

Helena KAZIEKO, Lucyna KAZIEKO

Katedra Zastosowań Matematyki SGGW

O nieliniowym zagadnieniu konsolidacji ośrodka trójfazowego

Wstęp

Rozpatrujemy jednowymiarowe zagadnienie konsolidacji ośrodka trójfazowego (gruntu) z uwzględnieniem zmian jego charakterystyk w procesie kondensacji. Wyniki tych rozważań mogą posłużyć do wyznaczania konsolidacji dla konkretnych wartości charakterystyk.

Rozpatrujemy ośrodek trójfazowy (grunt), w którym pierwsza faza jest fazą stałą (szkielet gruntu), druga — fazą ciekłą (woda), a trzecia — fazą gazową (powietrze).

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

m — objętość fazy stałej (w jednostce objętości ośrodka — gruntu),

n — objętość fazy ciekłej (w jednostce objętości ośrodka — gruntu),

ε — współczynnik porowatości

$$\varepsilon = \frac{1 - m}{m}$$

s — objętość fazy gazowej (w jednostce objętości ośrodka — gruntu),

$$\aleph = \frac{s}{n},$$

\aleph_0 — wartość początkowa względnej objętości fazy gazowej, odpowiadająca ciśnieniu atmosferycznemu,

ρ_T — gęstość fazy stałej,

ρ — gęstość fazy ciekłej,

ρ_g — gęstość gazu,

x — współrzędna (pionowa),

h — grubość warstwy ośrodka,

u — prędkość filtracji fazy ciekłej,

v — prędkość "filtracji" fazy stałej,

ω — prędkość filtracji fazy gazowej,

γ — ciężar właściwy wody,

γ_0 — początkowy ciężar właściwy fazy stałej,

γ_m — ciężar właściwy ośrodka,

δ — rzeczywiste normalne naprężenie w fazie stałej,

q — ciśnienie na powierzchni ośrodka spowodowane przyłożonym obciążeniem,

p — ciśnienie w wodzie,

p_0 — ciśnienie atmosferyczne,

p_g — ciśnienie w fazie gazowej,

δ_g — objętość gazu (w jednostce przestrzeni porowatej) — nasycenie przestrzeni porowatej fazą gazową,

δ_w — nasycenie przestrzeni porowatej wodą,

a — współczynnik kondensacji,

μ — molekularny ciężar gazu,

T — temperatura absolutna,

α — współczynnik w prawie Henry'ego,

R — stała gazowa,

k_g — współczynnik przepuszczalności dla gazu w ośrodku trójfazowym,

k_w — współczynnik przepuszczalności dla cieczy w ośrodku trójfazowym,

k_1 — współczynnik przepuszczalności dla dwufazowego ośrodka,

k — współczynnik filtracji w ośrodku nasyc-
conym wodą,
 ω_0 — początkowa (wagowa) wilgotność
ośrodka.

Równanie jednowymiarowej konsolidacji ośrodka trójfazowego

Wyprowadzimy równanie konsolidacji
ośrodka trójfazowego (gruntu) dla zagad-
nienia jednowymiarowego przy następują-
cych uproszczeniach:

1. Współczynnik porowatości ośrodka jest
określony jednoznacznie przez rzeczy-
wiste normalne naprężenie w ośrodku w
danym czasie.
2. Współczynnik filtracji ośrodka jest okre-
ślony jednoznacznie przez współczyn-
nik porowatości ośrodka w danym
czasie.
3. Powietrze rozpuszczone w wodzie nie
wydziela się ani nie jest pochłaniane.
4. Faza stała nie jest rozpuszczalna.
5. Wodę wypełniającą pory ośrodka traktuje
się jako ciecz nieściśliwą.

Równania zachowania masy dla każdej
fazy można zapisać w następującej po-
staci [4]:

faza stała:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_T m) = -\text{div} (\rho_T v) \quad (1)$$

faza ciekła:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho n) = -\text{div} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial t} (\alpha \rho_g n) \quad (2)$$

faza gazowa:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_g s) = -\frac{\partial}{\partial t} (\alpha \rho_g n) - \text{div} (\rho_g \omega) \quad (3)$$

Dla jednowymiarowego zagadnienia,
przyjmując $\rho_T = \text{const}$ i $\rho = \text{const}$ równania
(1–3) mają postać:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (4)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\alpha n}{\rho} \frac{\partial \rho_g}{\partial t} \quad (5)$$

$$\frac{\partial (\rho_g s)}{\partial t} = -\alpha \frac{\partial (n \rho_g)}{\partial t} - \frac{\partial (\omega \rho_g)}{\partial x} \quad (6)$$

Równanie (5) otrzymano z równania
(2) opuszczając składnik ze współczyn-
nikiem $\frac{\alpha \rho_g}{\rho}$ (rzęd wielkości tego skład-
nika jest 10^{-5}).

Zastosujemy prawo Darcy dla każdej
fazy oddzielnie [2]. Współczynniki prze-
puszczalności k_g i k_w zależą od nasycenia
 δ_g przestrzeni porowatej.

Fazowe względne przepuszczalności
można wyrazić za pomocą następujących
wzorów empirycznych [2]:

$$k_g^* (\delta_g) = \frac{k_g}{k_1} = 0 \quad \text{gdy } 0 \leq \delta_g \leq 0,1$$

$$k_g^* (\delta_g) = \left(\frac{\delta_g - 0,1}{0,9} \right)^{3,5} [1 + 3(1 - \delta_g)] \quad \text{gdy } 0,1 \leq \delta_g \leq 1$$

$$k_w^* (\delta_g) = \frac{k_w}{k_1} = 0 \quad \text{gdy } 0,8 \leq \delta_g \leq 1$$

$$k_w^* (\delta_g) = \left(\frac{0,8 - \delta_g}{0,8} \right)^{3,5} \quad \text{gdy } 0 \leq \delta_g \leq 0,8$$

Gdy $\delta_g \leq 0,1$ mamy:

$$k_g^* = 0$$

oraz [2]

$$\omega = \frac{s}{m} v \quad (7)$$

Względny współczynnik przepuszczalności dla wody przy małej zawartości powietrza w gruncie ($\delta_g \leq 0,1$) wynosi [2]:

$$0,8 \leq k_w^* \leq 1$$

W celu uproszczenia przyjmujemy $k_w^* = 1$. Wówczas równanie dla filtracji wody ma postać:

$$u = \frac{n}{m} v - k \frac{\partial H}{\partial x} \quad (8)$$

gdzie

$$H = \frac{p_1}{\gamma} + x \quad (9)$$

$$p_1 = p - p_0 \quad (10)$$

Gęstość gazu wyraża się zależnością [2]:

$$\rho_g = \frac{\mu p_g}{RT}$$

gdzie

$$p_g = p + p_k$$

p_k — ciśnienie kapilarne.

Jeśli uwzględnimy ciśnienie kapilarne, wówczas rzeczywiste normalne naprężenie wynosi [1]:

$$\delta = \delta_p - p_g + \lambda (p_g - p)$$

gdzie:

λ — parametr określony eksperymentalnie, zależny od stosunku zawartości wody i powietrza w porach,

δ_p — całkowite normalne naprężenie w gruncie.

Jeżeli zawartość powietrza w gruncie jest mała, to parametr λ jest bliski jedności

[1]. W celu uproszczenia przyjmujemy $\lambda = 1$. Wówczas δ nie będzie zależne od ciśnienia kapilarnego.

W celu uproszczenia dalszych przekształceń przyjmujemy $p_k = 0$. Gęstość gazu można więc wyrazić następująco:

$$\rho_g = \frac{\mu p}{RT} \quad (11)$$

Przyjmujemy, że γ_m nie zależy od wysokości. Wówczas warunek zachowania równowagi w ośrodku porowatym dla zagadnienia jednowymiarowego można przedstawić w postaci:

$$\sigma + p = p_0 + q + \gamma_m (h - x) \quad (12)$$

Równania (4–12) i równości:

$$\varepsilon = \frac{1 - m}{m} \quad (13)$$

$$m + n + s = 1 \quad (14)$$

oraz eksperymentalnie wyznaczone wielkości:

$$\varepsilon = \varepsilon(\sigma) \quad (15)$$

$$k = k(\varepsilon) \quad (16)$$

tworzą układ równań określający funkcje:

$$\varepsilon, n, m, s, H, p, p_1, \rho_g, k, \delta, u, v, \omega.$$

Równanie (6), po przekształceniu, przyjmuje postać:

$$\frac{s + n\alpha}{\rho_g} \frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial t} = -\alpha \frac{\partial n}{\partial t} - \frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\omega}{\rho_g} \frac{\partial \rho_g}{\partial x}$$

Wykorzystując zależności (7) i (14), powyższe równanie można przedstawić następująco:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{s}{m} v \right) = -\frac{s + \alpha n}{\rho_g} \frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial t} - \alpha \frac{\partial n}{\partial t} - \frac{sv}{m\rho_g} \frac{\partial \rho_g}{\partial x} \quad (17)$$

Ponieważ α dla powietrza jest istotnie mniejsze od 1, więc po prawej stronie równania (17) czwarty składnik (wobec składnika drugiego) można pominąć.

Z równań (4), (5), (8), (11), (14) i (17) mamy:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v}{m} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial H}{\partial x} \right) = -\frac{s - \alpha n}{p} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{sv}{mp} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\alpha n}{\rho\beta} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (18)$$

gdzie

$$\beta = \frac{RT}{\mu}$$

Przy temperaturach rzędu 20°C można pominąć po prawej stronie równania (18) ostatni składnik (wobec składnika pierwszego) [6]. Wówczas, uwzględniając (4), równanie (18) przyjmuje postać:

$$-\frac{1}{m} \frac{\partial m}{\partial t} - \frac{v}{m^2} \frac{\partial m}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial H}{\partial x} \right) = -\frac{s + \alpha n}{p} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{sv}{mp} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (19)$$

Korzystając z (9), (12), (13) i (15), po wykonaniu odpowiednich przekształceń, równanie (19) możemy przedstawić w następującej postaci:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{w\gamma} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\gamma_m}{\gamma_w} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1 + \epsilon}{\alpha\gamma w} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{1 + \epsilon}{w} \left[\frac{\partial H}{\partial x} (1 + \xi) + \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma} - \xi \right] v \quad (20)$$

gdzie

$$w = 1 + \frac{(s + \alpha n)(1 + \epsilon)}{ap} \quad (21)$$

$$a = -\frac{\sigma\epsilon}{\sigma\delta} \quad (22)$$

$$\xi = \frac{s(1 + \epsilon)}{ap} \quad (23)$$

Z równania (4) mamy:

$$v = -\int_0^x \frac{\partial m}{\partial t} dx + c(t)$$

Ponieważ przyjmujemy, że ruch gruntu może być spowodowany tylko jego deformacją, więc $c(t) = 0$.

Uwzględniając równania (9), (12), (13) i (15), po odpowiednich przekształceniach, otrzymujemy:

$$v = -\int_0^x \frac{a}{(1 + \epsilon)^2} \left(\frac{\partial q}{\partial t} + \gamma_m \frac{\partial h}{\partial t} - \gamma \frac{\partial H}{\partial t} \right) dx \quad (24)$$

Korzystając z prawa Boyle'a-Mariotta i z prawa Henry'ego, otrzymujemy:

$$\aleph = \frac{p_0}{p} (\aleph_0 + \alpha) - \alpha \quad (25)$$

Wykorzystując równości (13) i (14), zależności (21) i (23) można przedstawić w postaci:

$$w = 1 + \frac{\epsilon(\aleph + \alpha)}{(\aleph + 1)ap} \quad (26)$$

$$\xi = \frac{\aleph\epsilon}{(\aleph + 1)ap} \quad (27)$$

Ostatecznie równanie konsolidacji przyjmuje postać:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{w\gamma} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\gamma_m}{w\gamma} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1+\varepsilon}{a\gamma w} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{1+\varepsilon}{w} \left[\frac{\partial H}{\partial x} (1+\xi) + \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma} - \xi \right] \quad (28)$$

$$\int_0^x \frac{a}{(1+\varepsilon)^2} \left(\frac{\partial q}{\partial t} + \gamma_m \frac{\partial h}{\partial t} - \gamma \frac{\partial H}{\partial t} \right) dx$$

gdzie

w — określa wzór (26),

ξ i ε — określają odpowiednio wzory (27) i (25).

Z równań (9), (10) i (12) możemy wyznaczyć:

$$p = p_0 + \gamma H - \gamma x \quad (29)$$

$$\delta = q - \gamma H + \gamma_m h - (\gamma_m - \gamma) x \quad (30)$$

Równanie konsolidacji (28) różni się od znanego równania konsolidacji postacią funkcji w i występowaniem składnika po prawej stronie równania, zawierającego całkę. Wpływ tego składnika na rozwiązanie równania konsolidacji (28) jest istotny. Tym problemem zajmiemy się w oddzielnej pracy.

Literatura

- [1] BISHOP A. W., KENNARD M. F., VAUGHAN P. R. 1964: *Developments in the measurement and interpretation of pore pressure in earth dams*. Eighth international Congress on large dams, Edinburg, v. II, Nr 29.
- [2] CZARNYJ I. A. 1963: *Podziemna gidrogazodynamika*. GNTJN i GTA.
- [3] DAVIS E. H., RAYMOND G. P. 1965: *A non-linear theory of consolidation*. 15, Nr 2.
- [4] FLORIN W. A. 1961: *Osnowy mechaniki gruntów*. Gosstrojizdat, t. 2.
- [5] GIBSON R. E. 1958: *The progress of consolidation in a clay layer increasing in thickness with time*. Geotechnique, v. 8, Nr 4.
- [6] JANBU N. 1965: *Consolidation of clay layers based on non-linear stress-strain*. Proc. 6th Internat. Conf. Soil. Mech. and Foundat. Engng., Montreal, v. 2, Div. 3-6, Toranbo, Univ. Press.

Summary

To a non — linear problem of consolidation of three — phase soils. A one — dimensional problem of consolidating a three — phase soil is considered in the light of the theory of percolation with variation in soil properties during consolidation taken into account.

Authors' address

H. Kazięko, L. Kazięko
Warsaw Agricultural University
ul. Nowoursynowska 166
02-766 Warszawa