (D5)$$

Stąd, jeśli spełnione jest założenie (A2), to

$$[\alpha_{k-1} - \alpha_{i-1}] [\alpha_k \alpha_{k-1} - \alpha_i \alpha_{i-1}] \leq \alpha_{N-1} [\alpha_{k-1} - \alpha_{i-1}]^2 + \frac{1}{\alpha_0} [\alpha_{k-1} \alpha_{i-1} [\alpha_{k-1} - \alpha_{i-1}] [\alpha_k - \alpha_i]] \quad (D6)$$

Mnożąc nierówność (D6) obustronnie przez $[G(t_{i-1})G(t_{k-1})]^2$, a następnie sumując obustronnie po $i = 1, \dots, N-1$ oraz $k = i+1, \dots, N-1$ i dzieląc przez $\det(\mathbf{W}^T \mathbf{W})$ dany wzorem (18), oraz uwzględniając wzory (D3) i (D4), otrzymujemy nierówność (21).

DODATEK C

1. Dowód Własności 5. Ponieważ dla $p_2^2 > 4p_1$ parametry $q_1 \neq q_2$ i macierz $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}$ jest nieosobliwa. Analizując strukturę macierzy \mathbf{Q} , $(\mathbf{Q}^T \mathbf{Q})$ oraz $\hat{\mathbf{U}}$, łatwo sprawdzić, że

$$E_1 = \frac{1}{\det(\mathbf{Q}^T \mathbf{Q})} \left\{ \left[\sum_{i=0}^{N-1} (q_2)^{2i} \right] \left[\sum_{i=1}^{N-1} (q_1)^i G(t_i) \right] - \left[\sum_{i=0}^{N-1} (q_1 q_2)^i \right] \left[\sum_{i=1}^{N-1} (q_2)^i G(t_i) \right] \right\} \quad (D9)$$

$$E_2 = \frac{1}{\det(\mathbf{Q}^T \mathbf{Q})} \left\{ \left[\sum_{i=0}^{N-1} (q_1)^{2i} \right] \left[\sum_{i=1}^{N-1} (q_2)^i G(t_i) \right] - \left[\sum_{i=0}^{N-1} (q_1 q_2)^i \right] \left[\sum_{i=1}^{N-1} (q_1)^i G(t_i) \right] \right\} \quad (D10)$$

Stąd, ponieważ dla $q_1 \neq q_2$ wyznacznik $\det(\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}) > 0$, na mocy wzoru na sumę szeregu geometrycznego natychmiast otrzymujemy warunki (22) i (23).

2. Dowód Własności 6. Na podstawie (D9) mamy

$$E_1 = \frac{1}{\det(\mathbf{Q}^T \mathbf{Q})} \left\{ \left[\frac{1 - (q_2)^{2N}}{1 - (q_2)^2} \right] \left[\sum_{i=1}^{N-1} (q_1)^i G(t_i) \right] - \left[\frac{1 - (q_1 q_2)^N}{1 - (q_1 q_2)} \right] \left[\sum_{i=1}^{N-1} (q_2)^i G(t_i) \right] \right\} \quad (D11)$$

Ponieważ

$$G(t_i) = \alpha_{i-1} G(t_{i-1}) = \alpha_{i-1} \alpha_{i-2} G(t_{i-2}) = \dots = \alpha_{i-1} \alpha_{i-2} \dots \alpha_1 G(t_1) \geq (\alpha_1)^{i-1} G(t_1) \quad (D12)$$

i równocześnie

$$G(t_i) = \alpha_{i-1} \alpha_{i-2} \dots \alpha_1 G(t_1) \leq \alpha_{N-1} (\alpha_{N-1})^{i-1} G(t_1) \quad (D13)$$

na podstawie (D11) otrzymujemy oszacowanie

$$E_1 = \frac{G(t_1)}{\det(\mathbf{Q}^T \mathbf{Q})} \left\{ \left[\frac{1 - (q_2)^{2N}}{1 - (q_2)^2} \right] \left[\frac{1}{\alpha_1} \left[\sum_{i=1}^{N-1} (\alpha_1 q_1)^i \right] \right] - \left[\frac{1 - (q_1 q_2)^N}{1 - (q_1 q_2)} \right] \left[\frac{1}{\alpha_{N-1}} \left[\sum_{i=1}^{N-1} (\alpha_{N-1} q_2)^i \right] \right] \right\}$$

Wobec tego jeśli spełniona jest nierówność (26), to $E_1 > 0$, ponieważ przynajmniej dla $i = 1$ nierówność (26) jest nierównością ostrą. Podobnie wykorzystując wzór (D10) oraz oszacowania (D12) i (D13) można pokazać, że jeśli spełniona jest nierówność (27), to $E_2 > 0$.

PIŚMIENNICTWO

- Aczél J., 1966. Lectures on functional equations and their applications. Academic Press New York.
- Barrodale, I., Oleski, D.D., 1981. Exponential approximation using Prony's method. In: Baker, C.T.H., Phillips, C., The Numerical Solution of Nonlinear Problems, 258–269.
- Brooks J.W., Maier M.W., 1996. Application of system identification and neural networks to classification of land mines. EUREL Int. Conf. The Detection of Abandoned Land Mines: A Humanitarian Imperative Seeking a Technical Solution. Conf. Publ. 431, 46–50.
- Bubnicki Z., 1980. Identification of Control Plants. PWN Warszawa, Elsevier Amsterdam.
- Bzowska-Bakalarz M. 1994. Właściwości mechaniczne korzeni buraków cukrowych. Rozpr. Nauk. AR w Lublinie, 166.

- Chen P., Chen S., 1986. Stress relaxation functions of apple under high loading rates. *Transaction of the ASAE*. 29, 1754–1759.
- Derski W., Ziemia S., 1968. *Analiza modeli reologicznych*. PWN Warszawa.
- Evans J. W., Gragg W.B., LeVeque R. J., 1980. On Least-Squares Exponential Sum Approximation with Positive Coefficients. *Mathematics of Computations* 34(149), 203–211.
- Fargues M.P., Cristi R., Vanderkamp M.M., 1993. Modeling and classification of biological signals using least squares Prony-SVD AR modeling. *Proc. of the 36th Midwest Symp. on Circuits and Systems*. 16-18 Aug. 1993. 1, 445–448.
- Farrokhi M., Isik C., 1994. Application of Prony signal analysis to recurrent neural networks. *Proc. IEEE World Congress on Computational Intelligence and IEEE Int. Conf. on Neural Networks*. 27 June – 2 July 1994, 1, 413–418.
- Flügge W., 1967. *Viscoelasticity*. Blaisdell Publishing Company Waltham, Toronto, London.
- Gołacki K., 1998. Charakterystyki lepkosprężyste korzeni marchwi w szerokim zakresie prędkości obciążeń mechanicznych. *Rozpr. Nauk. AR w Lublinie*. 216.
- Gołacki K., 2002. Lepkosprężyste charakterystyki korzeni buraków cukrowych. *Acta Agroph.* 78, 37–49.
- Gutenbaum J., 2003. *Modelowanie matematyczne systemów*. EXIT Warszawa.
- Hasanovic A., Feliachi A., Bhatt N.B., DeGross A.G., 2004. Practical robust PSS design through identification of low-order transfer functions. *IEEE Trans. on Power Systems* 19(3), 1492–1500.
- Hildebrand F. B., 1956. *Introduction to Numerical Analysis*. McGraw-Hill New York.
- Kammler D. W., 1979. Least squares approximation of completely monotonic functions by sums of exponentials. *SIAM J. Numer. Anal.* 16(5), 801–818.
- Kiełbasiński A., Schwetlick H., 1994. *Numeryczna algebra liniowa. Wprowadzenie do obliczeń zautomatyzowanych*. WNT, Warszawa.
- Kundu D., Mitra A., 1998. Estimating the parameters of the linear compartment model. *J. Statist. Planning Infer.* 70, 317–334.
- Lanczos C., 1956. *Applied Analysis*. Prentice Hall Englewood Cliffs.
- Leśmanowicz L., Łoś J., 1972. *Zbiór zadań z algebry*. PWN, Warszawa.
- Lu J., Nehrir M.H., Pierre D.A., 2001. A fuzzy logic-based self tuning power system stabilizer optimized with a genetic algorithm. *Electr. Power Syst. Res.* 60, 77–83.
- Osborne, M. R., 1975. Some special nonlinear least squares problems. *SIAM J. Num. Anal.* 12, 571–592.
- Osborne, M. R., Smyth, G. K., 1995. A modified Prony algorithm for fitting sums of exponential functions. *SIAM J. Sci. Comput.* 16, 119–138.
- Ouibrahim H., 1989. Prony, Pisarenko, and the matrix pencil: a unified presentation. *IEEE Transact. Acoust., Speech and Signal Proc.* 37(1), 133–134.
- Petersson J., Holmström K., 1998. Initial values for two-classes of exponential sum least squares fitting problems. *Research Report IMA-TOM-1998-07*. Mälardalen University, Sweden.
- Pierre D.A., Trudnowski D.J., Hauer J.F., 1992. Identifying linear reduced-order models for systems with arbitrary initial conditions using Prony signal analysis. *IEEE Trans. on Automatic Control* 37 (6), 831–835.
- Prony G. R., 1795. *Essai expérimental et analytique: sur les lois de la dilatabilité de fluides élastique et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'alkool, à différentes températures*. *Journal de l'École Polytechnique* 1(22), 24–76.
- Rao M. A., 1999. *Rheology of Fluid and Semisolid Foods. Principles and Applications*. Aspen Publishers, Inc. Gaithersburg, Maryland.

- Ribeiro M. P., Ewins D. J., Robb D. A., 2003. Non-Stationary Analysis and Noise Filtering Using a Technique Extended from the Original Prony Method. *Mech. Syst. Signal Proc.* 17(3), 533–549.
- Ruhe A., 1980. Fitting empirical data by positive sums of exponentials. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 1(4), 481–498.
- Stankiewicz A., Gołacki K., 2004. Algorytm identyfikacji zmiennych w czasie modułów odkształcenia postaciowego i objętościowego roślinnych materiałów lepkosprężystych. *Acta Sci. Pol., Technica Agraria* 3(1–2), 79–95.
- Street A.M., Lukama L., Edwards D.J., 2000. Radio imaging using SVD Prony. *Electr. Letters* 36(13), 1150–1152.
- Szi-Wen C., 2000. A two-stage discrimination of cardiac arrhythmias using a total least squares-based Prony modeling algorithm. *IEEE Tran. on Biomedical Engin.* 47(10), 1317–1327.
- Tawfik M.M., Morcos M.M., 2001. Prony application for locating faults on loop systems. *IEEE Power Engineering Review.* 21(8), 41–43.
- Trudnowski D.J., Johnson J.M., Hauer J.F., 1998. SIMO system identification from measured ringdowns. *Proc. of the American Control Conference.* Philadelphia, 5, 2968–2972.
- Varah J. M., 1985. On fitting exponentials by nonlinear least squares. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 6(1), 30–44.
- Younan N.H., 2000. Radar target identification via a combined E-pulse/SVD-Prony method. *The Record of the IEEE 2000 International Radar Conference*, 7–12 May 2000, 799–803.

IDENTIFICATION OF THE MATHEMATICAL MODELS OF VISCOELASTIC BIOLOGICAL MATERIALS USING PRONY METHOD

Abstract. An algorithm, based on Prony approach, for identification of the relaxation modulus of linear viscoelastic materials described by Maxwell model is presented. It is proved, that if the real relaxation modulus is four-element Maxwell and the measurements are not corrupted by noise, then the identifiability of the real parameters of the relaxation modulus is guaranteed. It is also proved that all the computational tasks solved in the identification scheme are well-posed in the Hadamard sense. Next the necessary and sufficient conditions for the applicability of the algorithm to identifying the four-parameter Maxwell models are derived. The effectiveness of the method is demonstrated through the computation of the relaxation function of the beet sugar root samples in the state of the uniaxial strain. The second example using Lanczos data is also enclosed.

Key words: viscoelasticity, stress relaxation function, Maxwell model, identification algorithm

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 17.12.2004