

ANALIZA KRZYWYCH BÉZIERA STOSOWANYCH DO MODELOWANIA NIEREGULARNYCH KSZTAŁTÓW OBIEKTÓW BIOLOGICZNYCH

L. Mieszkalski

Katedra Inżynierii Rolniczej, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski
ul. Oczapowskiego 11, 10-738 Olsztyn

Streszczenie. W pracy dokonano analizy krzywych Béziera wypukłych, z punktem przecięcia oraz ostrym wierzchołkiem. Krzywe o takich kształtach są najczęściej stosowane podczas modelowania obiektów o nieregularnych kształtach. Podano równania parametryczne krzywych Béziera. Przedstawiono wykresy proponowanych rodzajów krzywych. Jako materiał przykładowy zaprezentowano kształty przekrojów owocu gruszki odmiany „Konferencja” oraz nasiona gryki odmiany Emka w reprezentacji krzywych Béziera.

Słowa kluczowe: Krzywe Béziera, równania parametryczne, analiza kształtów, przykłady.

WSTĘP I CEL PRACY

W projektowaniu zespołów i przestrzeni roboczych maszyn przetwarzających materiały roślinne trzeba uwzględnić ich kształt i wymiary. Często podczas modelowania matematycznego procesów roboczych nieregularną bryłę ziarna lub innego materiału aproksymuje się do kuli, elipsoidy i innych brył geometrycznych. Taka reprezentacja kształtów brył rzeczywistych jest dużym uproszczeniem. Materiały i surowce pochodzenia roślinnego pod względem wymiarów i kształtów stanowią zbiory nie powtarzających się elementów. Liczby przyporządkowane wymiarom określonego surowca umożliwiają odwzorowanie relacji zachodzących między poszczególnymi składnikami surowca uczestniczącymi w różnych procesach. Aby odwzorowanie relacji jakie występują w procesach przetwarzania surowców było dokładniejsze, należy poszukiwać metod pozwalających lepiej niż dotychczas opisywać kształty składników surowców.

Znanych jest wiele prac na temat rekonstrukcji kształtów za pomocą filmowania, skanowania, rzutów cieni [3,4,5]. Metody te pozwalają wyznaczyć wymiary ziarna, które są podstawą matematycznego opisu kształtu. Próbę opisu

bryły ziarna zbóż zawierała praca Mieszkałskiego [6], w której modelowanie bryły polegało na matematycznym opisie kształtu poprzecznych przekrojów ziarna. Do opisu konturu przekroju stosowano konchoidę okręgu. Lepszymi krzywymi do opisu kształtów o bardziej uniwersalnym charakterze mogą być krzywe w reprezentacji Béziera [1,2].

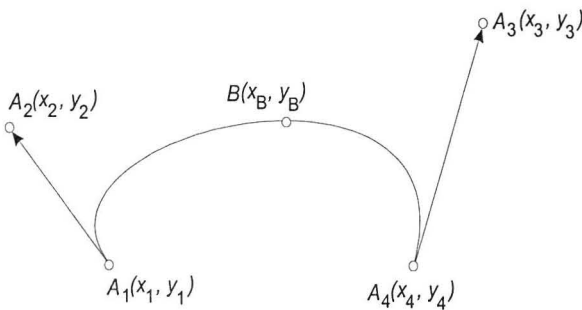
Celem pracy jest opis wybranych kształtów krzywych Béziera, mających zastosowanie w modelowaniu obiektów o nieregularnych kształtach.

REPREZENTACJA KRZYWYCH BÉZIERA

Segment kubiczny krzywej Béziera jest opisany przez cztery punkty A_1, A_2, A_3, A_4 (Rys. 1). Punkty A_1, A_4 są węzłami, a punkty A_2, A_3 punktami kontrolnymi. Punkt B jest dany i przez niego przechodzi modelowana krzywa. Odwzorowanie opisujące segment kubiczny w reprezentacji Béziera, ze względów użytkowych, wyraża się za pomocą wielomianów trzeciego stopnia w zapisie parametrycznym:

$$\begin{aligned} x(t) &= (1-t)^2 x_1 + 3t(1-t)^2 x_2 + 3t^2(1-t) x_3 + t^3 x_4 \\ y(t) &= (1-t)^2 y_1 + 3t(1-t)^2 y_2 + 3t^2(1-t) y_3 + t^3 y_4 \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie: x_1, y_1, x_4, y_4 – współrzędne punktów węzłowych, x_2, y_2, x_3, y_3 – współrzędne punktów kontrolnych, t – parametr, $0 \leq t \leq 1$.



Rys. 1. Segment kubiczny krzywej Béziera.

Fig. 1. Cubic segment of Bézier curves.

Zmiana współrzędnych pojedynczego punktu kontrolnego lub węzła powoduje zmianę kształtu krzywej Béziera. Krzywa Béziera leży całkowicie wewnątrz obszaru utworzonego przez punkty segmentu kubicznego. W modelowaniu brył o nieregularnych kształtach stosuje się wiele krzywych Béziera, które są

sklejane w punktach węzłowych. Dla ułatwienia kształtowania lokalnego zniekształcenia w modelowanej bryle należy dokonać analizy kilku wybranych pod względem praktycznym przypadków kształtu krzywej Béziera w segmencie kubicznym. Do najczęściej stosowanych kształtów krzywej można zaliczyć krzywe Béziera wypukłe, z punktem przegięcia oraz ostrym wierzchołkiem.

W celu wyznaczenia krzywej Béziera wprowadza się kilka założeń umożliwiających wykreślenie modelowanej krzywej. W pierwszej kolejności ustala się współrzędne x_B, y_B punktu B , przez który będzie przechodzić krzywa Béziera. Założono, że analizowane krzywe będą przechodzić przez dany punkt np. $B(1, 2)$. Punkt B będzie zarazem maksimum krzywej. W następnym kroku określa się współrzędne x_1, y_1, x_4, y_4 punktów węzłowych A_1, A_4 .

W celu wyznaczenia z równań (1) współrzędnych punktów kontrolnych wyznacza się wartość parametru t , dla którego $y(t)$ osiąga maksimum. Po zróżniczkowaniu funkcji $y(t)$

$$\frac{d}{dt} y(t) = -3y_1(1-t)^2 + 3y_2(1-t)^2 - 6y_2t(1-t) + 6y_3t(1-t) - 3y_3t^2 + 3y_4t^2 \quad (2)$$

wyznacza się parametr t :

$$t = \frac{1}{2(-3y_1 + 9y_2 - 9y_3 + 3y_4)} \left[-6y_1 + 12y_2 - 6y_3 - 6\sqrt{-y_1y_3 - y_2^2 - y_2y_3 + y_3^2 + y_1y_4 - y_2y_4} \right] \quad (3)$$

Korzystając z parametrycznych równań krzywej Béziera (1) oraz równania (3) układa się trzy równania, z których oblicza się współrzędne x_2, y_2 punktu kontrolnego A_2 :

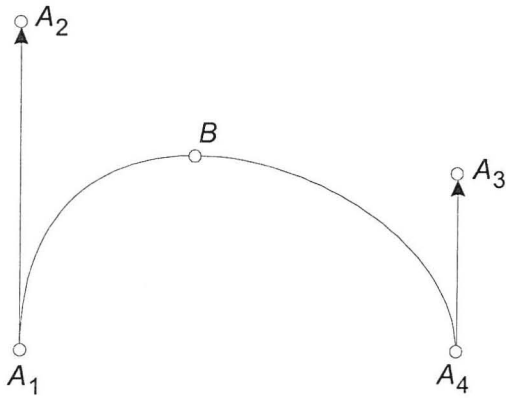
$$\begin{aligned} 0 &= (1-t)^2 x_1 + 3t(1-t)^2 x_2 + 3t^2(1-t) x_3 + t^3 x_4 - x_B \\ 0 &= (1-t)^2 y_1 + 3t(1-t)^2 y_2 + 3t^2(1-t) y_3 + t^3 y_4 - y_B \end{aligned} \quad (4)$$

$$t = \frac{1}{2(-3y_1 + 9y_2 - 9y_3 + 3y_4)} \left[-6y_1 + 12y_2 - 6y_3 - 6\sqrt{-y_1y_3 - y_2^2 - y_2y_3 + y_3^2 + y_1y_4 - y_2y_4} \right]$$

WYPUKŁE KRZYWE BÉZIERA

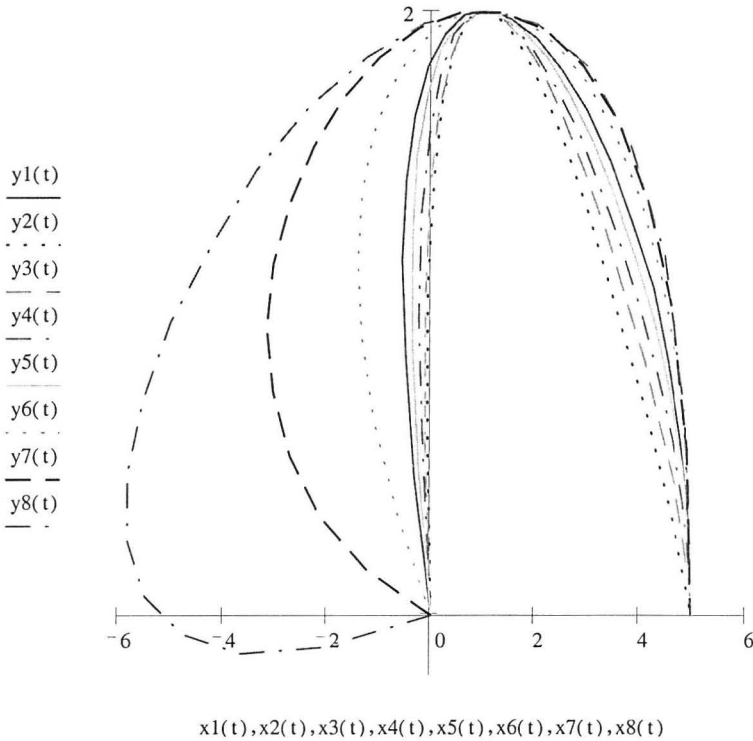
Ogólny przypadek wypukłej krzywej Béziera przedstawiono na Rys. 2. Niech punkt A_3 ma współrzędne: $x_3 = x_4, y_3 = y_B$. Dla założonego przypadku wypukłej krzywej Béziera na podstawie równań (4) szukane współrzędne zamieszczono w Tabeli 1. Wykresy wypukłych krzywych Béziera przedstawiono na Rys. 3 i 4.

Z Rys. 3 wynika, że przy założonych (tab.1) wartościach współrzędnych x_1, x_3, x_4, y_1, y_4 i wzroście wartości współrzędnej y_3 oraz spadku współrzędnych x_2 i y_2 , następuje wzrost uwypuklenia krzywej od strony węzła A_1 i punktu kontrolnego A_2 . Krzywe $y(t)$ opisujące wypukłe krzywe Béziera osiągają maksimum (Rys. 4) dla parametru t zawierającego się w przedziale $0,34 < t < 0,7$.



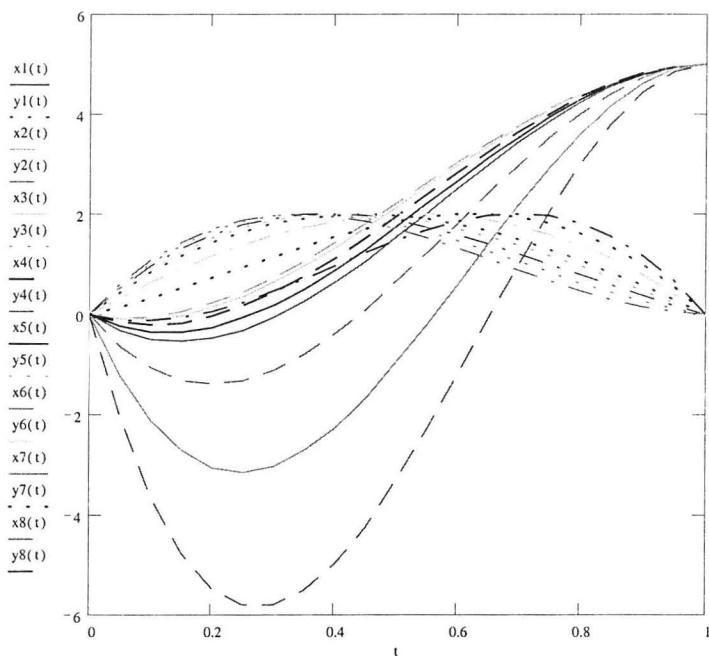
Rys. 2. Ogólny przypadek wypukłej krzywej Béziera.

Fig. 2. General case of convex Bézier curve.



Rys. 3. Zależności $y(t)$ od $x(t)$ dla wypukłej krzywej Béziera.

Fig. 3. Dependences $y(t)$ from $x(t)$ for convex Bézier curves.



Rys. 4. Zależności $y(t)$ i $x(t)$ od parametru t dla wypukłej krzywej Béziera.

Fig. 4. Dependences $y(t)$ and $x(t)$ from parameter t for convex Bézier curve.

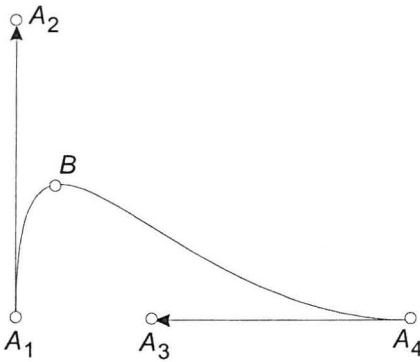
Tabela 1. Współrzędne punktów kontrolnych wypukłych krzywych Béziera, dla $x_1 = 0, y_1 = y_4 = 0$

Table 1. Coordinates of supervisory points of Bézier curves convex, for $x_1 = 0, y_1 = y_4 = 0$

Nr krzywej	Współrzędne			Parametr
	y_3	y_2	x_2	t
1	0,1	4,45	-0,772	0,337
2	0,6	4,184	-0,984	0,358
3	1,1	3,89	-1,46	0,383
4	1,6	3,559	-2,02	0,414
5	2	3,26	-2,584	0,442
6	3	2,311	-4,977	0,532
7	4	0,918	-9,293	0,627
8	5	-1,085	-15,565	0,701

KRZYWE BÉZIERA Z PUNKTEM PRZEGIĘCIA

Krzywa Béziara z punktem przegięcia jest przedstawiona na Rys. 5. Punkt przegięcia krzywej Béziara występuje od strony tego węzła, z którego wychodzący wektor kontrolny leży na osi Ox .



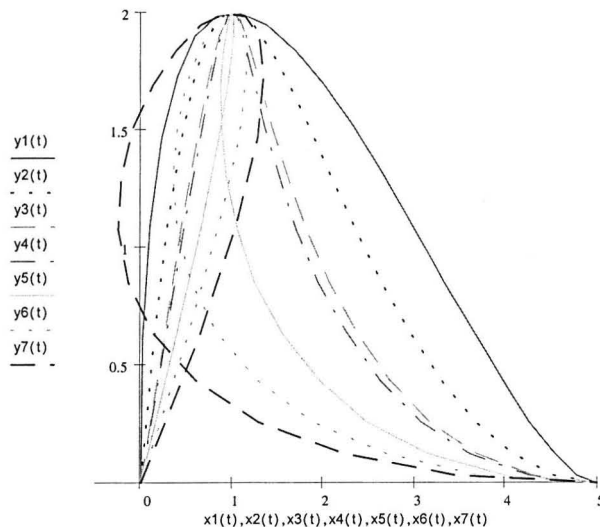
Rys. 5. Ogólny przypadek krzywej Béziara z punktem przegięcia.

Fig. 5. General case of Bézier curve with point of bending.

W analizowanym przypadku punkt przegięcia występuje od strony węzła A_4 , gdy współrzędna $y_3 = 0$, a współrzędna $y_2 = \text{const.}$, $x_1 = 0$, $x_4 = x_0$, $y_1 = y_3 = y_4 = 0$, współrzędna x_2 jest założona, natomiast x_3 jest obliczona.

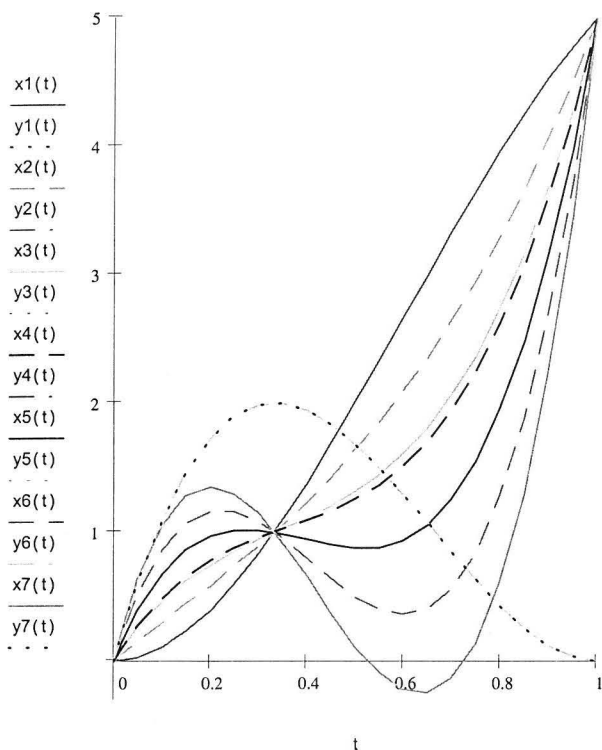
Dla analizowanej krzywej Béziara z punktem przegięcia wzrost wartości współrzędnej x_2 i spadek współrzędnej x_3 przy stałych współrzędnych $x_1, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4$ powodują, że w punkcie B krzywe tworzą coraz bardziej zaostrome wierzchołki (Rys. 6), a przy dalszym generowaniu krzywych dochodzi do ich zapętlenia.

Z Rys.7 wynika, że maksimum funkcji $y(t)$ jest osiągane dla parametru $t = 0,333$ (Tab. 2).



Rys. 6. Zależności $y(t)$ od $x(t)$ dla krzywej Béziara z punktem przegięcia.

Fig. 6. Dependences $y(t)$ from $x(t)$ for Bézier curve with point of bending.



Rys. 7. Zależności $y(t)$ i $x(t)$ od parametru t dla krzywej Béziera z punktem przegięcia.

Fig. 7. Dependences $y(t)$ and $x(t)$ from parameter t for Bézier curve with point of bending.

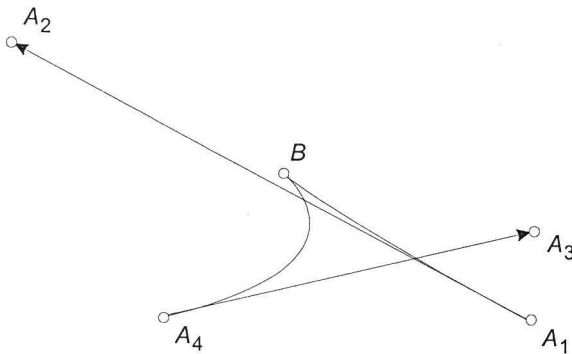
Tabela 2. Współrzędne punktów kontrolnych krzywych Béziera z punktem przegięcia, dla $x_1 = 0$, $x_4 = 5$, $y_1 = y_3 = y_4 = 0$, $y_2 = 4,5$, $x_B = 1$, $y_B = 2$

Table 2. Coordinates of supervisory points of Bézier curves with point of bending, for $x_1 = 0$, $x_4 = 5$, $y_1 = y_3 = y_4 = 0$, $y_2 = 4,5$, $x_B = 1$, $y_B = 2$

Nr krzywej	Współrzędne		Parametr
	x_2	x_3	t
1	0	3,675	0,333
2	1	1,672	0,333
3	1,8	0	0,333
4	2	-0,331	0,333
5	3	-2,334	0,333
6	4	-4,337	0,333
7	5	-6,34	0,333

KRZYWE BÉZIERA Z OSTRYM WIERZCHOŁKIEM

Krzywa Béziara z ostro zakończonym wierzchołkiem jest przedstawiona na Rys. 8. Ostro wierzchołek krzywej Béziara uzyskuje się, gdy np. $x_1 = x_3 = x_0$, $x_4 = 0$,

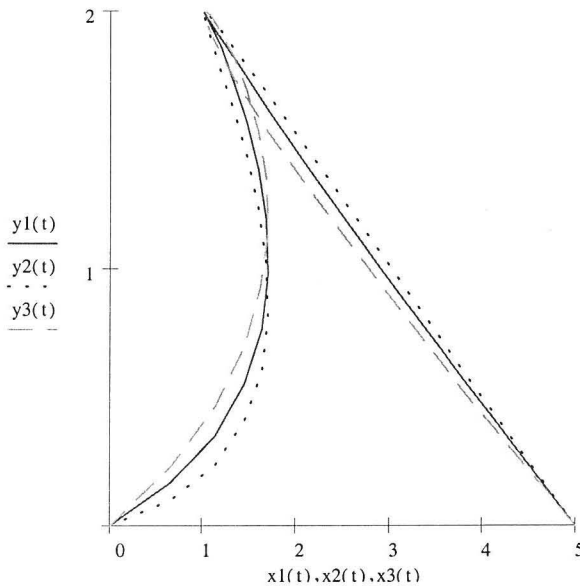


Rys. 8. Ogólny przypadek krzywej Béziara z ostrym wierzchołkiem.

Fig. 8. General case of Bézier curve with sharp top.

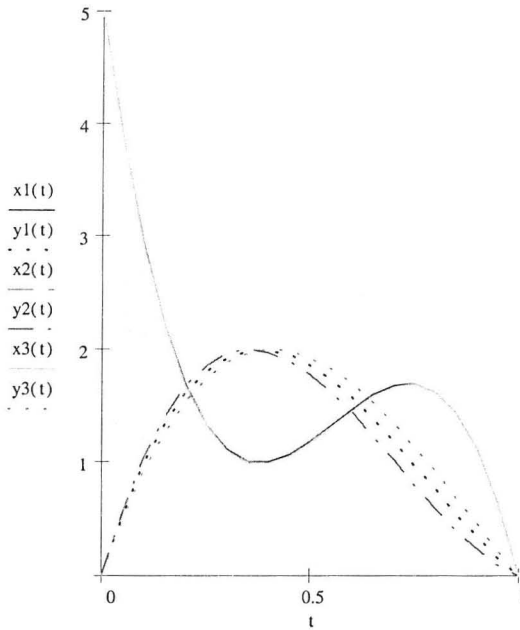
$y_1 = y_4 = 0$. Współrzędną y_3 należy założyć, a współrzędne x_2, y_2 są obliczane. Przy stałych wartościach współrzędnych $x_1 = x_3 = 5$, $x_4 = 0$, $y_1 = y_4 = 0$ wzrost wartości y_3 oraz spadek wartości współrzędnych x_2 i y_2 (Tab. 3) powodują, że w punkcie B krzywe Béziara tworzą ostro zakończony wierzchołek, który przy dalszym generowaniu krzywa zapętla się (Rys. 9). Z Rys. 10 wynika, że maksimum krzywych $y(t)$

jest osiągane dla parametru t zawierającego się w przedziale $0,35 < t < 0,7$.



Rys. 9. Zależności $y(t)$ od $x(t)$ dla krzywej Béziara z ostrym wierzchołkiem.

Fig. 9. Dependences $y(t)$ from $x(t)$ for Bézier curve with sharp top.



Rys. 10. Zależności $y(t)$ i $x(t)$ od parametru t dla krzywej Béziera z ostrym wierzchołkiem.

Fig. 10. Dependences $y(t)$ and $x(t)$ from parameter t for Bézier curve with sharp top.

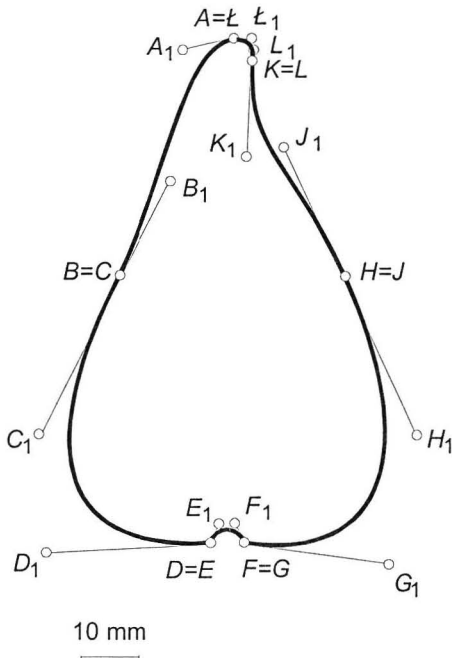
Tabela 3. Współrzędne punktów kontrolnych krzywych Béziera z ostrym wierzchołkiem, dla $x_1 = x_3 = 5$, $x_4 = 0$, $y_1 = y_4 = 0$

Table 3. Coordinates of supervisory points of Bézier curves with sharp top, for $x_1 = x_3 = 5$, $x_4 = 0$, $y_1 = y_4 = 0$

Nr krzywej	Współrzędne			Parametr
	y_3	y_2	x_2	t
1	0,5	4,239	-3,525	0,354
2	1	3,951	-3,502	0,378
3	1,5	3,629	-3,531	0,407
4	2	3,26	-3,643	0,442
5	2,5	2,828	-3,887	0,485
6	3	2,311	-4,289	0,532
7	4	0,918	-5,575	0,627
8	5	-1,085	-7,114	0,701

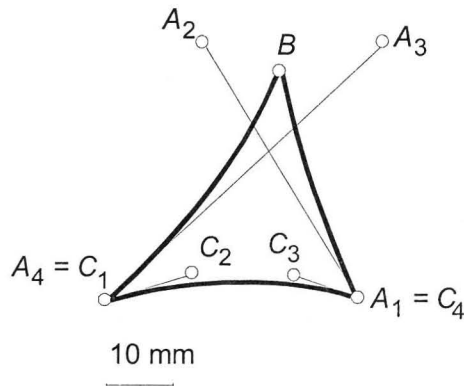
Przykład

Jako pierwszy przykład posłużył przekrój owocu gruszki odmiany „Konferencja”. Przekrój owocu gruszki został skonstruowany z sześciu sklejonych krzywych Béziera (Rys. 11). Krzywe z węzłami A, B i K, J oraz z punktami kontrolnymi A_1, B_1 i K_1, J_1 są krzywymi Béziera z punktem przegięcia. Krzywe z węzłami C, D i E, F oraz G, H , a także L, \dot{L} z punktami kontrolnymi C_1, D_1 i E_1, F_1 oraz G_1, H_1 i L_1, \dot{L}_1 są wypukłymi krzywymi Béziera. O gładkości krzywych Béziera w węzłach $B = C, H = J, K = L$ decyduje położenie punktów kontrolnych należących do wspólnych węzłów na prostej przechodzącej przez dany węzeł. Na pierwszej wspólnej prostej leżą punkty kontrolne C_1, B_1 , na drugiej prostej punkty J_1, H_1 , a na trzeciej punkty K_1, L_1 . Na Rys. 12 pokazano drugi przykład dotyczący modelowania przekroju nasiona gryki odmiany Emka za pomocą krzywych Béziera z ostrym wierzchołkiem.



Rys. 11. Przekrój owocu gruszki odmiany „Konferencja” w reprezentacji krzywych Béziera: $A=L, B=C, D=E, F=G, H=J, K=L$ – węzły, $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1, H_1, J_1, K_1, L_1, \dot{L}_1$ – punkty kontrolne.

Fig. 11. Section of fruit of pear of variety “Conference” in representation of Bézier curves: $A=L, B=C, D=E, F=G, H=J, K=L$ - knots, $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1, H_1, J_1, K_1, L_1, \dot{L}_1$ - supervisory point.



Rys. 12. Przekrój nasiona gryki odmiany „Emka” w reprezentacji krzywych Béziera: $A_4 = C_1$, $A_1 = C_4$ – węzły, A_2, A_3, C_2, C_3 – punkty kontrolne, B – ostry wierzchołek.

Fig. 12. Section seeds of buckwheat of verity "Emka" in representation of Bézier curves: $A_4 = C_1$, $A_1 = C_4$ - knots, A_2, A_3, C_2, C_3 - supervisory points, B - sharp top.

PODSUMOWANIE

Krzywe Béziera mogą być wykorzystane do modelowania nieregularnych kształtów wielu obiektów. Opisany w pracy sposób zmiany współrzędnych punktów kontrolnych względem węzłów krzywych Béziera pozwala modelować wypukłości, punkty przegięcia oraz ostre wierzchołki. Wielomiany trzeciego stopnia w zapisie parametrycznym są dobrym narzędziem do matematycznego modelowania krzywych w reprezentacji Béziera.

PIŚMIENNICTWO

1. **Bézier P.:** Numerical Control. Mathematics and Applications. Wiley, London, 1972.
2. **Bézier P.:** The mathematical basis of the UNISURF CAD system. Butterworths, London, 1986.
3. **Kęska W., Feder S.:** Rekonstrukcja kształtu nasion na podstawie komputerowej analizy obrazów. VII Sympozjum im. Prof. Cz. Kanafojskiego pt. Problemy budowy oraz eksploatacji maszyn i urządzeń rolniczych, Płock, 1997.
4. **Kubiak A., Fornal Ł.:** Komputerowe systemy analizy obrazu w przemyśle spożywczym. Rozpoznanie ziarna zbóż i nasion. Przemysł spożywczy, Nr 5, 164-168, 1995.
5. **Kram B., Frontczak J.:** Określenie kształtu i zmian parametrów geometrycznych ziarna pszenżyta w funkcji wilgotności. Zeszyty Naukowe Akademii Rolniczej we Wrocławiu, Nr 178, 15-20, 1989.
6. **Mieszalski L.:** Metoda tworzenia modelu bryły ziarna zbóż. Problemy Inżynierii Rolniczej, Nr 1(31), 29-36, 2001.

ANALYSIS OF BÉZIER CURVES APPLIED TO MODELLING
OF IRREGULAR SHAPES OF BIOLOGICAL OBJECTS

L. Mieszkałski

Department of Agricultural Engineering, University of Warmia and Mazury
ul. Oczapowskiego 11, Olsztyn, 10-738

Summary. In work analysis of Bézier curves convex were performed, with point of bending as well as sharp top. Curves of such shapes are often applied for modelling of objects of irregular shapes. Parametric equation of Bézier curves were presented. Graphs of proposed curves were introduced. As an example of material shapes sections of fruit of pear of variety Conference and buckwheat seeds variety Emka were approximated by Bézier curves.

Key words: Bézier curves, parametral equations, analysis of shapes, examples.