Jan KRUPA
Katedra Zastosowań Matematyki

Stefan IGNAR
Katedra Budownictwa Wodnego

Transmitancja operatorowa modelu Nasha

W niniejszej pracy podjęto próbę precyzyjniejszego niż zwykle, spotykanego w literaturze matematycznego uzasadnienia pewnych formuł używanych w modelach typu opad — odpływ (Kordas 1974). Dla danej zlewni wyprowadzono równanie różniczkowe opisujące zależność natężenia odpływu $Q(t)$ od natężenia opadu $P(t)$ oraz retencji zlewni $S(t)$ przy założeniu, że funkcje $Q(t)$, $P(t)$, $S(t)$ są klasy C^1. Następnie z tegoż równania wyprowadzono wzór określający transmitancję operatorową dla liniowego modelu Nasha (Nash 1958) w postaci kaskady n zbiorników.

1. Przyjmijmy następujące oznaczenia:
$P(t)$ — funkcja natężenia opadu $[\mathrm{cm}\cdot\mathrm{h}^{-1}]$,
$Q(t)$ — funkcja natężenia odpływu $[\mathrm{cm}\cdot\mathrm{h}^{-1}]$
$S(t)$ — retencja zlewni [cm].

Załóżmy, że funkcje $P(t)$, $Q(t)$, $S(t)$ są klasy C^1 na przedziale $(0, +\infty)$.

Naszym celem jest wyprowadzenie równania różniczkowego opisującego zależność między $P(t)$ i $Q(t)$. W tym celu załóżmy, że $t > 0$. Załóżmy dalej, że $\Delta t \in R$ oraz $t + \Delta t > 0$.

Rozważmy przypadek, gdy $\Delta t > 0$ (rozważania w przypadku, gdy $\Delta t < 0$ są analogiczne).

Ponieważ z założenia funkcje $P'(t)$ i $Q'(t)$ są ciągłe na przedziale $< t, t+\Delta t >$, zatem

$$\exists M > 0 \ \forall \tau \in \langle t, t+\Delta t \rangle \ [\, |P'(\tau)| < M \wedge |Q'(\tau)| < M \,]$$

Z równania ciągłości dla danej zlewni mamy następującą równość:

$$\int_t^{t+\Delta t} P(\tau)\, d\tau - \int_t^{t+\Delta t} Q(\tau)\, d\tau = S(t+\Delta t) - S(t) \qquad (1)$$

Ze wzoru Taylora wynika, że

$$\forall \tau \in (t, t+\Delta t) \ \exists \eta_\tau, \xi_\tau \in (t, \tau) \ [\, P(\tau) = P(t) + P'(\eta_\tau)(\tau - t) \wedge Q(\tau) = Q(t) + Q'(\xi_\tau)(\tau - t) \,]$$

Zatem równość (1) jest równoważna następującej:

$$\int_t^{t+\Delta t} [P(t) + P'(\eta_\tau)(\tau - t)]\, d\tau - \int_t^{t+\Delta t} [Q(t) + Q'(\xi_\tau)(\tau - t)]\, d\tau = S(t+\Delta t) - S(t)$$

stąd:

$$P(t)\,\Delta t - Q(t)\,\Delta t + $$
$$+ \int_t^{t+\Delta t} P'(\eta_\tau)\,(\tau - t)d\tau -$$
$$- \int_t^{t+\Delta t} Q'(\xi_\tau)\,(\tau - t)d\tau =$$
$$= S(t + \Delta t) - S(t)$$

stąd:

$$|P(t)\,\Delta t - Q(t)\,\Delta t - [S(t+\Delta t) - S(t)]| \leq$$
$$\leq \int_t^{t+\Delta t} [|P'(\eta_\tau)| + |Q'(\xi_\tau)|]\,(\tau - t)\,d\tau <$$
$$< 2M \int_t^{t+\Delta t} (\tau - t)d\tau =$$
$$= 2M\left[\frac{1}{2}(\tau - t)^2\right]_{\tau = t}^{\tau = t+\Delta t} = M(\Delta t)^2$$

Dzieląc obie strony ostatniej nierówności przez Δt, otrzymujemy:

$$\left| P(t) - Q(t) - \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} \right| < M\Delta t$$

Ponieważ $\lim\limits_{\Delta t \to 0} M\Delta t = 0$

oraz

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} = S'(t) = \frac{dS}{dt}(t)$$

zatem

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left(P(t) - Q(t) - \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} \right) =$$
$$= P(t) - Q(t) - \frac{dS}{dt}(t) = 0$$

Stąd:

$$P(t) - Q(t) = \frac{dS}{dt}(t) \qquad \text{dla } t > 0 \qquad (2)$$

Dla modelu liniowego zlewni przyjmujemy następujące założenie:

$$kQ = S \qquad (3)$$

gdzie k — stała retencji dla danej zlewni.

Opierając się na powyższym założeniu ze wzoru (2), otrzymujemy:

$$P(t) - Q(t) = k\frac{dQ}{dt}(t)$$

stąd

$$\frac{dQ}{dt}(t) = -\frac{1}{k}Q(t) + \frac{1}{k}P(t) \qquad \text{dla } t > 0 \qquad (4)$$

2. Zależność między chwilowym hydrogramem jednostkowym IUH [oznaczmy jego rzędną w chwili t przez $U(0,t)$] oraz T —hydrogramem jednostkowym TUH [oznaczmy jego rzędną w chwili t przez $U(T,t)$] jest następująca:

$$U(0,t) = \lim_{T \to 0} U(T,t) \qquad \text{dla każdego } t > 0$$

Zatem IUH jest hydrogramem odpływu, który jest reakcją na chwilowy opad (w chwili $t = 0$) o wysokości $h = 1$ cm, tzn. $P(t) = \delta_0(t)$, gdzie $\delta_0(t)$ oznacza dystrybucję Diraca [$< \delta_0, \varphi > = \phi(0)$ w szczególności $< \delta_0, 1 > = 1$].

Rozważmy liniowy model Nasha zbudowany w postaci kaskady n zbiorników liniowych.

Niech $Q_i(t)$ oznacza odpływ z i-tego zbiornika spowodowany chwilowym opadem $P(t)$ w chwili $t = 0$ o wysokości $h = 1$ cm, tzn. $P(t) = \delta_0(t)$.

Niech L oznacza operator Laplace'a tzn.:

$$L[f](s) = \int_0^{+\infty} f(\tau)\,e^{-s\tau}\,d\tau$$

dla zespolonej liczby s i spełniającej pewne warunki funkcji f (Leitner 1990).

LEMAT.

$$q_i(s) = L\,[Q_i\,(t)]\,(s) = \frac{1}{(ks+1)^i} \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, n \tag{5}$$

W szczególności

$$q_n(s) = L\,[Q_n\,(t)]\,(s) = \frac{1}{(ks+1)^n}$$

Dowód wzoru (5) przeprowadzimy metodą indukcji. Skorzystamy z następującej własności operatora Laplace'a L:

$$L[f'(t)]\,(s) = L\left[\frac{df}{dt}(t)\right](s) = = sL[f(t)]\,(s) - f(0) \tag{6}$$

1° Dowód dla pierwszego zbiornika, tzn. $i = 1$.

Ponieważ opad $P_1(t)$ jest chwilowy o wysokości 1 cm w chwili $t = 0$, zatem $P_1(t) = \delta_0(t)$ oraz $< P_1, 1 > = < \delta_0, 1 > = 1$.

Gdy $P(t) = P_1(t) = \delta_0(t)$, to równanie (4) przyjmuje następującą postać:

$$\frac{dQ_1}{dt}\,(t) + \frac{1}{k}\,Q_1\,(t) = \frac{1}{k}\,\delta_0\,(t) \tag{7}$$

W celu rozwiązania równania (7) rozwiązujemy najpierw równanie różniczkowe: $\frac{dX}{dt}\,(t) + \frac{1}{k}\,X(t) = 0$ z warunkiem początkowym $X(0) = \frac{1}{k}$. Łatwo sprawdzić, że szukane rozwiązanie jest funkcją określoną wzorem: $X(t) = \frac{1}{k}\,e^{-\frac{1}{k}t}$, $\quad t > 0$.

Wiedząc, że pochodną dystrybucyjną funkcji Heaviside'a $H(t)$ jest dystrybucja Diraca $[H'(t) = \delta_0]$ łatwo sprawdzić, że funkcja:

$$Q_1(t) = H(t)\,X(t) = \frac{1}{k}H(t)\,e^{-\frac{1}{k}t} \qquad t > 0$$

jest rozwiązaniem równania (7) (Schwartz 1984). $H(t)$ oznacza funkcję Heaviside'a.

Zauważmy, że

$$\lim_{t\to 0+} \frac{1}{k}\,H(t)\,e^{-\frac{1}{k}t} = \frac{1}{k}$$

Zatem możemy przyjąć, że $Q_1(0) = \frac{1}{k}$.

Łatwo sprawdzić, że

$$L[Q_1]\,(s) = L\left[\frac{1}{k}\,H(t)\,e^{-\frac{1}{k}t}\right] = $$

$$= \frac{1}{k}\,\frac{1}{s + \frac{1}{k}} = \frac{1}{ks+1}$$

Zatem wzór (5) z tezy lematu jest prawdziwy dla $i = 1$.

2° Załóżmy, że $0 < i < n$, i jest liczbą naturalną.

Wykażemy, że jeśli

$$q_{i-1}\,(s) = \frac{1}{(ks+1)^{i-1}}$$

to

$$q_i\,(s) = \frac{1}{(ks+1)^i} \tag{8}$$

Dowód implikacji (8).

Załóżmy, że

$$q_{i-1}\,(s) = \frac{1}{(ks+1)^{i-1}} \tag{9}$$

Z konstrukcji liniowego modelu Nasha wynika, że:

$$\frac{dQ_i}{dt}\,(t) = -\frac{1}{k}\,Q_i\,(t) + \frac{1}{k}\,Q_{i-1}$$

ponieważ $P_i\,(t) = Q_{i-1}$ (t) oraz $Q_i\,(0) = 0$.

Stąd:

$$L\,[Q_{i-1}] = kL\left[\frac{dQ_i}{dt}\right] + L[Q_i]$$

Zatem posługując się wzorem (6), otrzymujemy:

$$q_{i-1}\,(s) = ksq_i\,(s) - kQ_i\,(0) + q_i\,(s)$$

stąd

$$q_i\,(s) = \frac{q_{i-1}\,(s)}{(ks+1)}$$

Korzystając teraz z założenia (9), otrzymujemy:

$$q_i\,(s) = \frac{\dfrac{1}{(ks+1)^{i-1}}}{(ks+1)} = \frac{1}{(ks+1)^i}$$

Zatem implikacja (8) jest prawdziwa.

Z 1° i 2° wynika prawdziwość tezy Lematu.

3. Ponieważ $L\,[\delta_0]\,(s) = 1$, zatem z punktu **2** naszych rozważań wynika, że transmitancja operatowa (funkcja przejścia) dla rozważanego modelu Nasha wyraża się wzorem:

$$H(s) = \frac{L\,[Q_n]\,(s)}{L\,[\delta_0]\,(s)} = \frac{1}{(ks+1)^n}$$

Stąd:

$$U\,(0,t) = h\,(t) = L^{-1}\,[H\,(s)]\,(t) =$$

$$= L^{-1}\left[\frac{1}{(ks+1)^n}\right] = \frac{1}{k^n}\,L^{-1}\left[\frac{1}{(s+\frac{1}{k})^n}\right] =$$

$$= \frac{1}{k^n}\,\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}\,e^{-\frac{t}{k}} = \frac{1}{k\Gamma(n)}\left(\frac{t}{k}\right)^{n-1} e^{-\frac{t}{k}}$$

dla $t > 0$

Skorzystaliśmy z odpowiednich własności transformaty Laplace'a oraz z tablic podanych w literaturze (Leitner 1990).

Literatura

KORDAS B. 1974: *Hydrodynamika zlewni.* Praca zbiorowa. "Matematyczne modele zlewni". PAN Ossolineum.

LEITNER R. 1990: *Zarys matematyki wyższej.* WNT, Warszawa.

NASH J.E. 1958. *Determining runoff from rainfall.* Inst. Civ. Engin. Proc. 10.

SCHWARTZ L. 1984: *Metody matematyczne w fizyce.* PWN, Warszawa.

Summary

Operator transmittance for linear watershed Nash model in the form of reservoir cascade. The paper discusses the attempt of more strick then usually mathematical proof of formulae used in conceptual rainfall — runoff models.

Authors' address
J. Krupa, S. Ignar
Warsaw Agricultural University
ul. Nowoursynowska 166
02–766 Warszawa