

Wiesław BUCZKOWSKI, Stanisław CZAJKA, Jacek MAJDRAWSKI,  
Henryk MIKOŁAJCZAK\*

## Praca statyczna rurowciągów układanych w gruncie

### Abstract

**Pipelines in subsoil work as beams on elastic foundation.** If on a pipeline route appears a basin with weak organic soil it is possible that permissible parameters securing safe work of the pipeline will be exceeded, particularly at considerable length of the basin. In such cases the pipeline should be additionally supported. This paper presents analysis of this problem carried out on basis of numerical calculations.

*Key words: pipelines, elastic foundation, numerical calculations*

### Wstęp

Gaz, ropę czy wodę przesyła się najczęściej rurowciągami stalowymi układanymi w gruncie. Takie rurowciągi przy obliczeniach statycznych traktowane są jak belki pracujące na podłożu sprężystym. Gdyby ośrodek gruntowy na całej długości rurowciągu stanowił materiał jednorodny, obliczenia statyczno-wytrzymałościowe ograniczyłyby się do sprawdzenia, czy ciśnienie wewnątrz rurowciągu, jak również obciążenie gruntem nie spowodują przekroczenia naprężeń dopuszczalnych w jego ścianach. W praktyce ośro-

dek gruntowy zmienia się dość znacznie, często na trasie układania rurowciągu pojawiają się oczka o słabych gruntach bądź rurowciągiem należy pokonać istniejącą w terenie dolinę. Przy pokonywaniu takich miejsc niekiedy konieczne będzie zastosowanie stałych podpór. W takich przypadkach rurowciąg będzie stanowił belkę spoczywającą na podłożu sprężystym o zmiennych odcinkowo modułach podatności podłoża, często punktowo podpartą na stałych podporach.

Aby zapewnić bezpieczną pracę rurowciągów, muszą być spełnione określone wymagania, które najczęściej podawane są w postaci:

- maksymalne ugięcie rurowciągu w żadnym miejscu nie może przekraczać z góry określonej dopuszczalnej strzałki ugięcia,
- promień krzywizny pracującego rurowciągu nie może być mniejszy od wartości dopuszczalnej,
- naprężenia w ścianach rurowciągu przy uwzględnieniu wszystkich działających nań obciążeń i mogących wystąpić schematów statycznych nie mogą

---

\*Akademia Rolnicza w Poznaniu, ul. Mazowiecka 26.

być większe od naprężeń dopuszczalnych uzależnionych od rodzaju materiału, z którego wykonany będzie rurociąg.

## Uwagi dotyczące metod obliczeniowych

Spełnienie powyższych wymagań pociąga za sobą konieczność przeprowadzenia odpowiednich obliczeń statycznych. Obliczanie belek pracujących na podłożu sprężystym (Winklera) metodami analitycznymi jest bardzo żmudne i pracochłonne, szczególnie w przypadkach obejmujących nieciągłe warunki brzegowe. Przy zmianie jednego z wielu uwzględnianych w obliczeniach parametrów (np. wartości stałej podłoża – łącznie z zerem, sztywności belki, obciążenia itp.) obliczenia należy wykonać w całości ponownie. Dla niektórych schematów mogących wystąpić w praktyce przy obliczeniach analitycznych powstałyby trudności prawie nie do pokonania. W związku z powyższym wydaje się, że do praktycznych zastosowań powinny być wykorzystywane programy komputerowe bazujące na jednej z metod numerycznych. Poniżej przedstawione zostaną rozwiązania uzyskane przy użyciu specjalnie zbudowanego programu pod nazwą BELKAS, przy czym w celu stwierdzenia poprawności przedstawionych wyników, niektóre przypadki zostały porównane z wynikami obliczeń analitycznych.

## Program BELKAS

Jako metodę rozwiązania problemu, użytą w programie BELKAS, autorzy zastosowali wariacyjne ujęcie metody róż-

nic skończonych. Metoda ta bazuje na założeniu, że w odkształcanym elemencie, będącym w stanie równowagi, nagromadzona energia sprężysta osiąga minimum. Funkcjonał energii odkształcenia sprężystego dla belki na podłożu sprężystym typu Winklera dany jest zależnością:

$$V = \frac{EJ}{2} \int_L w_{xx}^2 dL - \int_L q w dL + \frac{1}{2} \int_L C b w^2 dL \quad (1)$$

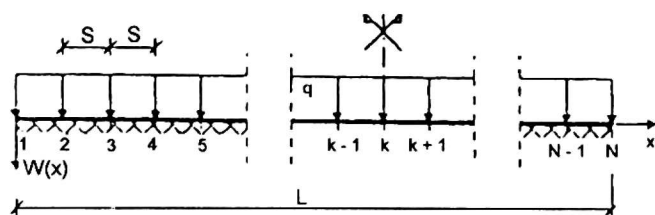
gdzie:

$EJ$  – sztywność belki na zginanie,  
 $q$  – obciążenie zewnętrzne belki,  
 $b$  – szerokość belki,  
 $w$  – ugięcie belki,  
 $L$  – długość belki,

$$w_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$C$  – moduł podatności podłoża.

Istota metody polega na wyrażeniu funkcjonału energii sprężystej (1) poprzez związki różnicowe i wypisaniu równań według zasad rachunku wariacyjnego. W tym celu obliczaną belkę dzielimy myślowo na odcinki długości  $s$  (rys. 1).



Rys. 1. Schemat podziału belki przyjęty w obliczeniach numerycznych

Długość odcinka  $s$  uzależniona jest od przyjętej liczby węzłów  $N$  ( $s = \frac{L}{N-1}$ ).

Druga pochodna  $w_{xx}$  w punkcie  $k$  z funkcji ugięcia  $w(x)$  wyrażona za pomocą ilorazu różnicowego przedstawia się jak niżej:

$$(w_{xx})_k = \frac{w_{k-1} - 2w_k + w_{k+1}}{s^2} \quad (2)$$

Zastępując w funkcjonale (1) pochodne w poszczególnych punktach podziału belki odpowiednimi ilorazami różnicowymi, a całkowanie po długości belki sumowaniem po elementarnych podobszarach oraz korzystając z warunku, że dla elementu będącego w stanie równowagi energia nagromadzona w nim osiąga minimum, a więc

$$\frac{\partial V}{\partial w^k} = 0,$$

$$\text{dla każdego } k \ (k=1, 2, \dots, N) \quad (3)$$

otrzymuje się układ liniowych równań algebraicznych na wyznaczenie ugięć we wszystkich węzłach przyjętego podziału belki.

Na podstawie tych ugięć można wyznaczyć momenty zginające i promienie krzywizny w dowolnym punkcie belki, korzystając ze znanych ze statyki zależności.

$$\begin{aligned} (M_x)_k &= -EJ_x (w_{xx})_k = \\ &= -EJ_x \frac{w_{k-1} - 2w_k + w_{k+1}}{s^2} \end{aligned}$$

$$(w_{xx})_k = \left( \frac{1}{\rho} \right)_k = \frac{M_k}{EJ_x} \quad (4)$$

$$(\rho)_k = \left| \frac{EJ_x}{M_k} \right|$$

gdzie:  $\rho$  – promień krzywizny.

Program BELKAS został tak skonstruowany, że jako dane należy podać:

- długość belki  $L$  [m],
- liczbę węzłów przyjętego podziału belki  $N$ ,
- moduł sprężystości materiału belki  $E$  [kN/m<sup>2</sup>],
- moment bezwładności przekroju  $J_x$  [m<sup>4</sup>],
- szerokość belki  $b$  [m],
- obciążenie belki  $q$  [kN/m],
- moduły podatności podłoża  $C$  [kN/m<sup>3</sup>] na poszczególnych odcinkach belki,
- numery węzłów, w których występują podpory stałe.

Program umożliwia obliczanie belek o dowolnej długości. Przyjęta do obliczeń długość  $L$  może być jedynie ograniczona liczbą węzłów podziału, gdyż to rzutuje na otrzymywaną wielkość układu równań do wyznaczenia przemieszczeń.

W obliczeniach prezentowanych w artykule przyjmowano długość  $L$  kilkakrotnie większą od "niecki" ze słabymi gruntami. Takie przyjęcie gwarantowało, że zaburzenia wywołane "niecką" nie wpływały na wielkości statyczne w dalszych partiach belki oraz warunki brzegowe na końcach belki nie miały istotnego wpływu na wielkości statyczne występujące w belce w rejonie "niecki".

Po wprowadzeniu danych następuje automatyczna generacja układu równań

oraz dokonane zostaje jego rozwiązanie. W wyniku obliczeń otrzymywane są wielkości ugięć, momentów zginających i promieni krzywizny we wszystkich węzłach przyjętego podziału belki. Istnieje również możliwość przy wykorzystaniu plotera sporządzenia wykresów powyższych wielkości na dowolnym odcinku belki.

## Przykłady liczbowe

Obliczenia przykładowe wykonano dla rurociągu gazowego o średnicy zewnętrznej  $D = 1422$  mm, o grubości ścianki  $\delta = 19,2$  mm ułożonego w gruncie i przykrytego warstwą ziemi o wysokości 2 m. Obliczenia prowadzono pod kątem określenia maksymalnej długości niecki na trasie rurociągu, na której rura może nie współpracować z podłożem (tzn.  $C = 0$ ). Muszą być przy tym spełnione poniższe warunki:

- maksymalne ugięcie rurociągu nie może być większe niż  $f_{dop} = 10$  cm,
- promień krzywizny nie może być mniejszy niż  $\rho_{min} = 1400$  m,
- naprężenia maksymalne w ścianach rurociągu nie mogą przekroczyć wielkości dopuszczalnej:

$$f_d = \frac{R_e}{\gamma_s} = \frac{480}{1,25} = 384 \text{ MPa} \quad (5)$$

gdzie:

$R_e$  – granica plastyczności stali,  
 $\gamma_s$  – współczynnik materiałowy.

Biorąc powyższe pod uwagę oraz warunki pracy rurociągu wyznaczono maksymalny moment zginający, jaki może

wystąpić w dowolnym przekroju rurociągu.

W przekroju poprzecznym rury występują naprężenia normalne  $\sigma_1$ , powstające od zginania momentem  $M$ , oraz naprężenia normalne  $\sigma_2$ , wywoływane ciśnieniem  $p_0$  panującym wewnątrz rury. Naprężenia te są do siebie prostopadłe, tzn.  $\sigma_1 \perp \sigma_2$ .

**Uwaga.** Przy wyznaczaniu naprężeń  $\sigma_2$  pominięto parcie gruntu działające na rurę z zewnątrz, a więc wyznaczono w ten sposób maksymalne naprężenia  $\sigma_2$ , jakie mogą powstać w rurociągu:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{M_{max}}{W_x} \\ \sigma_2 &= \frac{p_0 R}{\sigma} \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie:

$M_{max}$  – maksymalny moment zginający,  
 $W_x$  – wskaźnik wytrzymałości przekroju rury,  
 $p_0$  – ciśnienie obliczeniowe wewnątrz rurociągu,  
 $R$  – promień przekroju rurociągu mierzony do środka grubości ścian,  
 $\delta$  – grubość ścian rurociągu.

Naprężenia wypadkowe:

$$\sigma_{wyp} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \leq f_d \quad (7)$$

gdzie:  $f_d$  – wytrzymałość obliczeniowa stali.

Z powyższych zależności otrzymano wzór na określenie maksymalnego momentu zginającego w rurociągu:

$$M_{\max} = W_x \sqrt{f_d^2 - \frac{p_0^2 R^2}{\delta^2}} \quad (8)$$

Do obliczeń przykładowych przyjęto dane:

$$L = 300 \text{ m}, s = 1 \text{ m}, E = 2,06 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2,$$

$$J_x = 0,02081633 \text{ m}^4, b = 1,422 \text{ m},$$

$$q = 72,14 \text{ kN/m}.$$

Dla warunków zadania:

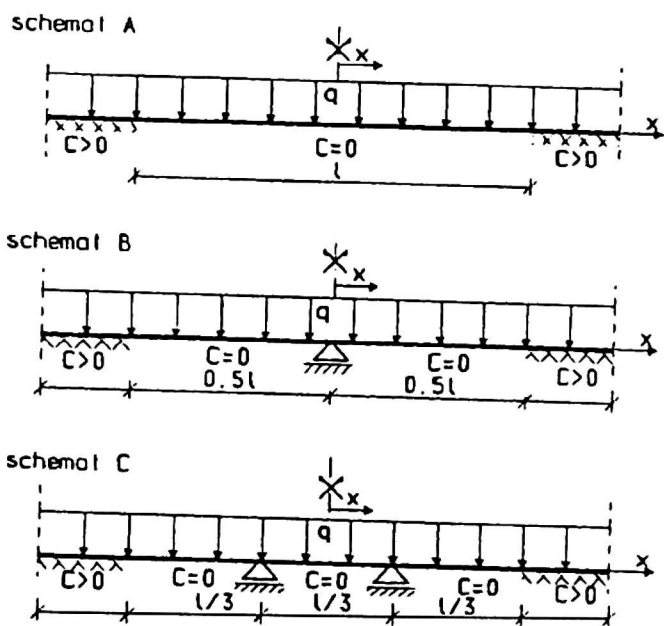
$$W_x = 2,928 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$$

$$p_0 = 1,2 \cdot 8,4 = 10,08 \text{ MPa}$$

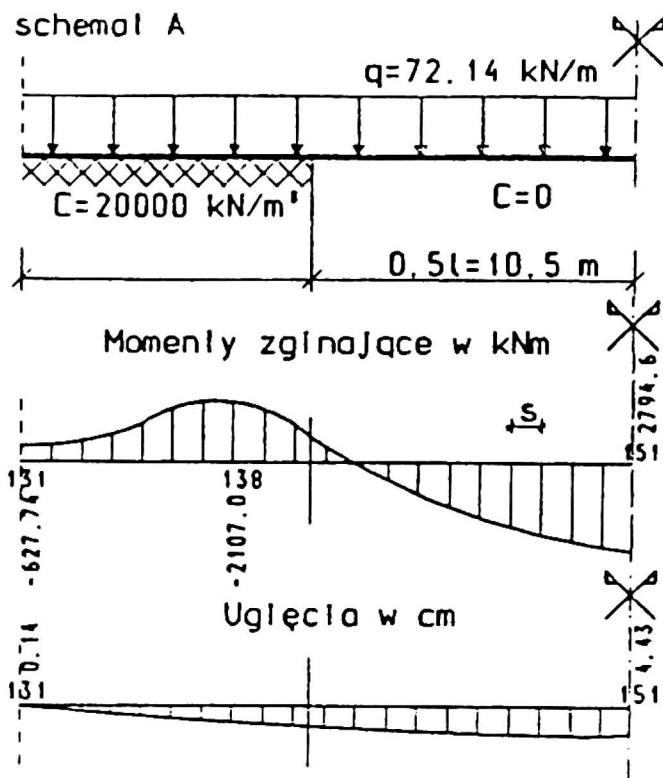
$$M_{\max} = 2,928 \cdot 10^{-2} \times$$

$$\times \sqrt{384^2 - \frac{10,08^2 \cdot 0,7014^2}{0,0192^2}} =$$

$$= 3,1886 \text{ MNm} = 3188,6 \text{ kNm}$$



Rys. 2. Schematy statyczne belek objętych analizą w niniejszym artykule



Rys. 3. Przykładowe rozwiązania dla belki pokazanej na rysunku 2 – schemat A; 131, 138, 151 – numery węzłów przyjętego w obliczeniach podziału belki

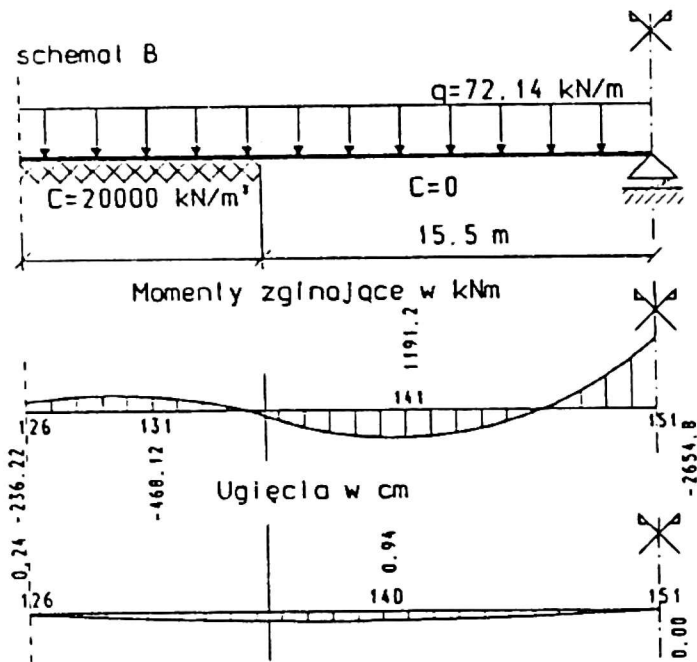
Obliczenia wykonano dla szeregu przypadków pokazanych na rysunku 2.

Przypadki te różniły się długością niecki ze słabymi gruntami, dla której przyjęto  $C = 0$  oraz rozmieszczeniem podpór stałych. Poza obszarem niecki rurociąg spoczywał na podłożu gruntowym:

- w pierwszym przypadku o module podatności  $C = 20\,000 \text{ kN/m}^3$  (jak dla gruntu średnio zwartego).
- w drugim przypadku  $C = 50\,000 \text{ kN/m}^3$  (jak dla gruntu zwartego).

Przykładowe rozwiązania w postaci wykresów ugięć i momentów zginających pokazano na rysunkach 3, 4 i 5.

Na podstawie otrzymanych rozwiązań sporządzono wykresy obrazujące przebieg zmian momentów zginających, promieni krzywizny i ugięć w zależności od



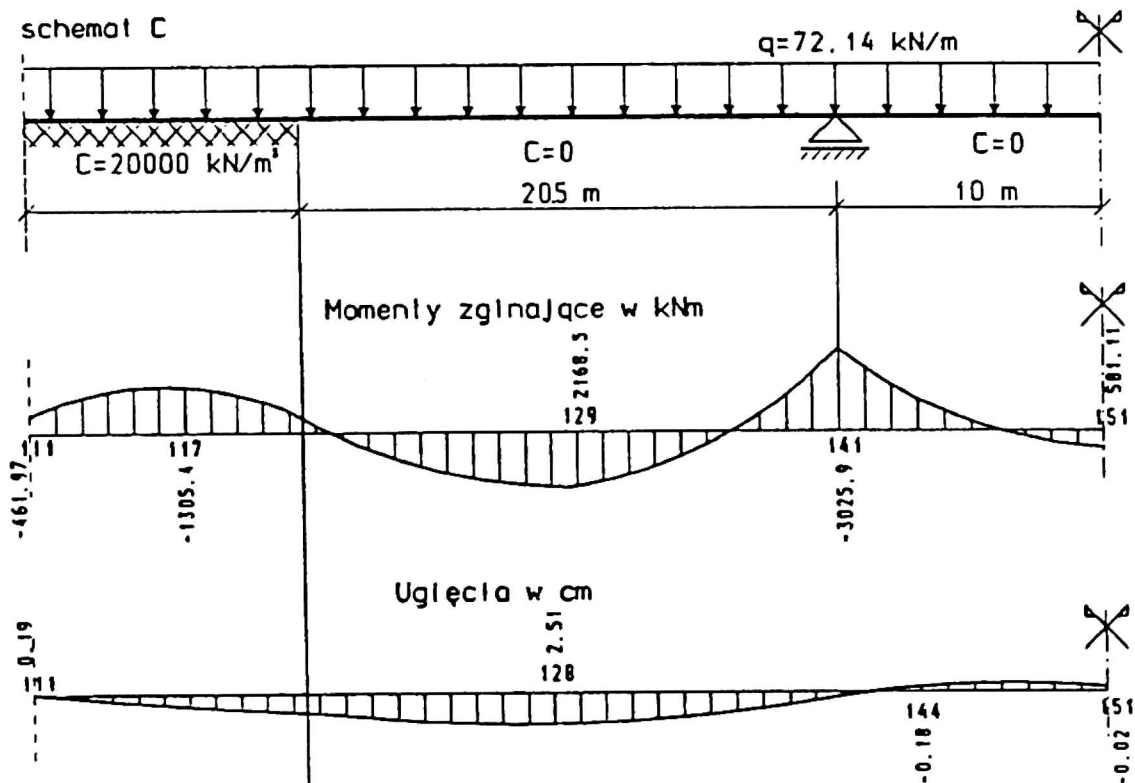
Rys. 4. Przykładowe rozwiązania dla belki pokazanej na rysunku 2 – schemat B

długości niecki. Pokazano je na rysunkach 6–8.

### Analiza otrzymanych wyników

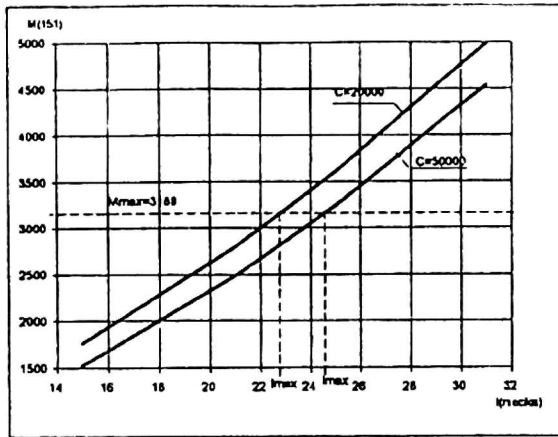
Z analizy uzyskanych rozwiązań wynikają poniższe spostrzeżenia:

- Dla belki (rurociągu) pokazanej na schemacie A (rys. 2) maksymalna długość odcinka  $l$  (długość niecki), na którym belka (rura) może nie współpracować z podłożem ( $C = 0$ ), wynosi:
  - $l \leq 22,5$  m przy założeniu, że pozostałe fragmenty belki spoczywają na podłożu o module  $C = 20\,000$  kN/m<sup>3</sup>,
  - $l \leq 24,5$  m przy założeniu jw., lecz dla  $C = 50\,000$  kN/m<sup>3</sup>.
- Dla belki pokazanej na schemacie B (rys. 2) maksymalna długość odcinka  $l$ , na którym belka może nie współpracować z podłożem ( $C = 0$ ), wynosi:
  - $l \leq 34$  m przy założeniu, że pozostałe fragmenty belki spoczywają na podłożu o module  $C = 20\,000$  kN/m<sup>3</sup>,
  - $l \leq 36$  m przy założeniu jw., lecz dla  $C = 50\,000$  kN/m<sup>3</sup>.
- Dla belki pokazanej na schemacie C (rys. 2) maksymalna długość odcinka

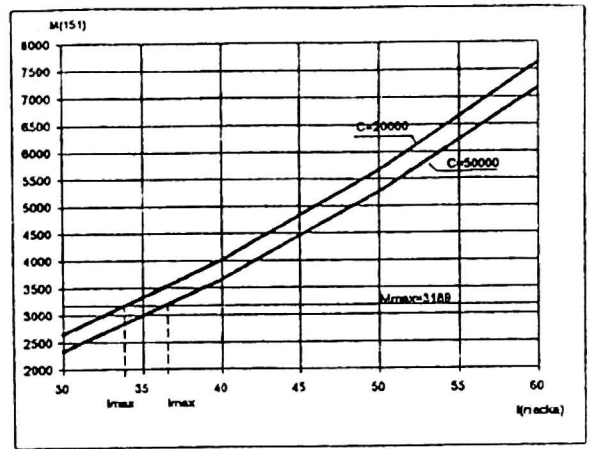


Rys. 5. Przykładowe rozwiązania dla belki pokazanej na rysunku 2 – schemat C

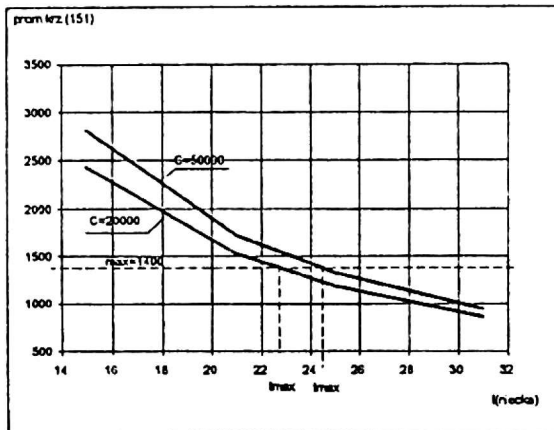
M



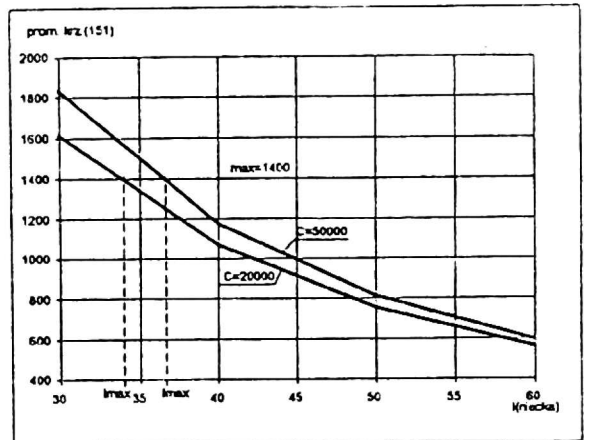
M



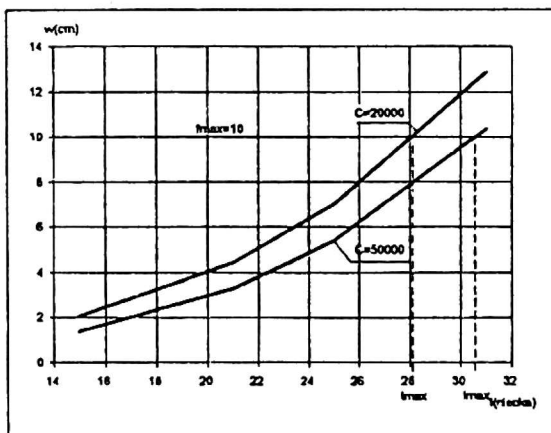
ρ



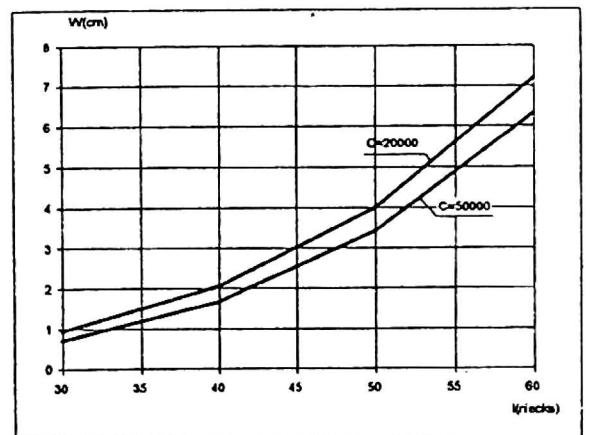
ρ



W



W



**Rys. 6.** Przebieg zmienności:  $M$  – momentów zginających,  $\rho$  – promieni krzywizny,  $w$  – ugięcie; dla belki pokazanej na rysunku 2 – schemat A – w zależności od długości odcinka  $l$  (niecki, dla której  $C = 0$ )

**Rys. 7.** Przebieg zmienności:  $M$  – momentów zginających,  $\rho$  – promieni krzywizny,  $w$  – ugięcie; dla belki pokazanej na rysunku 2 – schemat B – w zależności od długości odcinka  $l$  (niecki, dla której  $C = 0$ )

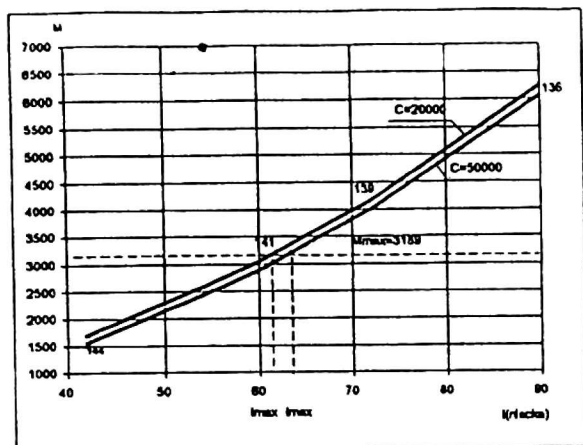
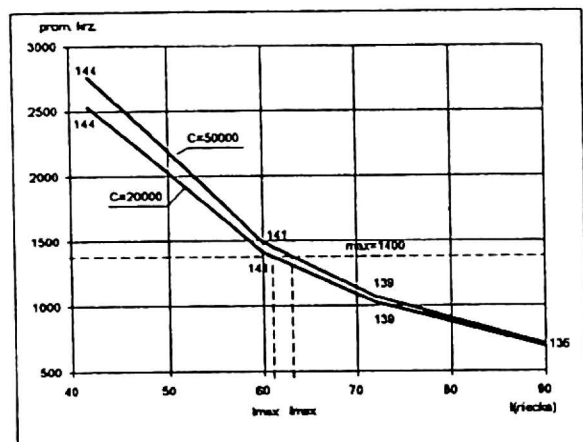
$l$ , na którym belka może nie współpracować z podłożem ( $C = 0$ ), wynosi:

$l \leq 61$  m przy założeniu, że pozostałe fragmenty belki spoczywają na podłożu o module  $C = 20\,000 \text{ kN/m}^3$ ,

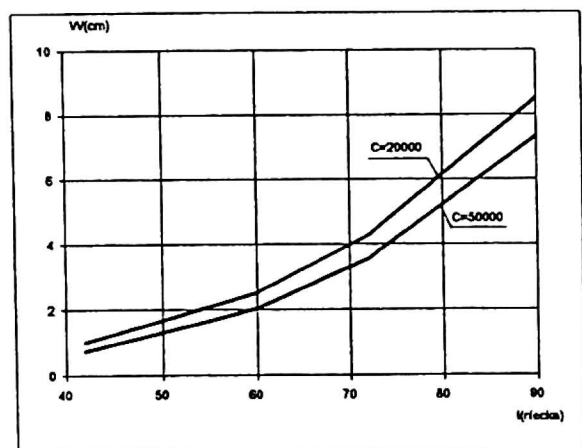
$l \leq 63$  m przy założeniu jw., lecz dla  $C = 50\,000 \text{ kN/m}^3$ .

We wszystkich rozważanych przypadkach o długości odcinka  $l$  zdecydu-

M

 $\rho$ 

W



Rys. 8. Przebieg zmienności:  $M$  – momentów zginających,  $\rho$  – promieni krzywizny,  $w$  – ugięcie; dla belki pokazanej na rysunku 2 – schemat C – w zależności od długości odcinka  $l$  (niecki, dla której  $C = 0$ )

wała dopuszczalna wielkość promienia krzywizny.

## Podsumowanie

W celu zapewnienia bezpieczeństwa pracy rurociągów układanych w gruncie muszą być wykonane niezbędne obliczenia statyczne i wytrzymałościowe. Rurociągi takie traktować należy jak belki pracujące na podłożu sprężystym. Obliczenia analityczne dla schematów takich jak przedstawiono w artykule są bardzo kłopotliwe w zastosowaniu. Praktyczne wyniki można uzyskać jedynie stosując metody numeryczne i korzystając z odpowiedniego programu komputerowego. Wszystkie przedstawione w pracy rozwiązania uzyskano przy wykorzystaniu specjalnie do tego celu zbudowanego programu BELKAS. Należy podkreślić, że wyniki uzyskane z programu zostały dla kilku przypadków porównane z wynikami obliczeń analitycznych według metod podanych przez Nowackiego (1960), i Beyera (1956). Uzyskano pełną zgodność rozwiązań.

## Literatura

- NOWACKI W. 1960: *Mechanika budowli*. T. II. PWN, Warszawa.  
 BEYER K. 1956: *Die Statik im Stahlbetonbau*. Springer Verlag, Berlin.