

**Instytut Agrofizyki
im. Bohdana Dobrzańskiego PAN
w Lublinie**

ACTA AGROPHYSICA

8

Andrzej L. Marciniak, Andrzej Fijołek,
Jerzy Podgórski, Piotr Sieczka

**WARIACYJNE METODY
TWORZENIA MODELI ROŚLINNYCH**

Lublin 1997

Komitet redakcyjny

prof. dr hab. Jan Gliński, czł. koresp. PAN
doc. dr hab. Krystyna Konstankiewicz
doc. dr hab. Ryszard Dębicki

Opiniował do druku

prof. dr hab. Edward Śpiewła

Adres redakcji

Instytut Agrofizyki im. Bohdana Dobrzańskiego PAN
ul. Doświadczalna 4, 20-036 Lublin
tel. (0-81) 744-50-61

Publikacja indeksowana przez
POLISH SCIENTIFIC JOURNALS CONTENTS - AGRIC. & BIOL. SCI.
w sieci INTERNET pod adresem <http://saturn.ci.uw.edu.pl/psjc/>
lub <http://ciuw.warman.net.pl/alf/psjc/>

Pracę wykonano w ramach projektu badawczego nr 0065/P06/95/09
finansowanego przez Komitet Badań Naukowych

Publikacja finansowana przez Akademię Rolniczą w Lublinie

© Copyright by Instytut Agrofizyki im. Bohdana Dobrzańskiego PAN, Lublin 1997

ISBN 83-87385-03-4

ISSN 1234-4125

Wydanie I. Nakład 150 egz.
Ark. wyd. 7,2. Ark. druk. 5,5
Skład komputerowy: Dr Andrzej Fijolek
Druk: "Tekst", ul. 1 Maja 51, 20-410 Lublin

SPIS TREŚCI

WSTĘP	5
UWAGI ZWIĄZANE Z UŻYCIEM OPERATORÓW SUMACYJNYCH \sum_{Ω} , \sum_{Π}	
Cz. I. Ogólne zależności	7
Literatura	14
Streszczenie	14
UWAGI ZWIĄZANE Z UŻYCIEM OPERATORÓW SUMACYJNYCH \sum_{Ω} , \sum_{Π}	
Cz. II. Związki z całkami	15
Literatura	19
Streszczenie	19
DYNAMIKA SIATKI ROŚLINNEJ	
Cz. I. Wprowadzenie do obliczeń wariacyjnych	21
Literatura	24
Streszczenie	24
DYNAMIKA SIATKI ROŚLINNEJ	
Cz. II. Obliczanie wariacji funkcjonału działania	25
Literatura	29
Streszczenie	30
UWAGI O OŚRODKU QUASI – PROSTYM	
Cz. I. Wylczenie wariacji funkcjonału działania δW	31
Literatura	37
Streszczenie	37
UWAGI O OŚRODKU QUASI – PROSTYM	
Cz. II. Całkowe słabe prawa zachowania	39
Literatura	57
Streszczenie	57
UWAGI O OŚRODKU QUASI – PROSTYM	
Cz. III. Uproszczenia, silne całkowe prawa zachowania, powiązanie z ruchem siatki przestrzennej	59
Literatura	65
Streszczenie	65

APROKSYMACJA MECHANIKI ŁANU MODELAMI BARDZIEJ ZŁOŻONYCH OŚRODKÓW	
Cz. I. Wprowadzenie, dodatkowe stopnie swobody	67
Literatura.....	72
Streszczenie.....	72
APROKSYMACJA MECHANIKI ŁANU MODELAMI BARDZIEJ ZŁOŻONYCH OŚRODKÓW	
Cz. II. Ośrodek wieloskładnikowy, ośrodek strukturalny	73
Literatura.....	80
Streszczenie.....	80
ZAGADNIENIA PROBABILISTYCZNE W DYNAMICE ROŚLINNYCH	
OŚRODKÓW SIATKOWYCH	81
Literatura.....	88
Streszczenie.....	88
PODSUMOWANIE	89
SUMMARY	91

WSTĘP

Przedstawione prace stanowią pewną całość opisu ośrodków materialnych występujących w rolnictwie. Użycie operatorów sumacyjnych miało na celu przeniesienie teorii ośrodków ciągłych na ośrodki dyskretne. Wszystkie bowiem rozpatrywane w rolnictwie ośrodki można z pewnym przybliżeniem potraktować jako ośrodki dyskretne bądź dyskretno–ciągłe. W przypadku tych pierwszych użyte metody elementów skończonych (MES, FEM) ograniczają się do rozpatrywania układów prętowych. Jak się okazuje układy takowe mogą być ciałami strukturalnymi co będzie odzwierciedlone w odpowiednim zapisie. Po prostu ich macierze będą uwzględniały znacznie więcej wyrazów niż to jest w przypadku jednorodnych ośrodków izotropowych sprężystych.

Budowę równań równowagi i zachowania (a tym samym równań ruchu) oparto o podejście wariacyjne wprowadzając do funkcji materiałowej ośrodka jego geometrię poprzez uwzględnienie tam tensora krzywizny.

Opis kończy się omówieniem pewnych zagadnień probabilistycznych związanych z konstrukcją tzw. *M – równania* (*M – equation*), które to równanie pozwala na oszacowanie gęstości prawdopodobieństwa zachowania się materiału czyli inaczej mówiąc określenie owej gęstości dla rozwiązań równań zachowania.

Ponadto całość stanowi analizę poszukiwań równań konstytutywnych (zawartych w postaci funkcji materiałowej) dla roślinnych ośrodków wielomodułowych.

UWAGI ZWIĄZANE Z UŻYCIEM OPERATORÓW SUMACYJNYCH \sum_{Ω} , \sum_{Π}

Cz. I. Ogólne zależności

Andrzej L. Marciniak, Andrzej Fijolek
 Katedra Maszyn i Urządzeń Rolniczych WTR, Akademia Rolnicza, Lublin
 Jerzy Podgórski, Piotr Sieczka
 Wydział Inżynierii Budowlanej i Sanitarnej, Politechnika Lubelska, Lublin

Synopsis: Funkcja \mathcal{L} jest treścią równania konstytutywnego wiążącego obiekty odkształcenia oraz siłowe.

Słowa kluczowe: Operatory sumacyjne, obiekty metryczne, obiekt $\alpha_{\alpha\alpha}^{\cdot}$, funkcja \mathcal{L} oraz funkcje termodynamiczne, wektory bazowe, metryka.

W pracy [2] operatory te zostały zdefiniowane oraz wykorzystane w budowie równań będących słabymi całkowymi prawami zachowania. Oto one:

$$\begin{aligned}
 \sum_{\Omega} (q_{\alpha\phi}^{\alpha} |_{\phi} \mathcal{E}_{\alpha} \Delta \xi_{\alpha}^{\phi}) \Delta \Omega &= \sum_{\Pi} q_{\alpha\phi}^{\alpha} \mathcal{E}_{\alpha} \Delta \Pi = \partial_{\phi} (1 + \partial_{\psi}) (1 + \partial_{\lambda}) q_{\alpha\phi}^{\alpha} \mathcal{E}_{\alpha} = \partial_{\phi} (1 + \partial_{\psi}) (1 + \partial_{\lambda}) \vec{Q}_{\phi}, \\
 \sum_{\Omega} p_{\alpha\phi}^{\alpha} \mathcal{E}_{\alpha} \Delta \Omega &= (1 + \partial_1) (1 + \partial_2) (1 + \partial_3) \vec{P}, \\
 \sum_{\Omega} m_{\alpha\phi}^{\alpha} \Delta \xi_{\alpha}^{\phi} \mathcal{E}_{\alpha} \Delta \Omega &= \partial_{\phi} (1 + \partial_{\psi}) (1 + \partial_{\lambda}) \vec{M}_{\phi}, \\
 \sum_{\Omega} \mathcal{L}_{\alpha\phi}^{\alpha} \mathcal{E}_{\alpha} \Delta \Omega &= (1 + \partial_1) (1 + \partial_2) (1 + \partial_3) \vec{L}, \\
 \sum_{\Omega} \epsilon_{\phi\alpha\gamma} q_{\alpha\phi}^{\alpha} \Delta \xi_{\alpha}^{\phi} \mathcal{E}_{\alpha}^{\gamma} \cos^{-1} \beta^{\gamma} \left\{ \cdot \right\}_{\beta} |_{\phi} + 1 \Big\} \Delta \Omega &= \\
 = \sum_{\Pi} \epsilon_{\phi\alpha\gamma} \partial_{\phi} \left[q_{\alpha\phi}^{\alpha} \Delta \xi_{\alpha}^{\phi} \mathcal{E}_{\alpha} G_{\alpha\alpha}^{\alpha\gamma} (\alpha_{\alpha\alpha}^{\alpha})^R \cos^{-1} \beta^{\gamma} \left\{ \cdot \right\}_{\beta} |_{\phi} + 1 \Big\} \right] \Delta \Pi = \\
 = \sum_{\Pi} \epsilon_{\phi\alpha\gamma} \left\{ q_{\alpha\phi}^{\alpha} |_{\phi} \left[\Delta \xi_{\alpha}^{\phi} G_{\alpha\alpha}^{\alpha\gamma} (\alpha_{\alpha\alpha}^{\alpha})^R \cos^{-1} \beta^{\gamma} \left\{ \cdot \right\}_{\beta} |_{\phi} + 1 \Big\} \right] \Delta \xi_{\alpha}^{\phi} + \right. \\
 \left. + q_{\alpha\phi}^{\alpha} \left[\Delta \xi_{\alpha}^{\phi} G_{\alpha\alpha}^{\alpha\gamma} (\alpha_{\alpha\alpha}^{\alpha})^R \cos^{-1} \beta^{\gamma} \left\{ \cdot \right\}_{\beta} |_{\phi} + 1 \Big\} \right] |_{\phi} \Delta \xi_{\alpha}^{\phi} \right\} \mathcal{E}_{\alpha} \Delta \Pi = \\
 = \partial_{\phi} (1 + \partial_{\psi}) (1 + \partial_{\lambda}) \epsilon_{\phi\alpha\gamma} \left[\vec{Q}_{\phi} |_{\phi} (-) + \vec{Q}_{\phi} (-) |_{\phi} \right],
 \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie: $(\cdot) |_{\phi}$ – przyrost kowariantny,

\sum_{Π} – suma „powierzchniowa” będąca odpowiednikiem całki powierzchniowej

występująca przy sumowaniu sił i momentów powierzchniowych,

\sum_{Ω} – suma „objętościowa” odnosząca się do sił i momentów objętościowych,

$q_{\omega\phi}^{\alpha}, m_{\omega\phi}^{\alpha}$ – wzajemne obiekty napięcia ze względu na górny znak,

$$\vec{P} = \mathcal{P}_{\alpha}^{\alpha} \vec{e}_{\alpha}, \quad \vec{L} = \mathcal{L}_{\alpha}^{\alpha} \vec{\Xi}_{\alpha},$$

$$G_{\alpha\beta}^{\alpha\gamma} = g_{\alpha\beta}^{\alpha\gamma} + 2\gamma_{\alpha\beta}^{\alpha\gamma} = g_{\alpha\beta}^{\alpha\gamma} + \left(g_{\alpha\beta}^{\alpha\gamma} V_{\gamma} \Big|_{\beta} + \alpha_{\alpha\gamma}^{\beta} V_{\gamma} \Big|_{\alpha} + \alpha_{\alpha\gamma}^{\gamma} V_{\alpha} \Big|_{\beta} \right) - \text{ obiekt me-}$$

tryczny przemieszczenia,

$\alpha_{\alpha\beta}^{\alpha} = \bar{c}_{\alpha}^{\alpha} \bar{c}_{\beta}^{\alpha}$ – obiekt będący odpowiednikiem δ -Kronekera dla $\beta^i \neq 0$ (vide rys.1).

Pozostałe objaśnienia zamieszczono we wspomnianej już pracy [2].

Rozwiązaniem równań sumacyjnych stanowiących treść słabych praw zachowania będą w gruncie rzeczy zależności f wiążącą funkcję materiałową Lagrange'a \mathcal{Q} (oraz ewentualnie inne funkcje typu termodynamicznego) z obiektami geometrycznymi związanymi z silami objętościowymi. Ponieważ funkcja \mathcal{Q} zależy od przyrostów kowariantnych współrzędnych a te z kolei można wyrazić jako odkształcenia, więc ostatecznie będzie

$$f \left\{ \mathcal{Q}(\xi_{\alpha}^{\phi}, t, \varepsilon_{\phi} \dots) q_{\omega\phi}^{\alpha}, m_{\omega\phi}^{\alpha} \dots \right\} = 0 \quad (2)$$

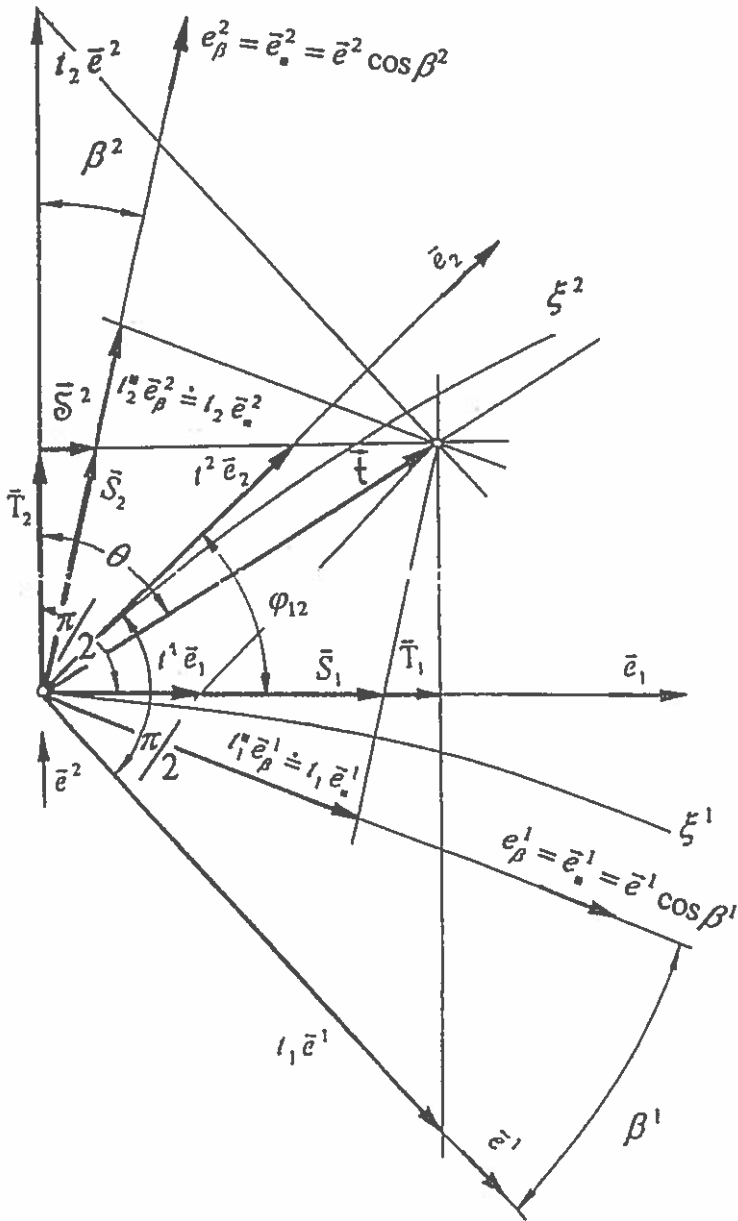
Na funkcję \mathcal{Q} będzie nałożonych dodatkowo szereg warunków wynikających z silnych całkowych praw zachowania. Ponadto w szczególnych przypadkach będzie można zastosować opis przestrzenny który eliminuje współrzędne Lagrange'a. W ten oto sposób będzie można na podstawie uzyskanego rozwiązania f podać zależność konstytutywną pomiędzy silami i odkształceniami.

Zestawiając zależności (1) i (2) z równaniami wynikającymi ze słabych praw zachowania można powiedzieć, że operatory \sum_{Ω} , \sum_{Π} związane są takimi obiektami jak: promień wodzący \vec{r} (opisujący w dużej mierze ośrodek poprzez parametryzację jego przestrzeni), wektory bazowe $\vec{e}_i, \vec{e}_j^j, \vec{e}_i, \vec{e}_j^j, \vec{\Xi}_i, \vec{\Xi}_j^j$ obiekty metryczne $g_{ij}, g_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}$, $G_{ij}, G_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}$, współczynnikami koneksji, przyrostami kowariantnymi, obiektami krzywizny, translacją wektora, geometrią wektorów powierzchniowych - brzegowych, stanem odkształcenia poprzez funkcje typu \mathcal{Q} , stanami obciążenia, równaniami równowagi i warunkami granicznymi. Jest więc to zamknięty cykl stanowiący podstawę teorii ruchu. Na jej podstawie oraz silnych prawach zachowania można konstruować postać funkcji \mathcal{Q} .

Występujące przesunięcia skończone $\Delta\xi^i$, określone przez przyrost kowariantny współrzędnych są bezwzględny wektorem kowariantnym. Z kolei przyrost kowariantny skalar α jest gradientem $\alpha|_{(\cdot)}$ tylko wtedy gdy

$$a_i \Big|_{\xi^i} - a_k \Big|_{\xi^i} = 0. \quad (3)$$

Gradient jest tutaj wektorem kowariantnym odchylonym o kąt β^i od normalnej do współrzędnej ξ^i (składowej kontrawariantnej).



Rys. 1. Rozkład wektora \vec{T} oraz definiowanie kąta β^i

Ponadto związki między wartościami funkcji tensorowych w różnych punktach nie są zdefiniowanej w zwykłej algebrze tensorów. Musi być zdefiniowane przesunięcie równoległe dla geodetyk poprzez przyrównanie do zera przyrostu kowariantnego. Sam

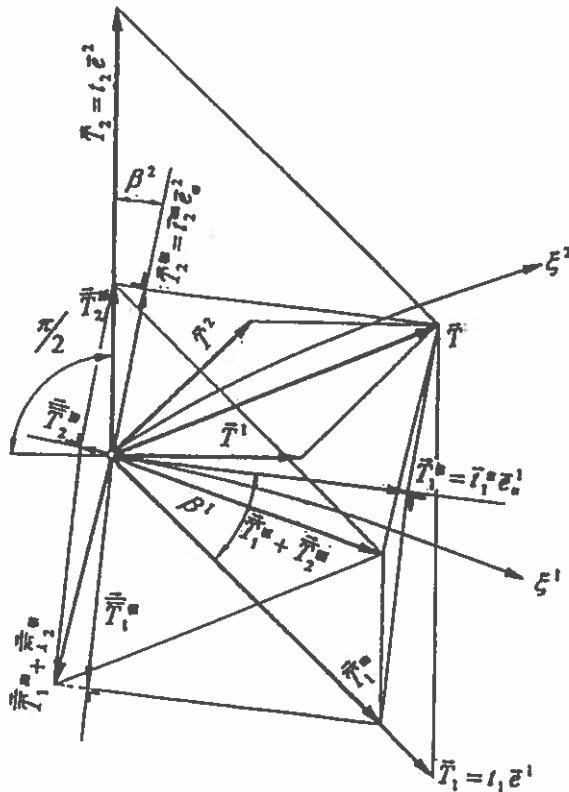
przyrost jest funkcją położenia. Obiekt Q o n^2 składowych Q_{ik} jest bezwzględny tensoriem rzędu drugiego wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Q_{ik} a^i b^k = \alpha \quad (4)$$

każdych dwóch bezwzględnych kontrawariantnych wektorów o składowych a^i oraz b^k . Tutaj α jest skalar bezwzględny dla każdego bezwzględnego kontrawariantnego wektora \bar{a} o składowych a^i oraz gdy $Q_{ik}=Q_{ki}$. Ostatnia uwaga wraz ze wzorem (4) ma zasadnicze znaczenie przy obliczaniu przyrostów kowariantnych tensorów rzędów $r \geq 2$.

Należy następnie omówić bliżej zagadnienia związane z wektorami bazy. Otóż wyjściowe definicje związane z kątem β^i są przedstawione na rys. 1 oraz w pracy [2].

Dalsze uwagi związane z rozkładami przedstawiono na rys. 2 i 3.



Rys. 2. Rozkład wektora \vec{T} dla kąta $\beta^1 > \beta^2$

Z rys. 2 wynikać będą następujące zależności

$$\vec{T} = \vec{T}^1 + \vec{T}^2 = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{T}_1^a + \vec{T}_2^a, \quad (5)$$

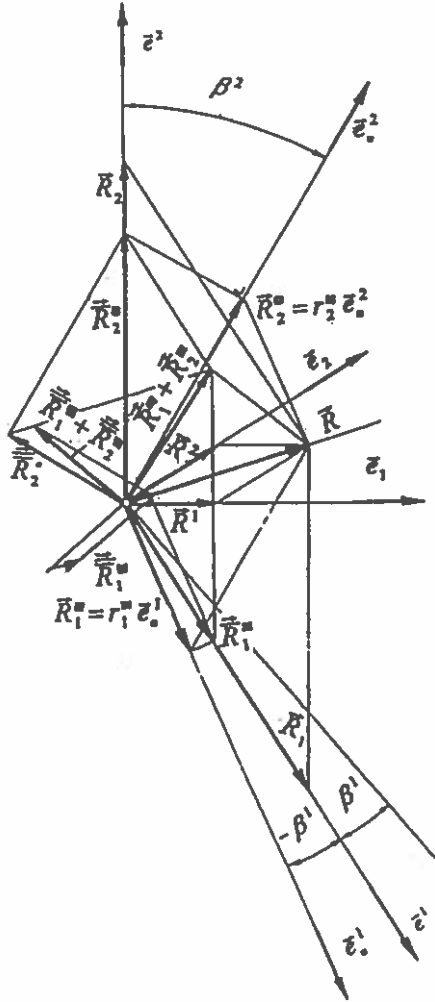
gdzie: $\vec{T}_1^a = \vec{T}_1^a - \vec{T}_1^a$, $\vec{T}_2^a = \vec{T}_2^a - \vec{T}_2^a$,

a następnie

$$\vec{T}_1 - \vec{T}_1^* + \vec{T}_2 - \vec{T}_2^* = \left(\vec{T}_1^* + \vec{T}_2^* \right) - \left(\vec{T}_1^* + \vec{T}_2^* \right), \quad (5.1)$$

$$\left| \vec{T}_1^* + \vec{T}_2^* \right| = \left| \vec{T}_1^* \right| \frac{1}{\cos \beta^1} + \left| \vec{T}_2^* \right| \frac{1}{\cos \beta^2},$$

$$\left| \vec{T} \right| = \frac{1}{\cos \beta^1} \left| \vec{T}_1^* \right| + \frac{1}{\cos \beta^2} \left| \vec{T}_2^* \right| - \left| \vec{T}_1^* + \vec{T}_2^* \right|.$$



Rys. 3. Rozkład wektora \vec{R} dla kąta $\beta^1 < \beta^2$

Natomiast z rys. 3 wynika m. in. ważna zależność

$$\vec{R}_2^* = \vec{e}_n^2 \left(\vec{e}_n^2 \cdot \vec{R}_2^* \right) + \vec{e}_n^2 \times \left(\vec{R}_2^* \times \vec{e}_n^2 \right). \quad (6)$$

Wielkości dane zależnościami (5), (5.1), (6) mogą być wykorzystane w definiowaniu obiektów geometrycznych występujących w funkcji struktury oraz opisie procesu roboczego.

Na rys. 4 przedstawiono schemat definiujący wektory bazowe

$$\vec{e}_\lambda \doteq \frac{\partial_\lambda \vec{r}}{\Delta \xi^\lambda}. \quad (7)$$

Kąty między współrzędnymi w dwóch kolejnych punktach nie są stałe, $\varphi \neq \varphi'$, $\nu \neq \nu'$, $\psi \neq \psi'$.

Same wektory przyjmują postać

$$\begin{aligned} \vec{e}_\xi &= \vec{e}_1 \{ \cos \varphi \cos \psi + \cos(\alpha_{12} + \varphi') \cos \vartheta \cos(\alpha_{12} - \psi) \} + \\ &+ \vec{e}_2 \{ \cos(\alpha_{12} - \varphi) \cos \psi + \cos \varphi' \cos \vartheta \cos(\alpha_{12} - \psi) \} + \vec{e}_3 \{ \cos(\alpha_{23} - \varphi) \cos(\alpha_{12} - \psi) \}, \\ \vec{e}_\eta &= \vec{e}_1 \{ \cos \varphi \cos(\alpha_{12} + \psi') + \cos(\alpha_{12} + \varphi') \cos \vartheta \cos \psi' \} + \\ &+ \vec{e}_2 \{ \cos(\alpha_{12} - \varphi) \cos(\alpha_{12} + \psi') + \cos \varphi' \cos \vartheta \cos \psi' \} + \vec{e}_3 \{ \cos(\alpha_{23} - \vartheta) \cos \psi' \}, \\ \vec{e}_\zeta &= \vec{e}_1 \cos(\alpha_{12} + \varphi') \cos(\alpha_{23} + \vartheta') + \vec{e}_2 \cos \varphi' \cos(\alpha_{23} + \vartheta') + \vec{e}_3 \cos \vartheta'. \end{aligned} \quad (8)$$

Na zakończenie należy podać zestaw zależności związanych z wektorami bazowymi:

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j, \quad g = \det g_{ij} \doteq |g_{ij}|, \quad \sqrt{g_{ij}} = |\vec{e}_i| \quad (9)$$

$$|\partial_\phi \vec{r}| = |\vec{e}_\phi \Delta \xi^\phi| = l = \sqrt{\vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_\phi} \Delta \xi^\phi = \sqrt{g_{\phi\phi}} \Delta \xi^\phi, \quad |\partial \vec{r}| = \left(\left| g_{ik} \frac{\Delta \xi^i}{\Delta s} \frac{\Delta \xi^k}{\Delta s} \right| \right)^{1/2} \Delta s, \quad (10)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\alpha} \vec{e}_\beta \cdot \vec{e}_\beta = \sqrt{\rho_{\alpha\beta}} a_\alpha^\alpha a_\beta^\beta, \quad \text{itp.} \quad (11)$$

$$\cos \varphi_{ij} = \frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{ii} g_{jj}}} = g_{ij} \frac{\Delta \xi^i}{\Delta s} \frac{\Delta \xi^j}{\Delta s}, \quad (12)$$

$$\vec{e}_\alpha \times \vec{e}_\beta \doteq \epsilon_{\alpha\beta\gamma} (\vec{e}_\alpha^\gamma \cos^{-1} \beta^\gamma), \quad (\vec{e}_\alpha^\alpha \cos^{-1} \beta^\alpha) \times (\vec{e}_\beta^\beta \cos^{-1} \beta^\beta) \doteq \epsilon^{\alpha\gamma} \vec{e}_\gamma, \quad (13)$$

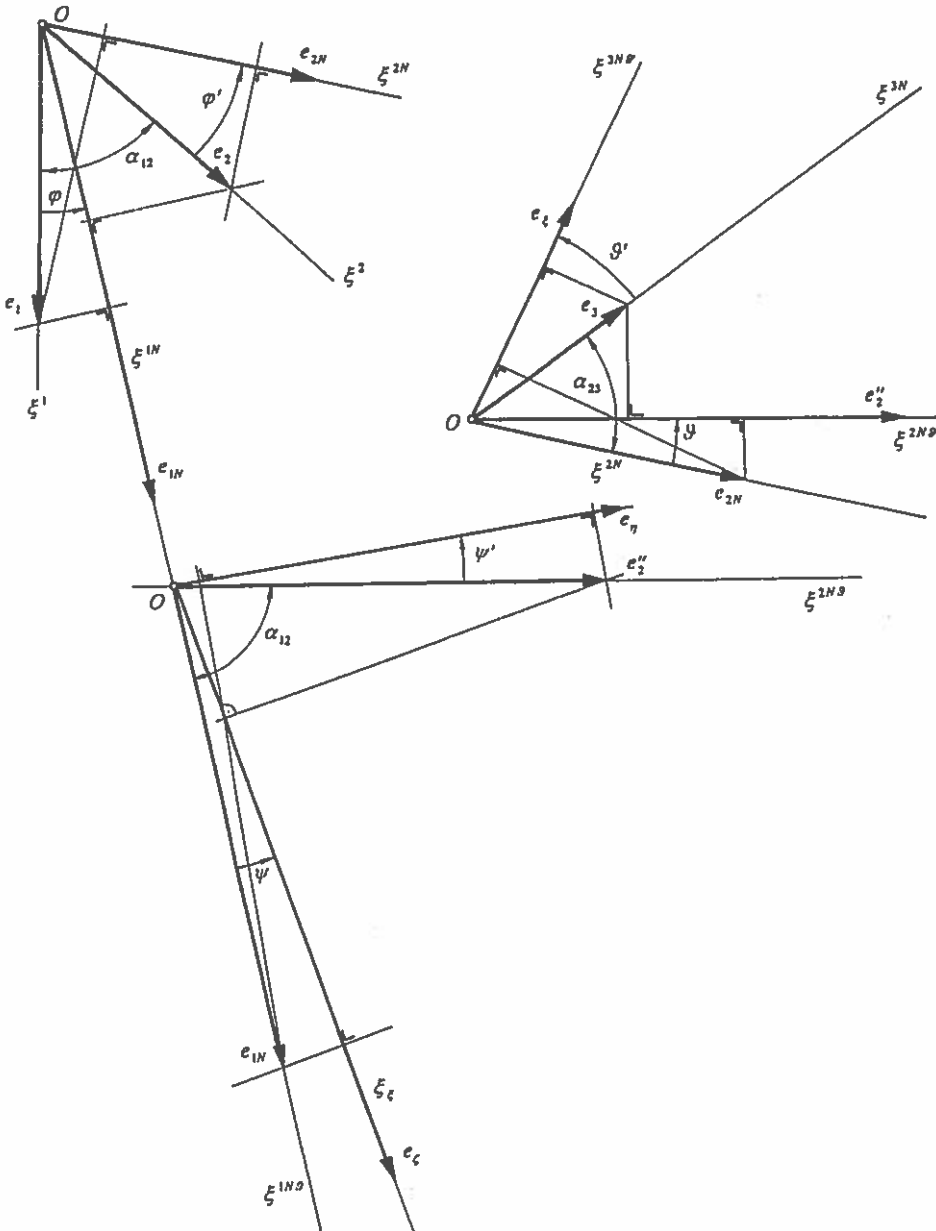
$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = \pm \sqrt{g}, \quad \vec{e}_\alpha^\gamma = \frac{\vec{e}_\alpha \times \vec{e}_\beta}{\pm \sqrt{g^{-1}} \cos \beta^\gamma},$$

$$|\vec{e}_\alpha \times \vec{e}_\beta| = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} (\vec{e}_\alpha^\gamma \cos^{-1} \beta^\gamma) = |\vec{e}_\alpha| |\vec{e}_\beta| |\sin(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta)|, \quad (14)$$

$$g^{\alpha\beta} \doteq \vec{e}_\alpha^\gamma \vec{e}_\beta^\gamma, \quad (15)$$

$$\vec{e}_\alpha^\alpha = \vec{e}_\gamma g^{\alpha\beta} (\alpha_{\gamma\beta}^\alpha)^\alpha, \quad \vec{e}_\alpha = \vec{e}_\mu^\mu g_{\mu\alpha} (\alpha_{\mu\alpha}^\mu)^\alpha, \quad (16)$$

$$a_\alpha^k = a_l g_{\alpha l}^{ik} (\alpha_{\alpha k}^k)^\alpha, \quad a_k = a_\mu^\mu g_{\mu k} (\alpha_{\mu k}^\mu)^\alpha,$$



Rys. 4. Zmienność wektorów bazy podstawowej przy przechodzeniu od węzła do węzła

gdzie:

$$(a_{nq}^p)^R \doteq (a_{nq}^p)^T = \frac{[\hat{a}_{nq}^p]^T}{|a_{nq}^p|} \quad (17)$$

$|a_{\alpha\beta}^p| \neq 0$ – wyznacznik macierzy $a_{\alpha\beta}^p$, $[\hat{a}_{\alpha\beta}^p]^T$ – transpozycja macierzy, której elementami są dopełnienia algebraiczne elementów macierzy $(\alpha_{\alpha\beta}^p)$.

$$\bar{e}_i \bar{e}_\alpha^i = |\bar{e}_i| |\bar{e}_\alpha^i| \sin(\varphi_{i,i+1} + \beta^i) = \alpha_{\alpha i}^i, \quad \bar{e}_i \bar{e}_\alpha^k = |\bar{e}_i| |\bar{e}_\alpha^k| \sin \beta^k = \alpha_{\alpha i}^k. \quad (18)$$

Na uwagę zasługuje fakt, że szczególnie ważną rzeczą jest obliczanie odległości daną zależnościami (10). Dla współrzędnych sferyczno – kulistych, mających zastosowanie w opisie przestrzeni stanu, o odległość przedstawiono w pracy [2]. Dalszym rozwinięciem tego zagadnienia jest podanie zmodyfikowanej dla potrzeb geometrii stanu metryki Kählera [1].

Literatura

1. KOSTYRKIN A.I., MAURIN J.I.: *Algebra liniowa i geometria*. PWN, Warszawa 1993.
2. MARCINIAK A.L.: *Wstępny opis roślinnego ośrodka słatkowego żdźbłowego*. Rozprawa habilitacyjna, Lublin 1995.

Streszczenie

W pracy wskazano na powiązania operatorów sumacyjnych z funkcjami Lagrange'a (ξ a także termodynamicznymi). Powiązanie to realizowane jest poprzez rozwiązanie równań wynikających ze słabych praw zachowania. Postać funkcji ξ wynikająca z silnych praw zachowania i samego rozwiązania wiąże obiekty odkształcenia oraz siłowe. Na jej kształt również duży wpływ będą miały wektory bazowe oraz metryka.

UWAGI ZWIĄZANE Z UŻYCIEM OPERATORÓW SUMACYJNYCH \sum_{Ω} , \sum_{Ω}

Cz. II. Związki z całkami

Andrzej L. Marciniak, Andrzej Fijolek
Katedra Maszyn i Urządzeń Rolniczych WTR, Akademia Rolnicza, Lublin
Jerzy Podgórski, Piotr Sieczka
Wydział Inżynierii Budowlanej i Sanitarnej, Politechnika Lubelska, Lublin

Synopsis: Zasadnicze zależności związane z analizą operatorów sumacyjnych są podobne jak używane w rachunku wektorowym.

Słowa kluczowe: Różniczka absolutna, operator sumacyjny liniowy, twierdzenia o *div*, *rot* i *grad*.

W objętości przestrzeni łanu $V(\mathcal{P}_L)$ każdemu punktowi (ξ^1, ξ^2, ξ^3) przypisana jest jedna n -ka liczb rzeczywistych. Temu punktowi ponadto przypisany jest wektor bądź wektory a także obiekty wyższych rzędów. Linie pola (pola prądu) wektorowego mają w każdym punkcie \vec{r} kierunek pola wektorowego $\vec{F}(\vec{r})$ i są określone równaniami

$$D\vec{r} \times F(\vec{r}) = 0, \quad D\xi^1 : D\xi^2 : D\xi^3 = F_{\xi^1} : F_{\xi^2} : F_{\xi^3}, \quad (1)$$

gdzie: $D(\cdot)$ – różniczki absolutne.

Względna gęstość linii pola w każdym obszarze (\vec{r}) jest proporcjonalna do wartości bezwzględnej $|\vec{F}(\vec{r})|$ pola wektorowego.

Dywergencja dowolnie różniczkowalnej diady A w przestrzeni Riemana jest to wektor $\nabla \cdot \vec{a}$, gdzie operator ∇ działa jak wektor kowariantny. Będą tutaj zachodziły zależności [2] – diada $\nabla \cdot \vec{a}$ jest gradientem wektora \vec{a} (*grad* \vec{a})

$$\begin{aligned} \nabla(\alpha \vec{A}) &= \alpha \nabla \vec{A} + \vec{A} \nabla \alpha, & \nabla(\vec{a} \cdot \vec{A}) &= (\nabla \alpha) \cdot \vec{A} + (\nabla \vec{A}^T) \cdot \vec{a}, \\ \nabla(\vec{A} \cdot \vec{a}) &= (\nabla \vec{a}) \cdot \vec{A}^T + (\nabla \vec{A}) \cdot \vec{a}, \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie: $(\cdot)^T$ – macierz transponowana.

Następnie

$$\begin{aligned} \sum_{\Omega} \nabla \otimes \Delta \Omega &= \sum_{\Omega} \Delta \vec{A} \cdot \otimes, & \sum_{\Omega} \nabla \vec{a} \Delta V &= \sum_{\Omega} \Delta \vec{A} \vec{a}, & \sum_{\Omega} \nabla \times \otimes \Delta \Omega &= \sum_{\Omega} \Delta \vec{A} \times \otimes, \\ \sum_{\Omega} \nabla [\otimes \vec{a}] \Delta \Omega &= \sum_{\Omega} \Delta \vec{A} [\otimes \vec{a}], & \sum_{\Omega} \Delta \vec{A} [\nabla \times \otimes] &= \sum_{\Omega} \Delta \vec{r} \times \otimes \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie: \sum_{Ω} – suma liniowa będąca odpowiednikiem całki liniowej.

Niech dwuwymiarowa przestrzeń Riemana \mathcal{R} będzie „zanurzona” w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej E^3 . Można wówczas mówić o porównaniu wektorów na powierzchni (tj. ich rzutów na powierzchnię styczną) w różnych punktach sąsiednich. Dla sum oznaczonych będzie

$$\sum_{ab} \vec{r}(t) \Delta s = \lim_{\max(s_i - s_{i-1}) \rightarrow 0} \sum_{(i=1) \rightarrow (i=m)} \frac{D\vec{r}(\vec{s}_i)}{\Delta s} (s_i - s_{i-1}) \quad (4)$$

gdzie: ab – oznacza łuk,

$$a = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_m = b, \quad s_{i-1} \leq \bar{s} \leq s_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{\varphi^k} \bar{v}(s) \Delta s = \sum_{\varphi^k} \bar{e}_1 v_1^1(s) \Delta s + \sum_{\varphi^k} \bar{e}_2 v_2^2(s) \Delta s + \sum_{\varphi^k} \bar{e}_3 v_3^3(s) \Delta s, \quad (5)$$

gdzie: $v_i^j(s) \Delta s$ – rzuty wektorów \bar{v} na osie ξ^j .

Dla przestrzeni trójwymiarowej będzie

$$\sum_{\bar{c}} \Delta \bar{r} \times \bar{F}(\bar{r}) = \sum_{\bar{c}} \frac{D\bar{r}}{\Delta s} \times \bar{F}(\bar{r}) \Delta s =$$

$$= \sum_{\bar{c}} \left[\bar{e}_1 \left(\bar{F}_3 \frac{D\xi^2}{\Delta s} - \bar{F}_2 \frac{D\xi^3}{\Delta s} \right) + \bar{e}_2 \left(\bar{F}_1 \frac{D\xi^3}{\Delta s} - \bar{F}_3 \frac{D\xi^1}{\Delta s} \right) + \bar{e}_3 \left(\bar{F}_2 \frac{D\xi^1}{\Delta s} - \bar{F}_1 \frac{D\xi^2}{\Delta s} \right) \right] \Delta s \quad (6)$$

Element powierzchniowy ΔA można wektorowo przedstawić następująco

$$\Delta A = \left(\frac{D\bar{r}}{\Delta u} \times \frac{D\bar{r}}{\Delta v} \right) \Delta u \Delta v = \left[\bar{e}_1 \left(\frac{D\xi^2}{\Delta u} \frac{D\xi^3}{\Delta v} - \frac{D\xi^3}{\Delta u} \frac{D\xi^2}{\Delta v} \right) + \right.$$

$$\left. + \bar{e}_2 \left(\frac{D\xi^3}{\Delta u} \frac{D\xi^1}{\Delta v} - \frac{D\xi^1}{\Delta u} \frac{D\xi^3}{\Delta v} \right) + \bar{e}_3 \left(\frac{D\xi^1}{\Delta u} \frac{D\xi^2}{\Delta v} - \frac{D\xi^2}{\Delta u} \frac{D\xi^1}{\Delta v} \right) \right] \Delta u \Delta v \quad (7)$$

natomiast wyrażony skalarnie przyjmie postać

$$\Delta A = \pm |\Delta \bar{A}| = \pm \left| \frac{D\bar{r}}{\Delta u} \times \frac{D\bar{r}}{\Delta v} \right| \Delta u \Delta v = \pm \sqrt{a(u, v)} \Delta u \Delta v.$$

Wreszcie zasadnicze operatory różniczkowe zapisane operatorami sumującymi będą miały następujące postaci

$$\text{grad} \Phi(\bar{r}) \doteq \nabla \cdot \Phi = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sum_{\Pi_1} \Delta A \Phi(\bar{s})}{\sum_{\Omega_1} \Delta \Omega},$$

$$\text{div} \bar{F}(\bar{r}) \doteq \nabla \cdot \bar{F} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sum_{\Pi_1} \Delta \bar{A} \cdot \bar{F}(\bar{\rho})}{\sum_{\Omega_1} \Delta \Omega}, \quad (8)$$

$$\text{rot} \bar{F}(\bar{r}) \doteq \nabla \times \bar{F} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sum_{\Pi_1} \Delta \bar{A} \times \bar{F}(\bar{\rho})}{\sum_{\Omega_1} \Delta \Omega},$$

gdzie: δ – promień obszaru Π_1 .

Przedstawione pola nie zależą od wyboru układu współrzędnych.

Różniczka zupełna funkcji skalarnej ma postać

$$D\Phi \doteq \phi \Big|_{\xi^1} \Delta \xi^1 + \dots = \Delta \bar{r} \text{grad} \phi = (\Delta \bar{r} \cdot \nabla) \phi = \Delta \bar{r}_{\xi^1} \frac{D\phi}{D\xi^1} + \Delta \bar{r}_{\xi^2} \frac{D\phi}{D\xi^2} + \Delta \bar{r}_{\xi^3} \frac{D\phi}{D\xi^3}, \quad (9)$$

gdzie: \vec{r}_i , rzuty wektora \vec{r} na współrzędne ξ^i .

Natomiast różniczka zupełna funkcji wektorowej przyjmuje postać

$$(\vec{G}\nabla)\vec{F} \doteq G_{\xi^1} \frac{D\vec{F}}{\Delta\xi^1} + G_{\xi^2} \frac{D\vec{F}}{\Delta\xi^2} + G_{\xi^3} \frac{D\vec{F}}{\Delta\xi^3} = \vec{e}_1(\vec{G}\nabla\vec{F}_{\xi^1}) + \vec{e}_2(\vec{G}\nabla\vec{F}_{\xi^2}) + \vec{e}_3(\vec{G}\nabla\vec{F}_{\xi^3}) \quad (10)$$

Przyrost kowariantny kierunkowy ma postać

$$\frac{D\Phi}{\Delta s} \doteq \cos\alpha_{\xi^1} \phi \Big|_{\xi^1} + \cos\alpha_{\xi^2} \phi \Big|_{\xi^2} + \dots = (\vec{u} \cdot \nabla)\Phi. \quad (11)$$

Z zależnościami (8.3) związane są następujące fakty. Niech będzie

$$\nabla \times \vec{F}(\vec{r}) = \frac{D\vec{F}_{\xi^2}}{\Delta\xi^3} - \frac{D\vec{F}_{\xi^3}}{\Delta\xi^2} = \frac{DF_{\xi^2}}{\Delta\xi^1} - \frac{DF_{\xi^3}}{\Delta\xi^1} = \frac{DF_{\xi^1}}{\Delta\xi^2} - \frac{DF_{\xi^2}}{\Delta\xi^1} = 0. \quad (12)$$

Jeżeli Ω jest obszarem jednopójnym, to funkcja ϕ jest określona przez funkcję wektorową \vec{F} z dokładnością do stałej addytywnej. Gdy zamknięta droga całkowania C leżeć będzie w Ω , to suma krzywoliniowa

$$\sum_{\odot} \Delta\vec{\rho} \vec{F}(\vec{\rho}) = \sum_{\vec{q}\vec{r}} \Delta\vec{\rho} \vec{F}(\vec{\rho}) = -[\Phi(\vec{r}) - \Phi(\vec{a})] \quad (13)$$

będzie od drogi C niezależna. Suma krzywoliniowa $\sum_{\odot} \Delta\vec{\rho} \vec{F}(\vec{\rho})$ po określonej za-

mkniętej drodze C leżącej w Ω („krążenie” pola $\vec{F}(\vec{r})$ po linii C) będzie zerem. Zależność (13) oraz ostatnie stwierdzenie nie będą miały miejsca w przestrzeni stanu \mathcal{P}_L z racji jego zakrzywienia. Jeżeli Ω jest obszarem wielospójnym to funkcja ϕ może być wieloznaczną. Jeżeli

$$\frac{DF_{\xi^1}}{\Delta\xi^2} - \frac{DF_{\xi^2}}{\Delta\xi^1} = 0, \quad (14)$$

to jest to jednocześnie warunek konieczny i wystarczający aby wartość sumy krzywoliniowej

$$\sum_C [F_{\xi^1}(\xi^1, \xi^2) \Delta\xi^1 + F_{\xi^2}(\xi^1, \xi^2) \Delta\xi^2] \quad (15)$$

nie zależała od drogi sumowania. Funkcja znajdująca się pod operatorem sumacyjnym musi być przyrostem zupełnym dla niezależności drogi sumowania. Tak oczywiście nie będzie w przypadku przestrzeni stanu \mathcal{P}_L .

Gdy pole $-\vec{F}(\vec{r})$ jest gradientem $\nabla\phi(\vec{r})$ pewnej funkcji skalarnej funkcji położenia $\phi(\vec{r})$ uzyskuje się przyrost kowariantny zupełny.

$$D\vec{F} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \doteq F_{\xi^1} \Delta\xi^1 + F_{\xi^2} \Delta\xi^2 + F_{\xi^3} \Delta\xi^3 \doteq -D\vec{F} \cdot \nabla\Phi. \quad (16)$$

Funkcja ϕ jest potencjałem skalarnym pola wektorowego bezwirowego tj. takiego dla którego

$$\nabla \bar{F}(\bar{r}) = 0, \quad \frac{DF_{\xi^1}}{\Delta \xi^1} + \frac{DF_{\xi^2}}{\Delta \xi^2} + \frac{DF_{\xi^3}}{\Delta \xi^3} = 0. \quad (17)$$

Funkcja $\bar{F}(\bar{r})$ jest bezźródłową wówczas, gdy $\bar{F}(\bar{r})$ jest rotacją $\nabla \times \bar{A}(\bar{r})$ wektorowej funkcji położenia $\bar{A}(\bar{r})$ będącej potencjałem wektorowym pola \bar{F} .

Znajdowanie funkcji \bar{F} sprowadza się więc do rozwiązywania równań sumacyjno – różnicowych.

W przestrzeni stanu \mathcal{P}_L z racji obecności obiektu krzywizny nie będą zachodzić następujące dwa twierdzenia.

Twierdzenie Helmholtza: Jeżeli w każdym punkcie (\bar{r}) obszaru Ω dane są *div* i *rot* funkcji wektorowej \bar{F} , to wiąże się z tym, że w każdym punkcie (\bar{r}) funkcję \bar{F} można zastąpić sumą bezwirowej położenia \bar{F}_1 i bezźródłowej \bar{F}_2 tj.

$$\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2, \quad \nabla \times \bar{F}_1 = \bar{0}, \quad \nabla \cdot \bar{F}_2 = 0 \quad (18)$$

Twierdzenie drugie: Przy dodatkowym założeniu, że w każdym punkcie powierzchni jest dana składowa normalna $\bar{F}(\bar{r}) \cdot \frac{D\bar{A}}{|D\bar{A}|}$ funkcji \bar{F} , oraz funkcja \bar{F} jest określona

jednoznacznie (twierdzenie o jednoznaczności).

Natomiast będzie spełnione twierdzenie Stokesa

$$\sum_{\Pi} \Delta A (\nabla \times \bar{F}(\bar{r})) = \sum_{\odot} \Delta \bar{r} \bar{F}(\bar{r}). \quad (19)$$

Suma krzywoliniowa funkcji \bar{F} po zamkniętym konturze \odot jest równa strumieniowi pola wektorowego $\nabla \times \bar{F}$ przepływającego przez powierzchnię ograniczoną linią C ,

$$\sum_{\Pi} (\Delta A \times \nabla) \times \bar{F}(\bar{r}) = \sum_{\odot} \Delta \bar{r} \times \bar{F}(\bar{r}). \quad (20)$$

Powyższa zależność zachodzi dla wektora \bar{A} . Natomiast jeżeli funkcja F jest funkcją skalarną $F \doteq \phi$ to wówczas będzie zachodził związek

$$\sum_{\Pi} \Delta A \times (\nabla \phi(\bar{r})) = \sum_{\odot} \Delta \bar{r} \Phi(\bar{r}). \quad (21)$$

Związki pomiędzy sumami objętościowymi \sum_{Ω} a powierzchniowymi \sum_{Π} zostały zestawione w tab. 1.

Tabela 1. Zależności pomiędzy sumami objętościowymi i powierzchniowymi

Tw. o <i>div</i> (tw. Gaussa)	$\sum_{\Omega} \nabla \vec{F}(\vec{r}) \Delta \Omega = \sum_{\Pi} \Delta \vec{A} \vec{F}(\vec{r})$	$(\vec{a}) \in \Omega$	$\vec{b} \in \Pi$
Tw. o <i>rot</i>	$\sum_{\Omega} \nabla \times \vec{F}(\vec{r}) \Delta \Omega = \sum_{\Pi} \Delta \vec{A} \times \vec{F}(\vec{r})$	\vec{F} i ϕ mają przyrosty kowariantne	Warunkiem dostatecznym jest istnienie odpowiednich sum będących odpowiednikami całek
Tw. o <i>grad</i>	$\sum_{\Omega} \nabla \Phi(\vec{r}) \Delta \Omega = \sum_{\Pi} \Delta \vec{A} \phi(\vec{r})$		
Tw Greena	$\sum_{\Omega} \nabla \phi \nabla \psi \Delta \Omega + \sum_{\Omega} \psi \Delta \phi \Delta \Omega =$ $= \sum_{\Pi} \Delta \vec{A} \cdot \vec{A} (\psi \nabla \phi) = \sum_{\Pi} \psi \frac{D\phi}{\Delta u} \Delta \vec{A}$ $\sum_{\Omega} (\psi \Delta \phi - \phi \Delta \psi) \Delta \Omega =$ $= \sum_{\Pi} \Delta \vec{A} \cdot (\psi \nabla \phi - \phi \nabla \psi) =$ $= \sum_{\Pi} \left(\psi \frac{D\phi}{\Delta u} - \phi \frac{D\psi}{\Delta u} \right) \Delta \vec{A}$	Operacja <i>div</i> obniża o jeden rząd obiektu. Funkcje ϕ i ψ posiadają drugie przyrosty kowariantne.	
Przypadki szczególne	$\sum_{\Omega} \Delta \phi \Delta \Omega = \sum_{\Pi} \Delta \vec{A} \Delta \phi = \sum_{\Pi} \frac{D\phi}{\Delta u} \Delta \vec{A}$ <p>Twierdzenie Gaussa</p> $\sum_{\Omega} \nabla \phi ^2 \Delta V + \sum_{\Omega} \phi \Delta \phi \Delta \Omega =$ $= \sum_{\Pi} \Delta \vec{A} (\phi \nabla \phi) = \sum_{\Pi} \phi \frac{D\phi}{\Delta u} \Delta \vec{A}$		

Literatura

- FRĄCKIEWICZ H.: *Mechanika ośrodków siatkowych*. PWN, Warszawa 1970.
- KARAŚKIEWICZ E.: *Zarys teorii wektorów i tensorów*. PWN, Warszawa 1979.
- MARCINIAK A.L.: *Wstępny opis roślinnego ośrodka siatkowego żdźbłowego*. Rozprawa habilitacyjna, Lublin 1995.

Streszczenie

Przedstawiono zasadnicze wzory przeniesione z analizy wektorów do rachunku związanego z przyrostami kowariantnymi. Zwrócono uwagę na nie zachodzenie pewnych twierdzeń (Helmholta i o jednoznaczności) w przypadku, gdy przestrzeń będzie zakrzywiona. Twierdzenia o *div*, *rot* i *grad* będą wyrażały się podobnie.

DYNAMIKA SIATKI ROŚLINNEJ

Cz. I. Wprowadzenie do obliczeń wariacyjnych

Andrzej L. Marciniak, Andrzej Fijolek
Katedra Maszyn i Urządzeń Rolniczych WTR, Akademia Rolnicza, Lublin
Jerzy Podgórski, Piotr Sieczka
Wydział Inżynierii Budowlanej i Sanitarnej, Politechnika Lubelska, Lublin

Synopsis: Jako wprowadzenie do obliczeń wariacyjnych należy zdefiniować współrzędne w zmiennej przestrzeni (12). Chodzi zatem o zdefiniowanie przyrostów współrzędnych.

Słowa kluczowe: Współrzędne Lagrange'a i Eulera, funkcjonal działania, funkcja materiałowa, parametry ruchu.

Dla potrzeb budowy: słabych i silnych praw zachowania, warunków niezmienniczości oraz przestrzennego tj. we współrzędnych Eulera, przedstawienia zagadnienia potrzebne jest zdefiniowanie ujęcia wariacyjnego.

W stanie naturalnym, tj. w przestrzeni $\mathcal{P}_2(t = t_0)$ położenie punktów ośrodka \mathcal{B} wyznaczać będzie wektor $\vec{r}_z = (\Xi_1^z, \Xi_2^z, \Xi_3^z)$. Będzie to jednocześnie konfiguracja odniesienia. Współrzędne Ξ_A^z ($A = 1, 2, 3$ dla $n = 3$) będą zatem identyfikować punkty materialne, są po prostu ich numerami. Ale nie tylko. Dzięki odpowiednio zdefiniowanym współrzędnym Ξ_A^z będzie można opisać zmiany w strukturze ośrodka a także szeroko rozumiane pola zewnętrzne. Punkty te w chwilach $t > t_0$ tworzą konfiguracje ośrodka \mathcal{B} w przestrzeni, zapisane jako

$$\vec{\xi} = \vec{\xi}(\vec{\Xi}, t) = \xi_i(\Xi_a^z, t) \vec{e}'_i = \zeta_i(\Xi_a^z, t) \vec{e}''_i, \quad (1)$$

gdzie: $\{\Xi_a^z\}$ – układ współrzędnych materialnych – wraz z t są to współrzędne niezależne,

$\{\xi_i\}$ – układ dynamicznych makro-współrzędnych przestrzennych,

$\{\zeta_i\}$ – układ dynamicznych mikro-współrzędnych przestrzennych.

Oznaczenie ξ_i^z bądź Ξ_a^z mówi, że różnoindeksowe składowe kowariantne i kontrawariantne nie są ortogonalne i że w wartości owej różnicy między tak definiowanym kierunkiem kowariantnym a ortogonalnym do kontrawariantnego tkwić będą pewne wielkości trudnodefiniowalne, istotnie wpływające na zachowanie się ośrodka [1].

A zatem odcinek materialny $d\vec{\Xi}$ łączący dwa wyróżnione punkty materialne – dwie cząstki – w wyniku ruchu a w tym także deformacji, przekształca się w odcinek $d\vec{\xi}(\vec{\Xi}, t)$. Zatem punkt w danej konfiguracji opisze wektor $\vec{r}_z = (\xi_1^z, \xi_2^z, \xi_3^z)$. Przejście $d\vec{\Xi} \rightarrow d\vec{\xi}$ opisują zależności

$$\begin{aligned} \xi_{\bullet}^i &= \xi_{\bullet}^i(\Xi_{\bullet}^1, \Xi_{\bullet}^2, \Xi_{\bullet}^3, t), & \Xi_{\bullet}^j &= \Xi_{\bullet}^j(\Xi_{\bullet}^1, \Xi_{\bullet}^2, \Xi_{\bullet}^3, t) \\ \Xi_{\bullet}^j &\in \mathcal{G}_{\Xi}, & \xi_{\bullet}^i &\in \mathcal{G}_{\xi}, & J &= \left| \begin{matrix} \xi_{\bullet}^1 & \dots & \xi_{\bullet}^n \\ \Xi_{\bullet}^1 & \dots & \Xi_{\bullet}^n \end{matrix} \right|. \end{aligned} \quad (2)$$

Można zatem zapisać

$$\begin{aligned} \vec{r}_{\xi} - \vec{r}_{\Xi} = \vec{u}, \quad \xi_{\bullet}^i - \Xi_{\bullet}^i = u_{\bullet}^i, \quad \xi_{\bullet}^i &= \Xi_{\bullet}^i + u_{\bullet}^i(\Xi_{\bullet}^1, \Xi_{\bullet}^2, \Xi_{\bullet}^3, t) \text{- opis Lagrange'a,} \\ \Xi_{\bullet}^j &= \xi_{\bullet}^j - u_{\bullet}^j(\xi_{\bullet}^1, \xi_{\bullet}^2, \xi_{\bullet}^3, t) \text{- opis Eulera.} \end{aligned} \quad (3)$$

Tensory odkształcenia przyjmą dwie postaci:

w opisie Lagrange'a

- tensor Greena

$$e_{\bullet\bullet}^{jk} = \frac{1}{2} \left(g_{\bullet\bullet}^{jl} V_l|_k + \alpha_{\bullet l}^k V_{\bullet}^l|_j + \alpha_{\bullet l}^j V_{\bullet}^l|_k \right) \quad (4)$$

- tensor obrotu Lagrange'a

$$j_{\bullet\bullet}^{ij} = \frac{1}{2} \left(g_{\bullet\bullet}^{im} V_m|_l - \alpha_{\bullet m}^j V_{\bullet}^m|_m - \alpha_{\bullet m}^m V_{\bullet}^m|_m V_m|_l \right) \quad (5)$$

- przyrost współrzędnej

$$\Delta \xi_{\bullet}^i = (\delta_j^i + e_{\bullet\bullet}^{ij} + \gamma_{\bullet\bullet}^{ij}) \Delta \Xi_{\bullet}^j, \quad (6)$$

w opisie Eulera

- tensor Almansiego - Cauchy'ego

$$\mathfrak{n}_{\bullet\bullet}^{JK} = \frac{1}{2} \left(g_{\bullet\bullet}^{JL} V_L|_k + \alpha_{\bullet L}^K V_{\bullet}^L|_j - \alpha_{\bullet L}^L V_{\bullet}^L|_j V_L|_k \right) \quad (7)$$

- tensor obrotu Eulera

$$\mathfrak{k}_{\bullet\bullet}^{IJ} = \frac{1}{2} \left(g_{\bullet\bullet}^{IM} V_M|_l - \alpha_{\bullet M}^J V_{\bullet}^M|_m + \alpha_{\bullet M}^M V_{\bullet}^M|_m V_M|_l \right) \quad (8)$$

- przyrost współrzędnej

$$\Delta \Xi_{\bullet}^i = (\delta_j^i - \eta_{\bullet\bullet}^{ij} - \kappa_{\bullet\bullet}^{ij}) \Delta \xi_{\bullet}^j. \quad (9)$$

Odształcenia (4), (5) i (7), (8) są związane bezpośrednio z obiektami odkształcenia całkowitego [1].

Współrzędne ξ_{\bullet}^i i Ξ_{\bullet}^j są elementami zbioru tworzącego przestrzeń funkcyjną ośrodka. Każdemu takiemu elementowi jest przypisana liczba ([3], s.222)

$$W_{\Omega}(\psi_{\bullet}^{\alpha}(\Xi_{\bullet}^{\alpha}, t)) \doteq \sum_{\Omega \times \dots \times \mathcal{T}} \mathcal{E} \Delta \Omega \dots \Delta t. \quad (10)$$

gdzie: \mathcal{E} jest funkcją opisującą właściwości dynamiczne ośrodka. Funkcja ta musi mieć budowę odpowiadającą rzeczywistym cechom badanego ciała. Musi być zatem zgodna z wynikami badań. Stanowi ona podstawę do klasyfikacji materiałów. Ponadto wynikają z niej słabe i silne prawa zachowania a także warunki niezmienniczości. Te ostatnie nakładają na nią analityczne ograniczenia. Ponieważ rozwiązanie równań będących słabymi prawami zachowania może być przedstawione w postaci obiektów siłowych

więc w gruncie rzeczy związek funkcji \mathcal{L} z tymi obiektami jak się okaże będzie treścią równań konstytutywnych.

Funkcję \mathcal{L} tworzą: zmienne dynamiczne ψ_{α}^k , zmienne niezależne Ξ_{α}^k i t oraz pochodne zmiennych dynamicznych względem zmiennych niezależnych. Zmienne dynamiczne ψ_{α}^k są warunkami koniecznymi istnienia ekstremum funkcjonału (10).

Z zasady stacjonarności wynika, że ta część wariacji δW_{Ω} , która wynika z wpływu na nią funkcji dynamicznych będzie równa siłom zewnętrznym przyjętym ze znakiem minus.

Wariacje współrzędnych ξ_{α}^k i Ξ_{α}^k będą przedstawione jako sumy szeregu Taylora

$$\begin{aligned} f(\xi_1 + h_1, \xi_2 + h_2, \dots, \xi_n + h_n) - f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \\ = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \left((\cdot) \Big|_{\xi_1} h_1 + (\cdot) \Big|_{\xi_2} h_2 + \dots + (\cdot) \Big|_{\xi_n} h_n \right)^k f + R_m. \end{aligned} \quad (11)$$

Różnicę (11) można zapisać następująco

$$\begin{aligned} f(\xi_1 + h_1, \xi_2 + h_2, \dots, \xi_n + h_n) - f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \\ = \left((\cdot) \Big|_{\xi_1} h_1 + (\cdot) \Big|_{\xi_2} h_2 + \dots + (\cdot) \Big|_{\xi_n} h_n \right) f + \frac{1}{2} \left((\cdot) \Big|_{\xi_1, \xi_1} h_1^2 + (\cdot) \Big|_{\xi_1, \xi_2} h_1 h_2 + \dots + (\cdot) \Big|_{\xi_n, \xi_n} h_n^2 + \right. \\ \left. + (\cdot) \Big|_{\xi_1, \xi_2} h_1 h_2 + (\cdot) \Big|_{\xi_1, \xi_3} h_1 h_3 + (\cdot) \Big|_{\xi_1, \xi_4} h_1 h_4 + \dots \right. \\ \left. \dots + (\cdot) \Big|_{\xi_1, \xi_n} h_1 h_n + (\cdot) \Big|_{\xi_2, \xi_1} h_2 h_1 + (\cdot) \Big|_{\xi_2, \xi_3} h_2 h_3 + (\cdot) \Big|_{\xi_2, \xi_4} h_2 h_4 + \dots \right. \\ \left. \dots + (\cdot) \Big|_{\xi_2, \xi_n} h_2 h_n + (\cdot) \Big|_{\xi_3, \xi_1} h_3 h_1 + \dots + (\cdot) \Big|_{\xi_{n-1}, \xi_n} h_{n-1} h_n + (\cdot) \Big|_{\xi_n, \xi_{n-1}} h_n h_{n-1} \right) f. \end{aligned} \quad (11.1)$$

Biorąc pod uwagę zależności przyrosty kowariantne zapisane jako

$$\begin{aligned} \left(f_{\bar{\xi}}^{\bar{\xi}} \Big|_{mn} - f_{\bar{\xi}}^{\bar{\xi}} \Big|_{nm} \right) \bar{e}_{\bar{\xi}}^{\bar{\xi}} \Delta \xi_{\alpha}^m \Delta \xi_{\alpha}^n = \bar{\Delta}_{mn} \bar{f} = (f_{\bar{\xi}}^{\bar{\xi}} + \Delta f_{\bar{\xi}}^{\bar{\xi}}) \mathfrak{M}_{\bar{\xi}, mn}^r \bar{e}_{\bar{\xi}}^{\bar{\xi}} \Delta \xi_{\alpha}^m \Delta \xi_{\alpha}^n, \\ \left(f_{\bar{\xi}}^{\bar{\xi}} \Big|_{mn} - f_{\bar{\xi}}^{\bar{\xi}} \Big|_{nm} \right) \bar{e}_{\bar{\xi}}^{\bar{\xi}} \Delta \xi_{\alpha}^m \Delta \xi_{\alpha}^n = \bar{\Delta}_{mn} \bar{f} = (f_{\bar{\xi}}^{\bar{\xi}} + \Delta f_{\bar{\xi}}^{\bar{\xi}}) \mathfrak{S}_{r, mn}^{\bar{\xi}} \bar{e}_{\bar{\xi}}^{\bar{\xi}} \Delta \xi_{\alpha}^m \Delta \xi_{\alpha}^n, \end{aligned} \quad (11.2)$$

więc występujące we wzorze (11) sumy drugich pochodnych kowariantnych będzie można zapisać jako

$$\left((\cdot) \Big|_{ij} + (\cdot) \Big|_{ji} \right) h_i h_j = \left(2(\cdot) \Big|_{ij} + ((\cdot) + \Delta(\cdot)) \mathfrak{M}_{(\cdot), mn}^r \right) h_i h_j = \left(2(\cdot) \Big|_{ij} + ((\cdot) + \Delta(\cdot)) \mathfrak{S}_{r, ij}^{(\cdot)} \right) h_i h_j. \quad (11.3)$$

gdzie: $\mathfrak{M}_{\bar{\xi}, mn}^r$, $\mathfrak{S}_{r, mn}^{\bar{\xi}}$ – obiekty krzywizny.

Funkcja \mathcal{L} mimo skończoności przyrostów jej argumentów może być ciągłą. Jednak zawsze nie musi tak być. Dlatego też lepiej będzie, uwzględniając wariacje: $\delta \Xi_{\alpha}^k$ – zmiennych niezależnych, gdzie np. $\delta \Xi_{\alpha}^k = \delta t$, a następnie $\delta \psi_{\alpha}^k$ – zmiennych zależnych oraz $\delta \mathcal{L}$ – funkcji materiałowej, do ich tworzenia brać również ich wyrazy nieliniowe.

Funkcje $\tilde{\psi}_\alpha^a(\tilde{\Xi}_\alpha^A)$, wystąpią w przestrzeni $\tilde{\mathcal{F}}_\Sigma = \tilde{\Omega} \times \tilde{T} = (\Omega + \Delta\Omega) \times (T + \Delta T)$ i są w tej przestrzeni definiowane przez ciągi funkcji $\tilde{\psi}_\alpha^1, \dots, \tilde{\psi}_\alpha^N$ określonych w $\tilde{\mathcal{F}}_\Sigma$ wraz z pochodnymi. Dla takiego przekształcenia wystąpi najmniejsza liczba m jego parametrów. Będzie zatem

$$\begin{aligned} \varepsilon^a; \quad a = 1, \dots, m, \quad \varepsilon^a = \varepsilon, \varepsilon^k, \varepsilon^{kl}, \\ \tilde{\Xi}_\alpha^A = \tilde{\Xi}_\alpha^A(\Xi_\alpha^B, \varepsilon^a), \quad \tilde{\Xi}_\alpha^A(\Xi_\alpha^B, 0) \doteq \Xi_\alpha^A, \quad (\tilde{\Xi}_\alpha^A, \Xi_\alpha^A) \in \mathcal{F}_\Sigma^N, \\ \tilde{\psi}_\alpha^a = \tilde{\psi}_\alpha^a(\psi_\alpha^B, \varepsilon^a), \quad \tilde{\psi}_\alpha^a(\psi_\alpha^B, 0) \doteq \psi_\alpha^a, \quad (\tilde{\psi}_\alpha^a, \psi_\alpha^a) \in \mathcal{F}_\Sigma^N. \end{aligned} \quad (12)$$

Jeżeli w rozwinięciach wariacji $\delta\psi_\alpha^k$ i $\delta\Xi_\alpha^A$ uwzględnimy wyższe, nieliniowe wyrazy, to wówczas należy do liczby parametrów dodać iloczyny i potęgi $\varepsilon, \varepsilon^k$ oraz ε^{kl} , które wówczas staną się nowymi parametrami.

Przyjmuje się, że parametry $\varepsilon, \varepsilon^k, \varepsilon^{kl}$ są niezależne od współrzędnych Ξ_α^k, t chociaż, jak to wynika z drugiego twierdzenia E. Noether, mogą one być dowolnymi funkcjami.

Dla przekształceń tworzących grupę będzie można zapisać [2 + 7]

$$\xi_\alpha^{k'} = Q_k^k \xi_\alpha^k + \varepsilon_\alpha^k, \quad t' = t + \varepsilon, \quad (13)$$

gdzie: $\varepsilon_\alpha^k \doteq V_\alpha^k$, $Q_k^k \doteq \varepsilon_{\alpha\alpha}^{k'} \doteq {}^\Omega \mathcal{G}_\Phi$, ${}^\Omega \mathcal{L}_\Phi, \varphi_\Phi$.

Należy pamiętać, że $\bar{\mathcal{G}} = {}^\nu \bar{\mathcal{G}} + {}^\Omega \bar{\mathcal{G}} = \bar{\mathcal{G}}_\Phi + \bar{\mathcal{G}}_\Psi + \bar{\mathcal{G}}_\Lambda$ – jest częścią antysymetryczną odkształceń. Natomiast $\bar{\mathcal{L}} = {}^\Omega \bar{\mathcal{L}}_\Phi + {}^\Omega \bar{\mathcal{L}}_\Psi + {}^\Omega \bar{\mathcal{L}}_\Lambda$ i φ_k , gdzie $(\Phi, \Psi, \Lambda) = k$ to część symetryczna odkształcenia oraz skręcenie. Wielkości te powiązane są poprzez wektor przemieszczenia $\bar{\nu}$ oraz wektory baz z np. fotograficznymi wynikami pomiarów.

Literatura

1. MARCINIAK A.: *Wstępny opis roślinnego ośrodka siatkowego – źdźbłowego*. Rozprawa habilitacyjna, Lublin 1995.
2. WOŹNIAK C.: *Ośrodki ciągłe z mikrostrukturą. Metody Geometryczne w Fizyce i Technice*. PWN, Warszawa 1968.
3. WOŹNIAK C.: *Podstawy dynamiki ciał odkształcalnych*. PWN, Warszawa 1969.
4. WOŹNIAK C.: *Wstęp do mechaniki analitycznej kontinuum materialnego. Dynamika układów sprężystych*. Ossolineum, Wrocław 1976.
5. WOŹNIAK C.: *Podstawy mechaniki ciał dyskretyzowanych*. Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 11, 1973.
6. WOŹNIAK C.: *Więzy w mechanice ciał odkształcalnych*. Ossolineum, Wrocław 1988.
7. WOŹNIAK C., KLEIBER M.: *Nieliniowa mechanika konstrukcji*. PWN, Warszawa 1982.

Streszczenie

Przedstawiono definicje współrzędnych a także obiektów odkształcenia w opisie Lagrange'a i Eulera. Przedstawiono także definicję funkcjonalu działania W_Ω oraz zdefiniowano sposób obliczania przyrostów funkcji a także współrzędnych (12). Zdefiniowano także przekształcenie współrzędnych, gdzie macierz $Q_{.k}^{k'} \doteq \varepsilon_{\alpha\alpha}^{k'}$ wyrażono przez antysymetryczną $\bar{\mathcal{G}}$, symetryczną $\bar{\mathcal{L}}$ część odkształcenia oraz skręcenie φ .

DYNAMIKA SIATKI ROŚLINNEJ

Cz. II. Obliczanie wariacji funkcjonału działania

Andrzej L. Marciniak, Andrzej Fijolek
Katedra Maszyn i Urządzeń Rolniczych WTR, Akademia Rolnicza, Lublin
Jerzy Podgórski, Piotr Siczka
Wydział Inżynierii Budowlanej i Sanitarnej, Politechnika Lubelska, Lublin

Synopsis: Wyliczenie wariacji funkcjonału działania jest podstawowym elementem opisu ośrodka. Tutaj należy zwrócić uwagę na konieczność wprowadzenia pewnych uproszczeń, które umożliwią będą przeprowadzenie rachunków.

Słowa kluczowe: Funkcjonał działania, wariacja funkcjonału działania.

Zagadnienie obliczania wariacji funkcjonału działania jest niejako centralnym problemem mechaniki ośrodków. W przypadku ośrodków rolniczych szczególne miejsce w tym problemie zajmuje dokładność wyliczeń związana z założeniem o nieinfinitezymalności parametrów ruchu. Należy tutaj mieć również na uwadze sprawdzenie, czy zbiór zależności stanowiących przekształcenie ma własność grupy. Własność grupy dlatego jest tak ważna, że zapewnia iloczyn przekształceń oraz ich odwrotność. Jeżeli zatem $\varepsilon_{\sigma}^k, \varepsilon_{m\sigma}^l \neq 0$, to wówczas nie istnieje możliwość bezpośredniego powrotu do stanu wyjściowego. Tak więc brak właściwości grupy powodować będzie olbrzymie komplikacje.

W przestrzeni $\tilde{\mathcal{G}}_x$ należy zatem utworzyć funkcjonal

$$W_{\tilde{\Omega}}(\tilde{\psi}^a) \doteq \sum_{\tilde{\Omega}} \mathcal{L} \left(\tilde{\Xi}^A, \tilde{\psi}^a(\tilde{\Xi}^B), \tilde{\psi}^a \left(\tilde{\Xi}^B \Big|_{\tilde{\Xi}^C} \right) \right) \Delta \tilde{\Omega}, \quad \Delta \tilde{\Omega} \doteq \Delta \tilde{\Xi}^1 \Delta \tilde{\Xi}^2 \Delta \tilde{\Xi}^3. \quad (1)$$

Ponieważ przyjęto, że parametry są wielkościami stałymi, więc dla obliczeń wariacji współrzędnych Ξ^A i ψ^a należy owe parametry uzmiennić przy kowariantnym różniczkowaniu tychże współrzędnych względem ε^a . Stalość parametrów należy rozumieć jako stalość formuły ich przekształcenia. Np. macierz przekształcenia katów Eulera jest ważna w każdym punkcie przestrzeni łanu.

Ustalając, że $\varepsilon_{\sigma} = \delta t$ współrzędne niezależne $\tilde{\Xi}^A$ i zależne $\tilde{\psi}^a$ po rozwinięciu ich w szereg Taylora przyjmują postaci

$$\begin{aligned} \tilde{\Xi}^A &= \tilde{\Xi}^A(\tilde{\Xi}^A, \varepsilon^a) = \tilde{\Xi}^A + \tilde{\Xi}^A|_{\varepsilon^a}^0 \varepsilon^a + \frac{1}{2} [(\cdot)|_{\varepsilon^a}^0 \varepsilon^a]^2 \tilde{\Xi}^A, \\ \tilde{\psi}^a &= \tilde{\psi}^a(\tilde{\psi}^a, \varepsilon^a) = \tilde{\psi}^a + \tilde{\psi}^a|_{\varepsilon^a}^0 \varepsilon^a + \frac{1}{2} [(\cdot)|_{\varepsilon^a}^0 \varepsilon^a]^2 \tilde{\psi}^a, \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie: $\Phi^A|_{\varepsilon^a}^0 \doteq \left(\Phi^A|_{\varepsilon^a}^0 \right)_{\varepsilon=0}$, $(\cdot)|_{\varepsilon^a}^0 \varepsilon^a \doteq \Phi^A|_{\varepsilon^a}^0 \Big|_{\varepsilon^a}^0 \varepsilon^a \varepsilon^a$.

Wprowadzając dalsze oznaczenia

$$\begin{aligned}
\delta \Xi^A &= \tilde{\Xi}^A - \Xi^A = \delta \Xi^A = \delta \Xi^A(\Xi^B) \doteq \Xi^A|_{\epsilon^a} \epsilon^a + \frac{1}{2} [(\cdot)|_{\epsilon^a} \epsilon^a]^2 \Xi^A = \\
&= \Xi^A|_{V^k} V^k + \Xi^A|_{\mathcal{G}^k} \mathcal{G}^k + \Xi^A|_{\mathcal{L}^k} \mathcal{L}^k + \Xi^A|_{\varphi_k} \varphi_k + D^0 \Xi^A \epsilon + \\
&+ \frac{1}{2} \left[\Xi^A|_{(V^k)^2} (V^k)^2 + \Xi^A|_{(\mathcal{G}^k)^2} (\mathcal{G}^k)^2 + \Xi^A|_{(\mathcal{L}^k)^2} (\mathcal{L}^k)^2 + \Xi^A|_{\varphi_k^2} \varphi_k^2 + D^{0^2} \Xi^A \epsilon^2 \right]^2, \quad (3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_0 \psi^a &= \tilde{\psi}^a(\Xi^A) - \psi^a(\Xi^A) = \delta_0 \psi^a(\Xi^A) \doteq \psi^a|_{\epsilon^a} \epsilon^a + \frac{1}{2} [(\cdot)|_{\epsilon^a} \epsilon^a]^2 \Xi^A = \\
&= \psi^a|_{V^k} V^k + \psi^a|_{\mathcal{G}^k} \mathcal{G}^k + \psi^a|_{\mathcal{L}^k} \mathcal{L}^k + \psi^a|_{\varphi_k} \varphi_k + \\
&+ \frac{1}{2} \left[\psi^a|_{(V^k)^2} (V^k)^2 + \psi^a|_{(\mathcal{G}^k)^2} (\mathcal{G}^k)^2 + \psi^a|_{(\mathcal{L}^k)^2} (\mathcal{L}^k)^2 + \psi^a|_{\varphi_k^2} \varphi_k^2 \right]^2.
\end{aligned}$$

Użyte tutaj oznaczenia odkształceń omówiono w pracy [1].

Zmienna niezależna, która doznała zmiany $\tilde{\Xi}^A$ i funkcja czyli zmienna zależna, która doznała zmiany $\tilde{\psi}^k$ z powyższych zależności będą miały postaci

$$\tilde{\Xi}^A = \Xi^A + \delta \Xi^A, \quad \tilde{\psi}^a(\Xi^A) = \psi^a(\Xi^A) + \delta_0 \psi^a(\Xi^A) \quad (4)$$

Zastosowano tutaj następujące oznaczenia upraszczające zapis

$$\begin{aligned}
\psi^k(\Xi^A, t)|_{\Xi^B} &\doteq \psi^k|_K, \quad \psi^k|_D \doteq D\psi^k, \quad \mathcal{L}|_{\psi^k} \doteq \mathcal{L}|_K, \quad \mathcal{L}|_{\psi^k|\Xi^B} \doteq \mathcal{L}|_{K|K}, \\
D\mathcal{L}|_{\psi^k|\Xi^B} &\doteq D\mathcal{L}|_{K|K} \doteq D\mathcal{L}|_{K|K|D}, \quad \mathcal{L}|_{\Delta\psi^k|\Delta\psi^k} \doteq \mathcal{L}|_{(\Delta\psi^k)^2}, \quad \mathcal{L}|_{D\psi^k} \doteq \mathcal{L}|_{D_K}, \\
\mathcal{L}|_{\Delta\psi^k|\Xi^B} &\doteq \mathcal{L}|_{D_K|K}, \quad \mathcal{L}|_{\psi^k|\psi^k} \doteq \mathcal{L}|_{K^2}.
\end{aligned} \quad (5)$$

Następnie całkowita wariancja zmiennej niezależnej będzie różnicą funkcji, która doznała przyrostu o argumentie również posiadającym przyrost i funkcji bez przyrostu o argumentie również przyrostu pozbawionym, tj.

$$\delta \psi^a(\Xi^B) \doteq \tilde{\psi}^a(\tilde{\Xi}^A) - \psi^a(\Xi^A) \quad (6)$$

Alc

$$\tilde{\psi}^a(\tilde{\Xi}^A) = \tilde{\psi}^a(\Xi^A + \delta \Xi^A) = \tilde{\psi}^a(\Xi^A) + \tilde{\psi}^a(\Xi^A)|_B \delta \Xi^B + \frac{1}{2} \tilde{\psi}^a(\Xi^A)|_{B^2} (\delta \Xi^B)^2. \quad (7)$$

Podstawiając teraz (4.2) otrzymuje się

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}^a(\tilde{\Xi}^A) &= \psi^a(\Xi^A) + \delta_0 \psi^a(\Xi^A) + [\psi^a(\Xi^A) + \delta_0 \psi^a(\Xi^A)]|_B \delta \Xi^B + \\
&+ \frac{1}{2} [(\psi^a + \delta_0 \psi^a)|_{B^2} (\delta \Xi^B)^2] = \\
&= \underline{\psi^a + \delta_0 \psi^a + \psi^a|_B \delta \Xi^B + \delta_0 \psi^a|_B \delta \Xi^B} + \frac{1}{2} \psi^a|_{B^2} (\delta \Xi^B)^2 + \frac{1}{2} \delta_0 \psi^a|_{B^2} (\delta \Xi^B)^2.
\end{aligned} \quad (8)$$

Wyrazy podkreślone wystąpią w liniowej teorii ośrodków. Będzie zatem

$$\delta\psi_a^\alpha = \delta_o\psi_a^\alpha + \psi_a^\alpha|_B \delta\Xi_a^\beta + \delta_o\psi_a^\alpha|_B \delta\Xi_a^\beta + \frac{1}{2}\psi_a^\alpha|_B (\delta\Xi_a^\beta)^2 + \frac{1}{2}\delta_o\psi_a^\alpha|_B (\delta\Xi_a^\beta)^2, \quad (9)$$

gdzie: $A, B = 1, 2, 3, t$.

W dalszym ciągu przyjmuje się, że $\varepsilon^n = const$ i dlatego też można parametry wyносить przed znak całki.

Przyjmuje się, że zachodzi niezmienniczość przekształceń a wariacja całkowita będzie sumą

$$\delta W = \delta_o W + \delta_\Xi W, \quad (10)$$

gdzie: $\delta_o W$ – część wariacji dotycząca zmian współrzędnych dynamicznych ψ_a^α tj. zależnych,

$\delta_\Xi W$ – część wariacji dotycząca zmian współrzędnych niezależnych tj. Ξ_a^α .

Ograniczając się jedynie do pierwszych pochodnych, część wariacji funkcjonału działania \mathcal{L} dotycząca jedynie wariacji zmiennych dynamicznych, będzie można zapisać

$$\begin{aligned} \delta_o W &\doteq \sum_{\Omega} \mathcal{L}[\Xi_a^\alpha, \tilde{\psi}_a^\alpha, \tilde{\psi}_a^\alpha|_B] \Delta\Omega - \sum_{\Omega} \mathcal{L}[\Xi_a^\alpha, \psi_a^\alpha, \psi_a^\alpha|_B] \Delta\Omega = \\ &= \sum_{\Omega} \mathcal{L}[\Xi_a^\alpha, \psi_a^\alpha + \delta_o\psi_a^\alpha, (\psi_a^\alpha + \delta_o\psi_a^\alpha)|_B] \Delta\Omega - \sum_{\Omega} \mathcal{L}[\Xi_a^\alpha, \psi_a^\alpha, \psi_a^\alpha|_B] \Delta\Omega. \end{aligned}$$

Z racji warunków narzuconych przez sam pomiar może okazać się, że należy uwzględnić drugie przyrosty. Będzie zatem

$$\begin{aligned} \delta_o W &\doteq \sum_{\Omega} \left\{ \left[\mathcal{L}|_{\alpha} \delta_o\psi_a^\alpha + \mathcal{L}|_{\alpha|B} \right] + \frac{1}{2} \left[\mathcal{L}|_{\alpha^2} (\delta_o\psi_a^\alpha) + \mathcal{L}|_{\alpha|B} \delta_o\psi_a^\alpha \delta_o(\psi_a^\alpha|_B) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mathcal{L}|_{\alpha|B} \delta_o\psi_a^\alpha \delta_o(\psi_a^\alpha|_B) + \mathcal{L}|_{\alpha|B^2} \delta_o(\psi_a^\alpha|_B)^2 \right] \right\} \Delta\Omega. \end{aligned}$$

Jeżeli teraz zdefiniuje się wielkości

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\doteq \mathcal{L}^{\cdot} \tilde{e}_a^{\cdot}, \quad (\mathcal{L} + \Delta\mathcal{L}) \mathfrak{M}_{\cdot}^{\cdot}(\alpha)(\alpha|B) \delta_o\psi_a^\alpha \delta_o(\psi_a^\alpha|_B) \\ \mathcal{L} &\doteq \mathcal{L}^{\cdot} \tilde{e}_a^{\cdot}, \quad (\mathcal{L} + \Delta\mathcal{L}) \mathfrak{E}_{\cdot}^{\cdot}(\alpha)(\alpha|B) \delta_o\psi_a^\alpha \delta_o(\psi_a^\alpha|_B) \end{aligned} \quad (11)$$

gdzie: $\mathfrak{M}_{\cdot}^{\cdot}(\alpha)(\alpha|B)$, $\mathfrak{E}_{\cdot}^{\cdot}(\alpha)(\alpha|B)$ – obiekty krzywizny.

Ostatecznie wariacja funkcjonału działania względem funkcji – zmiennych zależnych, przyjmie postać (w nawiasach podano indeksy zmiennych, względem których dokonuje się różniczkowanie funkcji \mathcal{L} , uwzględniono także zamianę wskaźnika B na A)

$$\begin{aligned} \delta_o W &\doteq \sum_{\Omega} \left\{ \left(\left[\mathcal{L}|_{\alpha} - \mathcal{L}|_{\alpha|A} \right] \delta_o\psi_a^\alpha + \left(\mathcal{L}|_{\alpha|A} \delta_o\psi_a^\alpha \right)_{|A} \right) + \frac{1}{2} \left(\mathcal{L}|_{\alpha^2} (\delta_o\psi_a^\alpha)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left[2\mathcal{L}|_{\alpha|A} + (\mathcal{L} + \Delta\mathcal{L}) \mathfrak{M}_{\cdot}^{\cdot}(\alpha)(\alpha|A) \right] \delta_o\psi_a^\alpha \delta_o(\psi_a^\alpha|_A) + \mathcal{L}|_{\alpha|A^2} (\delta_o(\psi_a^\alpha|_A))^2 \right) \right\} \Delta\Omega. \end{aligned} \quad (12)$$

Drugi składnik sumy informujący o zmianie wariacji δW wskutek wariacji zmiennych niezależnych można obliczać następująco

$$\delta_{\Xi} W \doteq \sum_{\bar{\Omega}} \mathcal{E}(\underline{\Xi}^A, \psi_{\cdot}^{\alpha}(\underline{\Xi}^B)) \psi_{\cdot}^{\alpha}(\underline{\Xi}^B) \Big|_C \Big| \Delta \bar{\Omega} - \sum_{\bar{\Omega}} \mathcal{E}(\underline{\Xi}^A, \psi_{\cdot}^{\alpha}(\underline{\Xi}^B)) \psi_{\cdot}^{\alpha}(\underline{\Xi}^B) \Big|_C \Big| \Delta \bar{\Omega}. \quad (13)$$

Pierwsza suma będzie miała następującą postać

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{\Omega}} \mathcal{E}(\underline{\Xi}^A + \delta \underline{\Xi}^A, \psi_{\cdot}^{\alpha}(\underline{\Xi}^B + \delta \underline{\Xi}^B)) \psi_{\cdot}^{\alpha}(\underline{\Xi}^B + \delta \underline{\Xi}^B) \Big|_C \Big| \Delta \bar{\Omega} = \\ & = \sum_{\bar{\Omega}} \mathcal{E} \left[\underline{\Xi}^A + \underline{\delta \Xi}^A, \psi_{\cdot}^{\alpha} \Big|_B \underline{\delta \Xi}^B, \psi_{\cdot}^{\alpha} \Big|_C + \psi_{\cdot}^{\alpha} \Big|_{BC} \underline{\delta \Xi}^B + \psi_{\cdot}^{\alpha} \Big|_B (\underline{\delta \Xi}^B) \Big|_C \right] \Delta \bar{\Omega} = \\ & = \sum_{\bar{\Omega}} \mathcal{E}(\underline{\Xi}^A, \psi_{\cdot}^{\alpha} \Big|_C) \Big| \Delta \bar{\Omega} + \\ & + \sum_{\bar{\Omega}} \left[\mathcal{E} \Big|_A \underline{\delta \Xi}^A + \mathcal{E} \Big|_C \delta(\psi_{\cdot}^{\alpha} \Big|_B \underline{\delta \Xi}^B) + \mathcal{E} \Big|_{\alpha|C} \delta(\psi_{\cdot}^{\alpha} \Big|_{BC} \underline{\delta \Xi}^B + \psi_{\cdot}^{\alpha} \Big|_B (\underline{\delta \Xi}^B)) \Big|_C \right] \Delta \bar{\Omega} = \\ & = \sum_{\bar{\Omega}} (\cdot) \Delta \bar{\Omega} + \sum_{\bar{\Omega}} (\cdot) \Delta \bar{\Omega}. \end{aligned} \quad (14)$$

W liniowej teorii druga suma tj. $\sum_{\bar{\Omega}} (\cdot) \Delta \bar{\Omega}$ będzie zerem. Jednak w proponowanej teorii ośrodków siatkowych przyrównanie tej sumy do zera nie może mieć miejsca. Przyjmując, ze względów rachunkowych, że $\sum_{\bar{\Omega}} (\cdot) \Delta \bar{\Omega} = 0$, więc będzie

$$\delta_{\Xi} W \doteq \sum_{\bar{\Omega}} \mathcal{E}(\underline{\Xi}^A, \psi_{\cdot}^{\alpha} \Big|_C) \Big| \Delta \bar{\Omega} - \sum_{\bar{\Omega}} \mathcal{E}(\underline{\Xi}^A, \psi_{\cdot}^{\alpha} \Big|_C) \Big| \Delta \bar{\Omega}. \quad (15)$$

Teraz uwzględniając, że objętość prostopadłościanu o podstawie $d\Pi$ i wysokości $\delta \underline{\Xi}^A N_A$ wynosi $\delta \underline{\Xi}^A N_A d\Pi$, gdzie $\delta \underline{\Xi}^A N_A$ jest rzutem wektora $\delta \underline{\Xi}^A$, łączącego punkt na powierzchni $\partial \Omega$ z drugim punktem leżącym na powierzchni $\partial \bar{\Omega}$, na kierunku normalny do powierzchni $\partial \Omega$, będzie można zapisać

$$\sum_{\bar{\Omega}} \mathcal{E} \Delta \bar{\Omega} = \sum_{\bar{\Omega}} \mathcal{E} \Delta \bar{\Omega} + \sum_{\Pi} \mathcal{E} \delta \underline{\Xi}^A N_A \Delta \Pi \quad (16)$$

Ostatecznie więc będzie

$$\delta_{\Xi} W = \sum_{\Pi} \mathcal{E} \delta \underline{\Xi}^A N_A \Delta \Pi. \quad (17)$$

Wspomniany wyżej zerujący się wyraz w przypadku gdy będzie zachodziła konieczność jego uwzględnienia, będzie miał postać

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{\Omega}} \left[\mathcal{E} \Big|_A \underline{\delta \Xi}^A + \mathcal{E} \Big|_C \delta(\psi_{\cdot}^{\alpha} \Big|_B \underline{\delta \Xi}^B) + \mathcal{E} \Big|_{\alpha|C} \delta(\psi_{\cdot}^{\alpha} \Big|_{BC} \underline{\delta \Xi}^B + \psi_{\cdot}^{\alpha} \Big|_B (\underline{\delta \Xi}^B)) \Big|_C \right] \Delta \bar{\Omega} = \\ & = \sum_{\bar{\Omega}} [(\Delta \bar{\Omega} + \Delta \Delta \bar{\Omega})] \doteq \sum_{\bar{\Omega}} [\Big| \Delta \bar{\Omega}. \end{aligned} \quad (18)$$

Tak definiując powyższą zależność otrzymuje się (na podstawie twierdzenia Ostrogradskiego -Gaussa)

$$\sum_{\bar{\Omega}} [(\Delta \bar{\Omega})] = \sum_{\bar{\Omega}} [\Big| \Delta \bar{\Omega} + \sum_{\Pi} [\Big|_A \delta \underline{\Xi}^A N_A \Delta \Pi] \Delta \bar{\Omega}. \quad (19)$$

Następnie

$$\begin{aligned}
\sum_{\Omega} [(\Delta\Omega)] &= \sum_{\Omega} \left[\mathcal{E}|_{\Lambda} \delta \Xi^{\Lambda} + \mathcal{E}|_{\alpha} \delta (\psi^{\alpha}|_{\Lambda} \delta \Xi^{\Lambda}) + \mathcal{E}|_{\alpha|C} \delta (\psi^{\alpha}|_{\Lambda|C} \delta \Xi^{\Lambda} + \psi^{\alpha}|_{\Lambda} (\delta \Xi^{\Lambda})|_C) \right] \Delta\Omega + \\
&\quad + \sum_{\Omega} \left[\frac{\mathcal{E}}{\Pi} \right]_{\Lambda} \delta \Xi^{\Lambda} N_{\Lambda} \Delta\Pi \Delta\Omega = \\
&= \sum_{\Omega} \left[\mathcal{E}|_{\Lambda} \delta \Xi^{\Lambda} + \mathcal{E}|_{\alpha} \delta (\psi^{\alpha}|_{\Lambda}) \delta \Xi^{\Lambda} + \mathcal{E}|_{\alpha|C} \delta (\psi^{\alpha}|_{\Lambda|C}) \delta \Xi^{\Lambda} + \mathcal{E}|_{\alpha|C} \delta (\psi^{\alpha}|_{\Lambda}) \delta \Xi^{\Lambda}|_C \right] \Delta\Omega + \quad (20) \\
&\quad + \sum_{\Omega} \frac{\mathcal{E}}{\Pi} \left[\mathcal{E}|_{\Lambda} \delta \Xi^{\Lambda} + \mathcal{E}|_{\alpha} \delta (\psi^{\alpha}|_{\Lambda}) \delta \Xi^{\Lambda} + \mathcal{E}|_{\alpha|C} \delta (\psi^{\alpha}|_{\Lambda|C}) \delta \Xi^{\Lambda} + \right. \\
&\quad \left. + \mathcal{E}|_{\alpha|C} \delta (\psi^{\alpha}|_{\Lambda}) \delta \Xi^{\Lambda}|_C \right] \delta \Xi^{\Lambda} N_{\Lambda} \Delta\Pi \Delta\Omega .
\end{aligned}$$

Pojawienie się w ostatnim wyrażeniu wariacji $\delta_o(\cdot)$ wynika z faktu, że analizowane wariacje są znów wariacjami funkcji bez wariacji argumentów.

Ostatecznie więc wariacja funkcjonału działania ze względu na wariacje zmiennych niezależnych przyjmie postać

$$\delta_{\Xi} W = \frac{\mathcal{E}}{\Pi} \mathcal{E} \delta \Xi^{\Lambda} N_{\Lambda} \Delta\Pi + \sum_{\Omega} [20] \Delta\Omega . \quad (21)$$

Teraz wariacja całkowita przyjmie postać

$$\begin{aligned}
\delta W &= \sum_{\Omega} \left[\mathcal{E}|_{\alpha} - \mathcal{E}|_{\alpha|_{\Lambda}} \right] \delta_o \psi^{\alpha} \Delta\Omega + \frac{\mathcal{E}}{\Pi} \left(\mathcal{E}|_{\alpha|_{\Lambda}} \delta_o \psi^{\alpha} + \mathcal{E} \delta \Xi^{\Lambda} \right) N_{\Lambda} \Delta\Pi + \quad (22) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{\Omega} \left\{ \mathcal{E}|_{\alpha} (\delta_o \psi^{\alpha})^2 + \left[2\mathcal{E}|_{\alpha|_{\Lambda}} + (\mathcal{E} + \Delta\mathcal{E}) \mathcal{N}_{\alpha}^{\alpha} \right] \delta_o \psi^{\alpha} \delta_o (\psi^{\alpha}|_{\Lambda}) + \mathcal{E}|_{(\alpha|_{\Lambda})} (\delta_o (\psi^{\alpha}|_{\Lambda}))^2 \right\} \Delta\Omega + \\
&\quad + \sum_{\Omega} \left[\mathcal{E}|_{\Lambda} \delta \Xi^{\Lambda} + \mathcal{E}|_{\alpha} \delta (\psi^{\alpha}|_{\Lambda}) \delta \Xi^{\Lambda} + \mathcal{E}|_{\alpha|C} \delta (\psi^{\alpha}|_{\Lambda|C}) \delta \Xi^{\Lambda} + \mathcal{E}|_{\alpha|C} \delta (\psi^{\alpha}|_{\Lambda}) \delta \Xi^{\Lambda}|_C \right] \Delta\Omega + \\
&\quad + \sum_{\Omega} \frac{\mathcal{E}}{\Pi} \left[\mathcal{E}|_{\Lambda} \delta \Xi^{\Lambda} + \mathcal{E}|_{\alpha} \delta (\psi^{\alpha}|_{\Lambda}) \delta \Xi^{\Lambda} + \mathcal{E}|_{\alpha|C} \delta (\psi^{\alpha}|_{\Lambda|C}) \delta \Xi^{\Lambda} + \mathcal{E}|_{\alpha|C} \delta (\psi^{\alpha}|_{\Lambda}) \delta \Xi^{\Lambda}|_C \right] \delta \Xi^{\Lambda} N_{\Lambda} \Delta\Pi \Delta\Omega
\end{aligned}$$

W ściśle liniowej teorii wystąpią jedynie wyrazy podkreślone.

Z przytoczonych rozważań wynika następująca konkluzja. Układ równań równowagi musi uwzględniać niezerową wartość wariacji współrzędnej niezależnej Lagrange'a. Ponadto parametry ε_n^{α} nie mają przyrostów nieskończenie małych co będzie powodować, że zbiór równań równowagi nie będzie stanowić grupy. Nie rezygnując zatem z warunków mówiących, że $\delta \Xi^{\Lambda} \neq 0$ oraz braku nieskończoności przyrostów parametrów ε_n^{α} , należałoby zatem poszukać możliwości takiej modyfikacji zbioru równań równowagi, aby stanowił on grupę.

Literatura

1. MARCINIAK A.: *Wstępny opis roślinnego ośrodka siatkowego żdźbłowego*. Rozprawa habilitacyjna, Lublin 1995.

Streszczenie

W przestrzeni \mathcal{P}_x dany będzie funkcjonal działania

$$W_{\bar{\Omega}}(\bar{\psi}_*^\alpha) \doteq \sum_{\bar{\Omega}} \mathcal{L} \left[\bar{\Xi}_*^A, \bar{\psi}_*^\alpha(\bar{\Xi}_*^B), \bar{\psi}_*^\alpha \left(\bar{\Xi}_*^B \Big|_{\Xi^C} \right) \right] \Delta \bar{\Omega}. \text{ Wariacja zmiennej zależnej dynamicznej przyjmie}$$

postać $\delta_0 \psi_*^\alpha = \bar{\psi}_*^\alpha(\bar{\Xi}_*^A) - \psi_*^\alpha(\Xi_*^A)$ a zmiennej niezależnej będzie $\bar{\Xi}_*^A = \Xi_*^A + \delta \Xi_*^A$. Występujące parametry ruchu są stałymi ale dla obliczeń wariacji współrzędnych $\bar{\Xi}_*^A$ i $\bar{\psi}_*^\alpha$ należy owe parametry uzmiennić (z okazji znajdowania przyrostów kowariantnych względem \mathcal{E}^a). Uwzględniając, występujące w wyrażeniu drugie przyrosty różnic współrzędnych można tutaj wprowadzić obiekty geometryczne opisujące odkształcenie symetryczne, niesymetryczne oraz skręcenie. Ponieważ dalej przyjmuje się, że $\mathcal{E}^a = \text{const}$ więc można parametry wynieść przed znak całki.

Całkowita wariacja funkcjonału działania będzie sumą wariacji funkcjonałów zależnych od współrzędnych zależnych $\delta_0 W$ i niezależnych $\delta_{\Xi} W$. Uwzględniając drugie przyrosty funkcji \mathcal{L} można wariację $\delta_0 W$ uzależnić od obiektu krzywizny (12). Natomiast drugi składnik wariacji δW powstałej wskutek wariacji zmiennych niezależnych przedstawia się (13)

$$\delta_{\Xi} W \doteq \sum_{\bar{\Omega}} \mathcal{L} \left(\bar{\Xi}_*^A, \psi_*^\alpha(\bar{\Xi}_*^B), \psi_*^\alpha(\bar{\Xi}_*^B) \Big|_C \right) \Delta \bar{\Omega} - \sum_{\bar{\Omega}} \mathcal{L} \left(\Xi_*^A, \psi_*^\alpha(\Xi_*^B), \psi_*^\alpha(\Xi_*^B) \Big|_C \right) \Delta \Omega.$$

Pierwszy składnik sumy będzie miał następującą postać

$$\sum_{\bar{\Omega}} \mathcal{L} \left[\bar{\Xi}_*^A + \delta \bar{\Xi}_*^A, \psi_*^\alpha(\bar{\Xi}_*^B + \delta \bar{\Xi}_*^B), \psi_*^\alpha(\bar{\Xi}_*^B + \delta \bar{\Xi}_*^B) \Big|_C \right] \Delta \bar{\Omega} = \sum_{\bar{\Omega}} (\cdot) \Delta \Omega + \sum_{\bar{\Omega}} (\cdot) \Delta \bar{\Omega}.$$

W liniowej teorii druga suma będzie zerem. W omawianej teorii ośrodka również z racji trudności rachunkowych przyjmuje się, że $\sum_{\bar{\Omega}} (\cdot) \Delta \bar{\Omega} = 0$. Ostatecznie więc będzie (15) $\delta_{\Xi} W \doteq \sum_{\bar{\Omega}} \mathcal{L}(\cdot) \Delta \Omega - \sum_{\bar{\Omega}} \mathcal{L}(\cdot) \Delta \Omega$.

Z kolei pierwszy składnik można przedstawić symbolicznie jako sumę po objętości $\bar{\Omega}$ i wartości objętości warstwy ją otaczającej, tj. $\Delta \Omega$.

Uwzględniając teraz, że pomijany wyraz nie będzie zerem, można zapisać (18)

$$\sum_{\bar{\Omega}} [\cdot] \Delta \bar{\Omega} = \sum_{\bar{\Omega}} [\cdot] (\Delta \Omega + \Delta \Delta \Omega) \doteq \sum_{\bar{\Omega}} [\cdot] \Delta \Omega.$$

Wielkość $\Delta \Delta \Omega$ przyjmuje się jako zero, co czyni się jedynie z racji konieczności uproszczenia obliczeń. Teraz zależność (18) można znów rozłożyć na sumę po objętości $\bar{\Omega}$ i warstwie $\Delta \Omega$ (19). W efekcie końcowym otrzymuje się wariację całkowitą δW daną wzorem (22). W teorii liniowej występuje jedynie człon podkreślony.

UWAGI O OŚRODKU QUASI – PROSTYM Cz. I. Wyliczenie wariacji funkcjonału działania δW

Andrzej L. Marciniak, Andrzej Fijolek
Katedra Maszyn i Urządzeń Rolniczych WTR, Akademia Rolnicza, Lublin
Jerzy Podgórski, Piotr Siczka
Wydział Inżynierii Budowlanej i Sanitarnej, Politechnika Lubelska, Lublin

Synopsis: Dla analizy mechanicznej ośrodka punktem wyjścia jest określenie wariacji funkcjonału działania.

Słowa kluczowe: Wariacja funkcjonału działania, równania ruchu.

W opisie funkcji \mathcal{L} oraz współrzędnych można użyć wyższych niż pierwsza pochodnych co wynikać będzie z użycia wyższych wyrazów rozwinięcia przyrostów.

Współrzedną parametryzującą przestrzeń ośrodka, która doznała przyrostu można zapisać następująco [1]

$$\begin{aligned} \psi_{\bullet}^k(\Xi_{\bullet}^k + \Delta\Xi_{\bullet}^k, t + \Delta t) = & \psi_{\bullet}^k(\Xi_{\bullet}^k, t) + \psi_{\bullet}^k(\Xi_{\bullet}^k, t) \Big|_L \Delta\Xi_{\bullet}^L + D\psi_{\bullet}^k(\Xi_{\bullet}^k, t)\Delta t + \\ & + \frac{1}{2} \left(\psi_{\bullet}^k(\Xi_{\bullet}^k, t) \Big|_{L^2} (\Delta\Xi_{\bullet}^k)^2 + 2\psi_{\bullet}^k(\Xi_{\bullet}^k, t) \Big|_{LD} \Delta\Xi_{\bullet}^k \Delta t + \right. \\ & \left. + (\psi_{\bullet}^k + \Delta\psi_{\bullet}^k) \mathfrak{M}_{k,LD}^p \Delta\Xi_{\bullet}^L \Delta t + D^2\psi_{\bullet}^k(\Xi_{\bullet}^k, t) (\Delta t)^2 \right), \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie: $L \doteq \Xi^L$, $L = 1, 2, 3$, $D \doteq t$, $\psi_{\bullet}^k = \psi_{\bullet}^k(\Xi_{\bullet}^k, t)$, $\Delta\psi_{\bullet}^k$ – przyrost współrzędnej przy przejściu od punktu początkowego do końcowego, który jest określany eksperymentalnie (odmierzany na badanej siatce).

Teraz część lokalna funkcji Lagrange'a (funkcji materiałowej opisującej własności lokalne) przyjmijmy postać

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^l = \mathcal{L}^l \left(\Xi_{\bullet}^k, t, \psi_{\bullet}^k(\Xi_{\bullet}^k, t), \psi_{\bullet}^k(\Xi_{\bullet}^k, t) \Big|_L, D\psi_{\bullet}^k(\Xi_{\bullet}^k, t), \psi_{\bullet}^k(\Xi_{\bullet}^k, t) \Big|_{L^2}, \psi_{\bullet}^k(\Xi_{\bullet}^k, t) \Big|_{LD}, \right. \\ \left. D^2\psi_{\bullet}^k(\Xi_{\bullet}^k, t), \Delta\psi_{\bullet}^k, \mathfrak{M}_{k,LD}^p \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Część nielokalna funkcji materiałowej będzie definiowana następująco:
część dotycząca nielokalności przestrzeni – efekt skali (nielokalna część funkcji \mathcal{L} w przestrzeni $\Xi_{\bullet}^k \neq \Xi_{\bullet}^k$ a lokalna w czasie – oddziaływanie dwóch miejsc tylko bezpośrednio, tj. nie za pośrednictwem przestrzeni bazowej)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(t)}^2 = \mathcal{L}_{(t)}^2 \left(\Xi_{\bullet}^k, \Xi_{\bullet}^k, t, \psi_{\bullet}^k, \bar{\psi}_{\bullet}^k, \psi_{\bullet}^k \Big|_L, \bar{\psi}_{\bullet}^k \Big|_L, D\psi_{\bullet}^k, D\bar{\psi}_{\bullet}^k, \psi_{\bullet}^k \Big|_{L^2}, \bar{\psi}_{\bullet}^k \Big|_{L^2}, \right. \\ \left. \psi_{\bullet}^k \Big|_{LD}, \bar{\psi}_{\bullet}^k \Big|_{LD}, D^2\psi_{\bullet}^k, D^2\bar{\psi}_{\bullet}^k, \Delta\psi_{\bullet}^k, \Delta\bar{\psi}_{\bullet}^k, \mathfrak{M}_{k,LD}^p, \bar{\mathfrak{M}}_{k,LD}^p \right). \end{aligned} \quad (3)$$

część dotycząca nielokalności w czasie - efekt "pamięci"

$$\mathfrak{L}_{(\Xi)}^2 = \mathfrak{L}_{(\Xi)}^2 \left(\Xi_{\bullet}^K, t, \bar{t}, \psi_{\bullet}^k, \bar{\psi}_{\bullet}^k, \psi_{\bullet}^k|_L, \bar{\psi}_{\bullet}^k|_L, D\psi_{\bullet}^k, D\bar{\psi}_{\bullet}^k, \psi_{\bullet}^k|_{L^2}, \bar{\psi}_{\bullet}^k|_{L^2}, \right. \\ \left. \psi_{\bullet}^k|_{LD}, \bar{\psi}_{\bullet}^k|_{LD}, D^2\psi_{\bullet}^k, D^2\bar{\psi}_{\bullet}^k, \Delta\psi_{\bullet}^k, \Delta\bar{\psi}_{\bullet}^k, \mathfrak{M}_{k,LD}^{\rho}, \bar{\mathfrak{M}}_{k,LD}^{\rho} \right), \quad (4)$$

gdzie: $\bar{\psi}_{\bullet}^k = \psi_{\bullet}^k(\bar{\Xi}_{\bullet}^K, t)$, $\bar{\psi}_{\bullet}^k = \psi_{\bullet}^k(\Xi_{\bullet}^K, \bar{t})$ itp.

Równania ruchu są warunkami koniecznymi istnienia ekstremum funkcjonału działania. Funkcjonał dotyczy każdego układu oddzielnie oraz oddziaływania między układowego co można zapisać sumami (WOŹNIAK [3])

$$W(\Omega \times T) = \sum_T \sum_{\Omega} \left(\mathfrak{L}^1 + \sum_{\Omega} \mathfrak{L}_{(i)}^2 d\bar{\Omega} + \sum_T \mathfrak{L}_{(\Xi)}^2 d\bar{t} \right) \Delta\Omega \Delta t, \quad (5)$$

gdzie: $\Delta\Omega = \Delta\Xi_{\bullet}^1 \Delta\Xi_{\bullet}^2 \Delta\Xi_{\bullet}^3$, $\Delta\bar{\Omega} = \Delta\bar{\Xi}_{\bullet}^1 \Delta\bar{\Xi}_{\bullet}^2 \Delta\bar{\Xi}_{\bullet}^3$.

Poszczególne składowe funkcjonału działania będą miały następujące znaczenie.

$$W^1 = W_{\psi}^1 + W_{\Xi}^1 \doteq \sum_T \sum_{\Omega} \mathfrak{L}^1 \Delta\Omega \Delta t, \quad (6)$$

$$W^2 = W_{\psi}^2 + W_{\Xi}^2 \doteq \sum_T \sum_{\Omega} \sum_T \sum_{\Omega} \mathfrak{L}^2 \Delta\bar{\Omega} \Delta\bar{t} \Delta\Omega \Delta t.$$

Wzór na wariację funkcjonału działania przyjmie postać

$$\delta W = \delta W^1 + \delta W^2 = \delta_0 W^1 + \delta_0 W^2 + \delta_{\Xi} W^1 + \delta_{\Xi} W^2, \quad (7)$$

gdzie:

$$W_{\psi}^1(\Xi_{\bullet}^K, t, \psi_{\bullet}^k + \delta_0 \psi_{\bullet}^k) - W_{\psi}^1(\Xi_{\bullet}^K, t, \psi_{\bullet}^k) = \delta_0 W^1,$$

$$W_{\psi}^2(\Xi_{\bullet}^K, \bar{\Xi}_{\bullet}^K, t, \bar{t}, \psi_{\bullet}^k + \delta_0 \psi_{\bullet}^k, \bar{\psi}_{\bullet}^k + \delta_0 \bar{\psi}_{\bullet}^k) - W_{\psi}^2(\Xi_{\bullet}^K, \bar{\Xi}_{\bullet}^K, t, \bar{t}, \psi_{\bullet}^k, \bar{\psi}_{\bullet}^k) = \delta_0 W^2,$$

$$W_{\Xi}^1(\Xi_{\bullet}^K + \delta \Xi_{\bullet}^K, t + \delta t, \psi_{\bullet}^k) - W_{\Xi}^1(\Xi_{\bullet}^K, t, \psi_{\bullet}^k) = \delta_{\Xi} W^1,$$

$$W_{\Xi}^2(\Xi_{\bullet}^K + \delta \Xi_{\bullet}^K, \bar{\Xi}_{\bullet}^K + \delta \bar{\Xi}_{\bullet}^K, t + \delta t, \bar{t} + \delta \bar{t}, \psi_{\bullet}^k, \bar{\psi}_{\bullet}^k) - W_{\Xi}^2(\Xi_{\bullet}^K, \bar{\Xi}_{\bullet}^K, t, \bar{t}, \psi_{\bullet}^k, \bar{\psi}_{\bullet}^k) = \delta_{\Xi} W^2.$$

Wariacja $\delta_0 W^1$ jest spowodowana wariacją $\delta_0 \psi_{\bullet}^k$ samej funkcji ψ_{\bullet}^k . Wariacja $\delta_0 \psi_{\bullet}^k$ jest bez wpływu na przestrzeń $\Omega \times T$. Na podstawie zależności (2) będzie zatem [3]

$$\delta_0 W^1 = \delta_0 \left(\sum_T \sum_{\Omega} \mathfrak{L}^1 \Delta\Omega \Delta t \right) = \sum_T \sum_{\Omega} \delta_0 \mathfrak{L}^1 \Delta\Omega \Delta t.$$

Należy tutaj zaznaczyć, że wariacja funkcjonału działania zawierać będzie wariację funkcji Lagrange'a \mathfrak{L} a ta z kolei zawierać będzie wariację współrzędnych.

Teraz

$$\delta_0 \mathfrak{L}^1 = \mathfrak{L}^1|_k \delta_0 \psi_{\bullet}^k + \mathfrak{L}^1|_{k|K} \delta_0 (\psi_{\bullet}^k|_K) + \mathfrak{L}^1|_{D_i} \delta_0 (\psi_{\bullet}^k|_D) + \\ + \frac{1}{2} \left\{ \mathfrak{L}^1|_{k^2} (\delta_0 \psi_{\bullet}^k)^2 + \mathfrak{L}^1|_{(k|K)^2} (\delta_0 \psi_{\bullet}^k|_K)^2 + \mathfrak{L}^1|_{D_i^2} (\delta_0 \psi_{\bullet}^k|_D)^2 + \right. \\ \left. + 2\mathfrak{L}^1|_{k|K} \delta_0 (\psi_{\bullet}^k \psi_{\bullet}^k|_K) + (\mathfrak{L}^1 + \Delta \mathfrak{L}^1) \mathfrak{M}_{i,k|K}^{\rho} \delta_0 (\psi_{\bullet}^k \psi_{\bullet}^k|_K) \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + 2\mathcal{E}^1|_{k|K}|_{D_k} \delta_0(\psi_{\bullet}^k|_K D\psi_{\bullet}^k) + (\mathcal{E}^1 + \Delta\mathcal{E}^1) \mathfrak{N}_{1,(k|K)D_k}^{\rho} \delta_0(\psi_{\bullet}^k|_K D\psi_{\bullet}^k) + \\
& + 2\mathcal{E}^1|_{D_k}|_k \delta_0(\psi_{\bullet}^k|_D \psi_{\bullet}^k) + (\mathcal{E}^1 + \Delta\mathcal{E}^1) \mathfrak{N}_{1,D_k k}^{\rho} \delta_0(\psi_{\bullet}^k|_D \psi_{\bullet}^k) \Big\} + \\
& + \mathcal{E}^1|_{(k|K)^2} \delta_0(\psi_{\bullet}^k|_K)^2 + \mathcal{E}^1|_{k|K}|_{D_k} \delta_0(\psi_{\bullet}^k|_K \psi_{\bullet}^k|_D) + \mathcal{E}^1|_{D_k^2} \delta_0(\psi_{\bullet}^k|_D)^2 + \\
& + \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{E}^1|_{(k|K)^2}|_{(k|K)^2} \delta_0(\psi_{\bullet}^k|_K)^4 + \left(\mathcal{E}^1|_{k|K}|_{D_k} \right) |_{k|K}|_{D_k} \delta_0(\psi_{\bullet}^k|_K \psi_{\bullet}^k|_D)^2 + \right. \\
& \mathcal{E}^1|_{D_k^2}|_{D_k^2} \delta_0(\psi_{\bullet}^k|_D)^4 + 2\mathcal{E}^1|_{(k|K)^2}|_{k|K}|_{D_k} \delta_0\left((\psi_{\bullet}^k|_K)^2 \psi_{\bullet}^k|_K \psi_{\bullet}^k|_D \right) + \\
& + (\mathcal{E}^1 + \Delta\mathcal{E}^1) \mathfrak{N}_{1,K^2(KD_k)}^{\rho} \delta_0\left((\psi_{\bullet}^k|_K)^2 \psi_{\bullet}^k|_K \psi_{\bullet}^k|_D \right) + \\
& + 2\mathcal{E}^1|_{k|K}|_{D_k}|_{D_k^2} \delta_0\left(\psi_{\bullet}^k|_K (\psi_{\bullet}^k|_D)^3 \right) + (\mathcal{E}^1 + \Delta\mathcal{E}^1) \mathfrak{N}_{1,(KD_k)D_k^2}^{\rho} \delta_0\left(\psi_{\bullet}^k|_K (\psi_{\bullet}^k|_D)^3 \right) + \\
& + 2\mathcal{E}^1|_{D_k^2}|_{(k|K)^2} \delta_0\left((\psi_{\bullet}^k|_K)^2 (\psi_{\bullet}^k|_D)^2 \right) + (\mathcal{E}^1 + \Delta\mathcal{E}^1) \mathfrak{N}_{1,D_k^2 K^2}^{\rho} \delta_0\left((\psi_{\bullet}^k|_K)^2 (\psi_{\bullet}^k|_D)^2 \right) \Big\} + \\
& + \mathcal{E}^1|_{\Delta\psi_{\bullet}^k} \delta_0(\Delta\psi_{\bullet}^k) + \mathcal{E}^1|_{\mathfrak{N}_{k,KD_k}^{\rho}} \delta_0(\mathfrak{N}_{k,KD_k}^{\rho}) + \\
& + \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{E}^1|_{(\Delta\psi_{\bullet}^k)^2} \delta_0(\Delta\psi_{\bullet}^k)^2 + \mathcal{E}^1|_{(\mathfrak{N}_{k,KD_k}^{\rho})^2} \delta_0(\mathfrak{N}_{k,KD_k}^{\rho})^2 + \right. \\
& \left. + 2\mathcal{E}^1|_{\Delta\psi_{\bullet}^k \mathfrak{N}_{k,KD_k}^{\rho}} \delta_0(\Delta\psi_{\bullet}^k \mathfrak{N}_{k,KD_k}^{\rho}) + (\mathcal{E}^1 + \Delta\mathcal{E}^1) \mathfrak{N}_{1,(\Delta\psi_{\bullet}^k)(\mathfrak{N}_{k,KD_k}^{\rho})}^{\rho} \delta_0(\Delta\psi_{\bullet}^k \mathfrak{N}_{k,KD_k}^{\rho}) \right\}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Następnie

$$\begin{aligned}
\delta_{\psi} W &= \delta_0 W = \delta_0 W^1 + \delta_0 W^2 = \sum_T \sum_{\Omega} \left[\mathcal{E}|_k - \mathcal{E}|_{k|K}|_K - \mathcal{E}|_{D_k D} \right] \delta_0 \psi_{\bullet}^k \Delta\Omega \Delta t + \\
& + \sum_T \sum_{\Pi} \mathcal{E}|_{k|K} \delta_0 \psi_{\bullet}^k \Delta\Pi_k \Delta t + \left[\sum_{\Omega} \mathcal{E}|_{D_k} \delta_0 \psi_{\bullet}^k \Delta\Omega \right]_{t_0}^{t_1} + \sum_T \sum_{\Omega} (r) \Delta\Omega \Delta t.
\end{aligned} \tag{9}$$

Jest to wariacja funkcjonału działania spowodowana wariacją $\delta_0 \psi_{\bullet}^k$ postaci zmiennych zależnych $\psi_{\bullet}^k(\Xi_{\bullet}^k, t)$.

Teraz

$$\delta_{\Xi} W^1 = \sum_T \sum_{\Pi} \mathfrak{E}^1 \delta \Xi^K \Delta \Pi_K \Delta t + \left[\sum_{\Omega} \mathfrak{E}^1 \Delta \Omega \delta t \right]_{t_0}^{t_1} + \left[\sum_{\Pi} \mathfrak{E}^1 \delta \Xi^K \Delta \Pi_K \delta t \right]_{t_0}^{t_1}, \quad (10)$$

oraz

$$\begin{aligned} \delta_{\Xi} W^2 &= \sum_{T+\delta T} \sum_{\Omega+\delta\Omega} \sum_{T+\delta T} \sum_{\Omega+\delta\Omega} \mathfrak{E}^2 \Delta \bar{\Omega} \bar{\Delta} \bar{t} \Delta \bar{\Omega} \bar{\Delta} t - \sum_T \sum_{\Omega} \sum_T \sum_{\Omega} \Delta \bar{\Omega} \bar{\Delta} \bar{t} \Delta \bar{\Omega} \bar{\Delta} t = \\ &= \sum_T \sum_{\Omega} \sum_T \sum_{\delta\Omega} + \sum_T \sum_{\Omega} \sum_{\delta T} \sum_{\Omega} + \sum_T \sum_{\delta\Omega} \sum_T \sum_{\Omega} + \sum_{\delta T} \sum_{\Omega} \sum_T \sum_{\Omega} + \\ &+ \sum_T \sum_{\delta T} \sum_{\delta\Omega} \sum_{\Omega} + \sum_T \sum_{\delta\Omega} \sum_T \sum_{\delta\Omega} + \sum_{\delta T} \sum_{\Omega} \sum_T \sum_{\delta\Omega} + \sum_{\delta T} \sum_{\Omega} \sum_{\delta T} \sum_{\Omega} + \\ &+ \sum_{\delta T} \sum_{\delta\Omega} \sum_T \sum_{\Omega} + \sum_T \sum_{\delta\Omega} \sum_{\delta T} \sum_{\Omega} + \sum_T \sum_{\delta\Omega} \sum_{\delta T} \sum_{\delta\Omega} + \sum_{\delta T} \sum_{\Omega} \sum_{\delta T} \sum_{\delta\Omega} + \\ &+ \sum_{\delta T} \sum_{\delta\Omega} \sum_T \sum_{\delta\Omega} + \sum_T \sum_{\delta\Omega} \sum_{\delta T} \sum_{\Omega} + \sum_{\delta T} \sum_{\delta\Omega} \sum_{\delta T} \sum_{\delta\Omega} = \\ &= 2 \sum_T \sum_{\Omega} \sum_T \sum_{\Pi} \mathfrak{E}^2 \delta \Xi^K \Delta \bar{\Pi}_K \Delta \bar{\Omega} \bar{\Delta} t + 2 \sum_T \sum_{\Omega} \left[\sum_{\Omega} \mathfrak{E}^2 \Delta \bar{\Omega} \bar{\Delta} \bar{t} \right]_{t_0}^{t_1} \Delta \bar{\Omega} \bar{\Delta} t + \\ &+ 4 \sum_T \sum_{\Omega} \left[\sum_{\Pi} \mathfrak{E}^2 \delta \Xi^K \Delta \bar{\Pi}_K \delta \bar{t} \right]_{t_0}^{t_1} \Delta \bar{\Omega} \bar{\Delta} t + \\ &+ \sum_T \sum_{\Pi} \sum_T \sum_{\Pi} \mathfrak{E}^2 \delta \Xi^K \Delta \bar{\Pi}_K \Delta \bar{t} \delta \Xi^K \Delta \Pi_K \Delta t + \\ &+ \left[\sum_{\Omega} \left[\sum_{\Omega} \mathfrak{E}^2 \Delta \bar{\Omega} \bar{\Delta} \bar{t} \right]_{t_0}^{t_1} \Delta \bar{\Omega} \bar{\Delta} t \right]_{t_0}^{t_1} + 2 \sum_T \sum_{\Pi} \left[\sum_{\Pi} \mathfrak{E}^2 \delta \Xi^K \Delta \bar{\Pi}_K \delta \bar{t} \right]_{t_0}^{t_1} \Delta \Pi_K \delta \Xi^K \Delta t + \\ &+ 2 \left[\sum_{\Omega} \left[\sum_{\Pi} \mathfrak{E}^2 \delta \Xi^K \Delta \bar{\Pi}_K \delta \bar{t} \right]_{t_0}^{t_1} \Delta \bar{\Omega} \bar{\Delta} t \right]_{t_0}^{t_1} + \left[\sum_{\Pi} \left[\sum_{\Pi} \mathfrak{E}^2 \delta \Xi^K \Delta \bar{\Pi}_K \delta \bar{t} \right]_{t_0}^{t_1} \delta \Xi^K \Delta \Pi_K \delta t \right]_{t_0}^{t_1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Ostatecznie wariacja funkcjonału działania przyjmie postać

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_T \sum_{\Omega} \left[\mathfrak{E}|_k - \mathfrak{E}|_{k|k} \Big|_K - \mathfrak{E}|_{D_i} \Big|_D \right] \delta_0 \psi_{\bullet}^k \Delta \Omega \Delta t + \\ &+ \sum_T \sum_{\Pi} \left(\mathfrak{E}|_{k|k} \delta_0 \psi_{\bullet}^k \Delta \Pi_K \Delta t + \mathfrak{E} \delta \Xi^K \right) \Delta \Pi_K \Delta t + \left[\sum_{\Omega} \left(\mathfrak{E}|_D \delta_0 \psi_{\bullet}^k + \mathfrak{E} \delta t \right) \Delta \Omega \right]_{t_0}^{t_1} + \\ &+ \sum_T \sum_{\Omega} \frac{1}{2} \left\{ \mathfrak{E}|_{k^2} \left(\delta_0 \psi_{\bullet}^k \right)^2 + \mathfrak{E}|_{(k|k)^2} \left(\delta_0 \psi_{\bullet}^k \Big|_K \right)^2 + \mathfrak{E}|_{D_i^2} \left(\delta_0 \psi_{\bullet}^k \Big|_D \right)^2 + \right. \\ &+ \left. 2 \mathfrak{E}|_{k|k} \left(\delta_0 \psi_{\bullet}^k \right) \left(\delta_0 \psi_{\bullet}^k \Big|_K \right) + (\mathfrak{E} + \Delta \mathfrak{E}) \mathfrak{N}_{(i),k(i|K)}^{\rho} \left(\delta_0 \psi_{\bullet}^k \right) \left(\delta_0 \psi_{\bullet}^k \Big|_K \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\mathfrak{E}|_{\#|K}|_{D_i} \left(\delta_0 \Psi_{\#}^{\#} \Big|_K \right) \left(\delta_0 D \Psi_{\#}^{\#} \right) + (\mathfrak{E} + \Delta \mathfrak{E}) \mathfrak{M}_{(\cdot), (\#|K) D_i}^{\rho} \left(\delta_0 \Psi_{\#}^{\#} \Big|_K \right) \left(\delta_0 D \Psi_{\#}^{\#} \right) + \\
& + 2\mathfrak{E}|_{D_i} \Big|_{\#} \left(\delta_0 \Psi_{\#}^{\#} \Big|_D \right) \left(\delta_0 \Psi_{\#}^{\#} \right) + (\mathfrak{E} + \Delta \mathfrak{E}) \mathfrak{M}_{(\cdot), D_i \#}^{\rho} \left(\delta_0 \Psi_{\#}^{\#} \Big|_D \right) \left(\delta_0 \Psi_{\#}^{\#} \right) \Big\} + \\
& + \sum_T \sum_{\Omega} \left[\mathfrak{E}|_{(\#|K)^2} \left(\delta_0 \Psi_{\#}^{\#} \Big|_K \right)^2 + \mathfrak{E}|_{\#|K}|_{D_i} \delta_0 \left(\Psi_{\#}^{\#} \Big|_K \Psi_{\#}^{\#} \Big|_D \right) + \mathfrak{E}|_{D_i^2} \left(\delta_0 \Psi_{\#}^{\#} \Big|_D \right)^2 \right] \Delta \Omega \Delta t + \\
& + \sum_T \sum_{\Omega} \frac{1}{2} \left\{ \mathfrak{E}|_{(\#|K)^2} \Big|_{(\#|K)^2} \left(\delta_0 \Psi_{\#}^{\#} \Big|_K \right)^4 + \left(\mathfrak{E}|_{\#|K}|_{D_i} \Big|_{\#|K}|_{D_i} \left(\delta_0 \Psi_{\#}^{\#} \Big|_K \right)^2 \left(\delta_0 \Psi_{\#}^{\#} \Big|_D \right)^2 + \mathfrak{E}|_{D_i^2} \Big|_{D_i^2} \left(\delta_0 \Psi_{\#}^{\#} \Big|_D \right)^4 + \right. \\
& + 2\mathfrak{E}|_{(\#|K)^2} \Big|_{\#|K}|_{D_i} \left(\delta_0 \Psi_{\#}^{\#} \Big|_K \right)^3 \left(\delta_0 \Psi_{\#}^{\#} \Big|_D \right) + (\mathfrak{E} + \Delta \mathfrak{E}) \mathfrak{M}_{(\cdot), K^2 (KD_i)}^{\rho} \left(\delta_0 \Psi_{\#}^{\#} \Big|_K \right)^3 \left(\delta_0 \Psi_{\#}^{\#} \Big|_D \right) + \\
& + 2\mathfrak{E}|_{\#|K}|_{D_i} \Big|_{D_i^2} \left(\delta_0 \Psi_{\#}^{\#} \Big|_K \right) \left(\delta_0 \Psi_{\#}^{\#} \Big|_D \right)^3 + (\mathfrak{E} + \Delta \mathfrak{E}) \mathfrak{M}_{(\cdot), (KD_i) D_i^2}^{\rho} \left(\delta_0 \Psi_{\#}^{\#} \Big|_K \right) \left(\delta_0 \Psi_{\#}^{\#} \Big|_D \right)^3 + \\
& + 2\mathfrak{E}|_{D_i^2} \Big|_{(\#|K)^2} \left(\delta_0 \Psi_{\#}^{\#} \Big|_D \right)^2 \left(\delta_0 \Psi_{\#}^{\#} \Big|_K \right)^2 + (\mathfrak{E} + \Delta \mathfrak{E}) \mathfrak{M}_{(\cdot), D_i^2 K^2}^{\rho} \left(\delta_0 \Psi_{\#}^{\#} \Big|_D \right)^2 \left(\delta_0 \Psi_{\#}^{\#} \Big|_K \right)^2 \Big\} \Delta \Omega \Delta t + \\
& + \sum_T \sum_{\Omega} \left(\mathfrak{E}|_{\Delta \Psi_{\#}^{\#}} \left(\delta_0 \Delta \Psi_{\#}^{\#} \right) + \mathfrak{E}|_{\mathfrak{M}_{\#}^{\rho}, K D_i} \left(\delta_0 \mathfrak{M}_{\#}^{\rho}, K D_i \right) \right) \Delta \Omega \Delta t + \tag{12} \\
& + \sum_T \sum_{\Omega} \frac{1}{2} \left\{ \mathfrak{E}|_{(\Delta \Psi_{\#}^{\#})^2} \left(\delta_0 \Delta \Psi_{\#}^{\#} \right)^2 + \mathfrak{E}|_{\{\mathfrak{M}_{\#}^{\rho}, K D_i\}^2} \left(\delta_0 \mathfrak{M}_{\#}^{\rho}, K D_i \right)^2 + \right. \\
& + 2\mathfrak{E}|_{\Delta \Psi_{\#}^{\#} \mathfrak{M}_{\#}^{\rho}, K D_i} \left(\delta_0 \Delta \Psi_{\#}^{\#} \right) \left(\delta_0 \mathfrak{M}_{\#}^{\rho}, K D_i \right) + (\mathfrak{E} + \Delta \mathfrak{E}) \mathfrak{M}_{(\cdot), (\Delta \Psi_{\#}^{\#}) (\mathfrak{M}_{\#}^{\rho}, K D_i)}^{\rho} \left(\delta_0 \Delta \Psi_{\#}^{\#} \right) \left(\delta_0 \mathfrak{M}_{\#}^{\rho}, K D_i \right) \Big\} + \\
& + \left[\underline{\underline{\mathfrak{E}}} \mathfrak{E} \delta \Xi_{\#}^K \Delta \Pi_K \delta t \Big]_{t_0}^4 + 2 \sum_T \sum_{\Omega} \left[\underline{\underline{\mathfrak{E}}} \mathfrak{E}^2 \delta \Xi_{\#}^K \Delta \bar{\Pi}_K \delta \bar{t} \Big]_{t_0}^4 \Delta \Omega \Delta t + \\
& + \sum_T \underline{\underline{\mathfrak{E}}} \sum_T \underline{\underline{\mathfrak{E}}} \mathfrak{E}^2 \delta \Xi_{\#}^K \Delta \bar{\Pi}_K \Delta \bar{t} \delta \Xi_{\#}^K \Delta \Pi_K \Delta t + \left[\sum_{\Omega} \left[\sum_{\Omega} \mathfrak{E}^2 \Delta \bar{\Omega} \delta \bar{t} \Big]_{t_0}^4 \Delta \Omega \delta t \right]_{t_0}^4 + \\
& + 2 \sum_T \underline{\underline{\mathfrak{E}}} \left[\underline{\underline{\mathfrak{E}}} \mathfrak{E}^2 \delta \Xi_{\#}^K \Delta \bar{\Pi}_K \delta \bar{t} \Big]_{t_0}^4 \Delta \Pi_K \delta \Xi_{\#}^K \Delta t + 2 \left[\sum_{\Omega} \left[\underline{\underline{\mathfrak{E}}} \mathfrak{E}^2 \delta \Xi_{\#}^K \Delta \bar{\Pi}_K \delta \bar{t} \Big]_{t_0}^4 \Delta \Omega \delta t \right]_{t_0}^4 + \\
& + \left[\underline{\underline{\mathfrak{E}}} \left[\underline{\underline{\mathfrak{E}}} \mathfrak{E}^2 \delta \Xi_{\#}^K \Delta \bar{\Pi}_K \delta \bar{t} \Big]_{t_0}^4 \delta \Xi_{\#}^K \Delta \Pi_K \delta t \right]_{t_0}^4 .
\end{aligned}$$

Z zasady stacjonarności wynika, że aby funkcjonal działania $W_\psi \equiv W_o$ określony w \mathcal{P}_x miał w punkcie $\psi_o \in \mathcal{P}_x$ ekstremum trzeba, by $\delta_o W = 0$.

Z zasady stacjonarności, tj. przy braku sił objętościowych, wynikać będzie, że do dalszych rozważań z części liniowej wariacji δW a więc

$$\sum_T \sum_\Omega \left[\mathcal{E}|_k - \mathcal{E}|_{k|K}|_K - \mathcal{E}|_{D_k}|_D \right] \delta_o \psi_o^k \Delta \Omega \Delta t + \sum_T \sum_{\Pi} \left(\mathcal{E}|_{k|K} \delta_o \psi_o^k \Delta \Pi_K \Delta t + \mathcal{E} \delta \Xi_o^k \right) \Delta \Pi_K \Delta t + \left[\sum_\Omega \left(\mathcal{E}|_D \delta_o \psi_o^k + \mathcal{E} \delta t \right) \Delta \Omega \right]_{t_o}^{t_1} = {}^1 \delta_o W, \quad (13)$$

należy wziąć jedynie pierwszą podwójną sumę. Powody są następujące: $\delta \psi_o^k$ na brzegu obszaru $\Omega \times T$ zeruje się a poza tym drugie składniki sum drugiej i trzeciej dotyczą zmiennych niezależnych. Część nieliniowa wariacji δW ale ta, która jest związana z wariacją zmiennych dynamicznych ${}^2 \delta_o W$ decyduje o charakterze ekstremum. Jeżeli ${}^2 \delta_o W \neq 0$, to wówczas dla dostatecznie małych wielkości $\delta \psi_o^a$ i $\delta \psi_o^a|_K$ znak $\delta_o W$ jest taki jak znak ${}^2 \delta_o W$. Tak więc warunkiem głównym istnienia ekstremum pozostanie ${}^1 \delta_o W = 0$. Znak drugiej wariacji ${}^2 \delta_o W$ oraz zerowanie się pierwszej ${}^1 \delta_o W$ są warunkami koniecznymi i dostatecznymi istnienia ekstremum słabego. W punkcie ekstremalnym będzie

$$\text{dla minimum } \mathcal{E}|_{(\psi_o^a|_b)} \geq 0, \quad \text{dla maksimum } \mathcal{E}|_{(\psi_o^a|_b)} \leq 0.$$

Ponadto krzywa ekstremalna nie przecina żadnej innej a więc spełnia warunek Jacoby'ego. Mocne ekstremum wymaga spełnienia ostrych nierówności. W konsekwencji będzie zatem

$$\mathcal{E}|_k - \mathcal{E}|_{k|K}|_K - \mathcal{E}|_{D_k}|_D = 0. \quad (14)$$

Uwzględniając działanie sił objętościowych P_k oraz wprowadzając oznaczenia [2,3,4]

$$-\mathcal{E}|_{k|K} \doteq t_{k^*}^K, \quad \mathcal{E}|_{D_k} \doteq m_k, \quad t_k \doteq t_{k^*}^K N_K, \quad \Delta \Pi_K \doteq N_K \Delta \Pi, \quad (15)$$

otrzymuje się równanie ruchu

$$\mathcal{E}|_k - \mathcal{E}|_{k|K}|_K - D \mathcal{E}|_{D_k} = -P_k, \quad \mathcal{E}|_k + t_{k^*}^K|_K + P_k = D m_k. \quad (16)$$

Podkreślone w wariacji (12) wyrazy wystąpią w wariacji liniowej podanej w pracy [3]. Równania (16) wraz z warunkami początkowymi i brzegowymi powinny zapewniać istnienie rozwiązań $\psi_o^k \equiv \xi_o^k = \xi_o^k(\Xi_o^K, t)$, definiujących ruch ośrodka, jak również gwarantować jednoznaczność tych rozwiązań o ile dobrze postawiona jest strona fizyczna zagadnienia. Będzie tak z pewnością w przestrzeni euklidesowej.

Wariację (12) można zapisać w postaci

$$\begin{aligned}
\delta W = & \sum_T \sum_{\Omega} \left[\mathcal{L}|_k + t_{k*}^K|_K - Dm_k \right] \delta_0 \psi_*^k \Delta \Omega \Delta t - \\
& - \sum_T \sum_{\Pi} t_{k*}^K \delta_0 \psi_*^k \Delta \Pi_K \Delta t + \left[\sum_{\Omega} m_k \delta_0 \psi_*^k \Delta \Omega \right]_{t_0}^{t_1} + \\
& + \sum_T \sum_{\Pi} \mathcal{L} \delta \Xi_*^K \Delta \Pi_K \Delta t + \left[\sum_{\Omega} \mathcal{L} \delta t \Delta \Omega \right]_{t_0}^{t_1} + {}^2\delta_0 W + \delta_{\Xi} W_{(-)} = 0,
\end{aligned} \tag{17}$$

gdzie: $\delta_{\Xi} W_{(-)} = \delta_{\Xi} W - \sum_T \sum_{\Pi} \mathcal{L} \delta \Xi_*^K \Delta \Pi_K \Delta t - \left[\sum_{\Omega} \mathcal{L} \delta t \Delta \Omega \right]_{t_0}^{t_1}$.

Zakładając, że zmienne dynamiczne spełniają równania ruchu (16), więc ostatnią zależność będzie można zapisać

$$\begin{aligned}
\delta W = & - \sum_T \sum_{\Omega} P_k \delta_0 \psi_*^k \Delta \Omega \Delta t - \sum_T \sum_{\Pi} t_{k*}^K \delta_0 \psi_*^k \Delta \Pi_K \Delta t + \left[\sum_{\Omega} m_k \delta_0 \psi_*^k \Delta \Omega \right]_{t_0}^{t_1} + \\
& + \sum_T \sum_{\Pi} \mathcal{L} \delta \Xi_*^K \Delta \Pi_K \Delta t + \left[\sum_{\Omega} \mathcal{L} \delta t \Delta \Omega \right]_{t_0}^{t_1} + {}^2\delta_0 W + \delta_{\Xi} W_{(-)} = 0.
\end{aligned} \tag{18}$$

Literatura

1. MARCINIAK A.: *Wstępny opis roślinnego ośrodka siatkowego – źdźbłowego*. Rozprawa habilitacyjna, Lublin 1995.
2. WOŹNIAK C.: *Ośrodki ciągłe z mikrostrukturą. Metody Geometryczne w Fizyce i Technice*. PWN, Warszawa 1968.
3. WOŹNIAK C.: *Podstawy dynamiki ciał odkształcalnych*. PWN, Warszawa 1969.
4. WOŹNIAK C.: *Wstęp do mechaniki analitycznej kontinuum materialnego. Dynamika układów sprężystych*. Ossolineum, Wrocław 1976.

Streszczenie

Punktem wyjścia do rozważań jest zdefiniowanie współrzędnej zależnej, której argumenty doznały przyrostu. Następnie należy przedstawić ogólną postać funkcji materiałowej Lagrange'a. Wariacja $\delta_0 \mathcal{L}^1$ zależna będzie od obiektów krzywizny. W wariacji $\delta_{\Xi} W^2$ uwzględniono wszystkie kombinacje przyrostów i sum przestrzeni bazowej (11). Ostatecznie otrzymuje się całkowitą wariację δW , która jest konieczna dla dalszych rozważań. Również z rozważań nad wariacją wynika postać równań ruchu (16).

UWAGI O OŚRODKU QUASI – PROSTYM Cz. II. Całkowe słabe prawa zachowania

Andrzej L. Marciniak, Andrzej Fijołek
Katedra Maszyn i Urządzeń Rolniczych WTR, Akademia Rolnicza, Lublin
Jerzy Podgórski, Piotr Sieczka
Wydział Inżynierii Budowlanej i Sanitarnej, Politechnika Lubelska, Lublin

Synopsis: Z racji niezależności liniowej składowych (będących wyrażeniami przy parametrach ruchu oraz ich potęgach i iloczynach) sumy stanowiącej wariację funkcjonalu działania $\delta W = 0$, otrzymuje się postaci słabych całkowych praw zachowania.

Słowa kluczowe: Słabe całkowe prawa zachowania.

Kontynuując rozważania dotyczące współrzędnych można zapisać ich przekształcenia przy przejściu od przestrzeni $\Omega \times T$ do $\tilde{\Omega} \times \tilde{T}$. Będzie zatem

$$\Xi_*^k \rightarrow \Xi_*^k + \delta \Xi_*^k, \quad \psi_*^k \rightarrow \psi_*^k + \varepsilon^k + \varepsilon^{kl} \psi_l, \quad t \rightarrow t + \varepsilon. \quad (1)$$

Ponieważ całkowita wariacja zmiennych dynamicznych $\delta \psi_*^k$ jest sumą wariacji postaci zmiennych dynamicznych $\delta_o \psi_*^k$ oraz wariacji $\delta \Xi_*^k, \delta t$ zmiennych niezależnych Ξ_*^k, t , więc przyjmie ona następującą postać

$$\begin{aligned} \delta \psi_*^k &= \delta_o \psi_*^k + \psi_*^k \Big|_K \delta \Xi_*^k + D \psi_*^k \delta t + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\psi_*^k \Big|_{K^2} (\delta \Xi_*^k)^2 + \psi_*^k \Big|_{D,K} \delta \Xi_*^k \delta t + \psi_*^k \Big|_{D,K} \delta \Xi_*^k \delta t + D^2 \psi_*^k (\delta t)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Funkcjonał działania δW musi być niezmiennikiem grupy przekształceń $\tilde{\Xi}_*^A = \tilde{\Xi}_*^A(\Xi_*^B, \varepsilon^a)$, $\tilde{\Xi}_*^A, \Xi_*^A \in \mathcal{D}_x$, $\tilde{\psi}_*^a = \tilde{\psi}_*^a(\psi_*^B, \varepsilon^a)$. Otóż jak wynika z twierdzenia E. NOETHER funkcje φ bądź funkcjonały $\sum_{\Omega} \mathcal{L}$ są niezmiennikami, gdy ich wariacje znikają, tzn.

$$\tilde{\varphi}(\tilde{\tau}) = \varphi(\cdot), \quad \sum_{\tilde{\Omega}} \mathcal{L}(\tilde{\tau}) \Delta \tilde{\Omega} = \sum_{\Omega} \mathcal{L}(\cdot) \Delta \Omega. \quad (3)$$

Powoduje to, że wariacja całkowita niezmiennika znika dla każdego ciągu parametrów danego zbioru. Tak więc

$$\delta \psi_*^k \rightarrow 0, \quad \delta W = 0. \quad (4)$$

Pierwsze wyrażenie wynika z faktu, że parametry są nieinfinitesimalne. Będzie zatem

$$\Xi_*^k \rightarrow \Xi_*^k + \delta \Xi_*^k, \quad t \rightarrow t + \delta t, \quad \xi_*^k \rightarrow \xi_*^k + \delta \xi_*^k, \quad (5)$$

gdzie:

$$\delta \Xi_*^k \doteq \Xi_*^k \Big|_{\varepsilon^k} \varepsilon^k + \Xi_*^k \Big|_{\varepsilon^{kl}} \varepsilon^{kl} + D^o \Xi_*^k \varepsilon +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\Xi_{\varepsilon^{2k}}^K |_{\varepsilon^{2k}}^o \varepsilon^{2k} + \Xi_{\varepsilon^{2k}}^K |_{\varepsilon^{2k}}^o \varepsilon^{2kl} + (D^o)^2 \Xi_{\varepsilon^2}^K + \Xi_{\varepsilon^k}^K |_{\varepsilon^k}^o \varepsilon^k \varepsilon^{kl} + \right. \\ \left. + \Xi_{\varepsilon^k}^K |_{\varepsilon^k}^o \varepsilon^k \varepsilon^{kl} + \Xi_{\varepsilon^k}^K |_{\varepsilon^k}^o \varepsilon^{kl} \varepsilon + \Xi_{\varepsilon^k}^K |_{\varepsilon^k}^o \varepsilon^{kl} \varepsilon + \Xi_{\varepsilon^k}^K |_{\varepsilon^k}^o \varepsilon \varepsilon^k + \Xi_{\varepsilon^k}^K |_{\varepsilon^k}^o \varepsilon \varepsilon^k \right),$$

$$\delta t = \varepsilon,$$

$$\delta \psi_{\varepsilon^k}^k \doteq \psi_{\varepsilon^k}^k + \varepsilon^k = \delta_0 \psi_{\varepsilon^k}^k + \psi_{\varepsilon^k}^k |_{\varepsilon^k} \delta \Xi_{\varepsilon^k}^K + D \psi_{\varepsilon^k}^k \varepsilon + \\ + \frac{1}{2} \left[\psi_{\varepsilon^k}^k |_{\varepsilon^k} (\delta \Xi_{\varepsilon^k}^K)^2 + \psi_{\varepsilon^k}^k |_{\varepsilon^k} \delta \Xi_{\varepsilon^k}^K \varepsilon + \psi_{\varepsilon^k}^k |_{\varepsilon^k} \delta \Xi_{\varepsilon^k}^K \varepsilon + D^2 \psi_{\varepsilon^k}^k \varepsilon^2 \right].$$

Teraz

$$\delta_0 \psi_{\varepsilon^k}^k = \psi_{\varepsilon^k}^k + \varepsilon^k - \psi_{\varepsilon^k}^k |_{\varepsilon^k} \delta \Xi_{\varepsilon^k}^K - D \psi_{\varepsilon^k}^k \varepsilon - \\ - \frac{1}{2} \left[\psi_{\varepsilon^k}^k |_{\varepsilon^k} (\delta \Xi_{\varepsilon^k}^K)^2 + \psi_{\varepsilon^k}^k |_{\varepsilon^k} \delta \Xi_{\varepsilon^k}^K \varepsilon + \psi_{\varepsilon^k}^k |_{\varepsilon^k} \delta \Xi_{\varepsilon^k}^K \varepsilon + D^2 \psi_{\varepsilon^k}^k \varepsilon^2 \right]. \quad (6)$$

Jeżeli $\delta \Xi_{\varepsilon^k}^K = 0$ oraz przy uwzględnieniu jedynie przyrostów nieskończenie małych wariacja $\delta_0 \psi_{\varepsilon^k}^k$ zawierać będzie jedynie trzy podkreślone wyrazy. Teraz należy rozwinąć poszczególne wyrażenia a następnie wyrazy pogrupować względem poszczególnych parametrów.

W takiej sytuacji m niezależnych kombinacji pochodnych wariacyjnych zamienia się w divergencję (jest to właśnie treść twierdzenia E. NOETHER). W wyrażeniu (6) wystąpi obiekt krzywizny.

Uwzględniając $t_k \doteq t_{k^*}^k N_k$, $\Delta \Pi_K = \Delta \Pi N_K$ wariację funkcjonału działania będzie można zapisać

$$\delta W = - \sum_{\tau} \sum_{\Omega} P_k \delta_0 \psi_{\varepsilon^k}^k \Delta \Omega \Delta t - \sum_{\tau} \sum_{\Pi} t_{k^*}^k \delta_0 \psi_{\varepsilon^k}^k \Delta \Pi_K \Delta t + \left[\sum_{\Omega} m_k \delta_0 \psi_{\varepsilon^k}^k \Delta \Omega \right]_{t_0}^{t_1} + \\ + \sum_{\tau} \sum_{\Pi} \varepsilon \delta \Xi_{\varepsilon^k}^K N_k \Delta \Pi \Delta t + \left[\sum_{\Omega} \varepsilon \varepsilon \Delta \Omega \right]_{t_0}^{t_1} + {}^2 \delta_0 W + \delta_{\varepsilon} W_{(-)} = 0. \quad (7)$$

Ilość parametrów a zatem i ilość równań ruchu wynikać będzie z postaci wariacji $\delta_0 \psi_{\varepsilon^k}^k$. Wariację daną zależnością (5) $\delta \Xi_{\varepsilon^k}^K$ można zapisać następująco

$$\delta W = - \sum_{\tau} \sum_{\Omega} \left\{ \left[-P_k - t_{k^*}^k |_{\varepsilon^k} + D m_k + t_{k^*}^k(\cdot) |_{\varepsilon^k} + m_k D(\cdot) \right] \delta_0 \psi_{\varepsilon^k}^k + \varepsilon^k |_{\varepsilon^k} \delta \Xi_{\varepsilon^k}^K + D \varepsilon \varepsilon \right\} \Delta \Omega \Delta t + \\ + {}^2 \delta_0 W + \delta_{\varepsilon} W_{(-)} = 0. \quad (8)$$

W wyrażeniu ${}^2 \delta_0 W$ wystąpią drugie oraz czwarte potęgi wariacji $\delta_0 \psi_{\varepsilon^k}^k$ zmiennej $\psi_{\varepsilon^k}^k$ lub jej pochodnej. Niezależnie od postaci argumentu wariacji ilość jej wyrazów nie ulegnie zmianie a ta mówi o ilości równań. Rezygnując z ${}^2 \delta_0 W$ ilość równań znacznie

się zmniejszy i wyniesie 61 (tab. 1). Uwzględnienie członu $\delta_{\Xi} W_{(-)}$, nie wpłynie na ilość równań a jednocześnie będzie w ten sposób wyraźniej zaznaczona obecność wariacji $\delta \Xi_{\kappa}^k$, która pełni tutaj rolę „pola zewnętrznego”. Użyte tu pojęcie „pola zewnętrznego” jest bardzo ważnym w opisie ośrodka i będzie omówione w dalszej części.

Składowe wariacji $\delta_{\Xi} W_{(-)}$ będzie można zapisać następująco:

$$\begin{aligned}
 & \left[\sum_{\Pi} \mathfrak{E} \delta \Xi_{\kappa}^k \Delta \Pi_{\kappa} \delta t \right]_{i_0}^4 = \left[\sum_{\Omega} \mathfrak{E} |_{\kappa} \delta \Xi_{\kappa}^k \Delta \Omega \varepsilon \right]_{i_0}^4 = \varepsilon \sum_{\mathcal{T}} \sum_{\Omega} \left(D \mathfrak{E} |_{\kappa} \delta \Xi_{\kappa}^k + \mathfrak{E} |_{\kappa} D \delta \Xi_{\kappa}^k \right) \Delta \Omega \Delta t, \\
 & 2 \sum_{\mathcal{T}} \sum_{\Omega} \left[\sum_{\Pi} \mathfrak{E}^2 \delta \Xi_{\kappa}^k \Delta \bar{\Pi}_{\kappa} \delta \bar{t} \right]_{i_0}^4 \Delta \Omega \Delta t = 2 \varepsilon \sum_{\mathcal{T}} \sum_{\Omega} \left[\sum_{\mathcal{T}} \sum_{\Pi} \left(D \mathfrak{E}^2 \delta \Xi_{\kappa}^k + \mathfrak{E}^2 D \delta \Xi_{\kappa}^k \right) \Delta \bar{\Pi}_{\kappa} \delta \bar{t} \right] \Delta \Omega \Delta t = \\
 & \quad = 2 \varepsilon \sum_{\mathcal{T}} \sum_{\Omega} \sum_{\mathcal{T}} \sum_{\Omega} \left(D \mathfrak{E}^2 |_{\kappa} \delta \Xi_{\kappa}^k + \mathfrak{E}^2 |_{\kappa} D \delta \Xi_{\kappa}^k \right) \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{t} \Delta \Omega \Delta t, \\
 & \sum_{\mathcal{T}} \sum_{\Pi} \sum_{\mathcal{T}} \sum_{\Pi} \mathfrak{E}^2 \delta \Xi_{\kappa}^k \Delta \bar{\Pi}_{\kappa} \delta_{\Xi} \Xi_{\kappa}^k \Delta \Pi_{\kappa} \Delta t = \sum_{\mathcal{T}} \sum_{\Pi} \sum_{\mathcal{T}} \sum_{\Omega} \mathfrak{E}^2 |_{\kappa} \delta \Xi_{\kappa}^k \Delta \bar{t} \delta \Xi_{\kappa}^k \Delta \Omega \Delta t = \\
 & \quad = \sum_{\mathcal{T}} \sum_{\Omega} \sum_{\mathcal{T}} \sum_{\Omega} \mathfrak{E}^2 |_{\kappa^2} \delta \Xi_{\kappa}^k \delta \Xi_{\kappa}^k \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{t} \Delta \Omega \Delta t, \\
 & \left[\sum_{\Omega} \left[\sum_{\Omega} \mathfrak{E}^2 \Delta \bar{\Omega} \delta \bar{t} \right]_{i_0}^4 \Delta \Omega \delta t \right]_{i_0}^4 = \varepsilon \sum_{\mathcal{T}} \sum_{\Omega} \sum_{\mathcal{T}} \sum_{\Omega} D^2 \mathfrak{E}^2 \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{t} \Delta \Omega \Delta t, \\
 & 2 \sum_{\mathcal{T}} \sum_{\Pi} \left[\sum_{\Pi} \mathfrak{E}^2 \delta \Xi_{\kappa}^k \Delta \bar{\Pi}_{\kappa} \delta \bar{t} \right]_{i_0}^4 \Delta \Pi_{\kappa} \delta \Xi_{\kappa}^k \Delta t = \\
 & \quad = 2 \sum_{\mathcal{T}} \sum_{\Pi} \sum_{\mathcal{T}} \sum_{\Pi} \left(D \mathfrak{E}^2 \delta \Xi_{\kappa}^k + \mathfrak{E}^2 D \delta \Xi_{\kappa}^k \right) \varepsilon \Delta \bar{\Pi}_{\kappa} \Delta \Pi_{\kappa} \delta \Xi_{\kappa}^k \Delta \bar{t} \Delta t = \\
 & \quad = 2 \varepsilon \sum_{\mathcal{T}} \sum_{\Pi} \sum_{\mathcal{T}} \sum_{\Omega} \left(D \mathfrak{E}^2 |_{\kappa} \delta \Xi_{\kappa}^k + \mathfrak{E}^2 |_{\kappa} D \delta \Xi_{\kappa}^k \right) \delta \Xi_{\kappa}^k \Delta \bar{t} \Delta t = \quad (9) \\
 & \quad = 2 \varepsilon \sum_{\mathcal{T}} \sum_{\Pi} \sum_{\mathcal{T}} \sum_{\Omega} \left(D \mathfrak{E}^2 |_{\kappa^2} \delta \Xi_{\kappa}^k + \mathfrak{E}^2 |_{\kappa^2} D(\cdot) \right) \delta \Xi_{\kappa}^k \delta \Xi_{\kappa}^k \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{t} \Delta \Omega \Delta t, \\
 & 2 \left[\sum_{\Omega} \left[\sum_{\Pi} \mathfrak{E}^2 \delta \Xi_{\kappa}^k \Delta \bar{\Pi}_{\kappa} \delta \bar{t} \right]_{i_0}^4 \Delta \Omega \delta t \right]_{i_0}^4 = 2 \varepsilon \left[\sum_{\mathcal{T}} \sum_{\Pi} \sum_{\mathcal{T}} \left(D \mathfrak{E}^2 \delta \Xi_{\kappa}^k + \mathfrak{E}^2 D \delta \Xi_{\kappa}^k \right) \Delta \bar{\Pi}_{\kappa} \Delta \bar{t} \Delta \Omega \delta t \right]_{i_0}^4 = \\
 & \quad = 2 \varepsilon \left[\sum_{\Omega} \sum_{\mathcal{T}} \sum_{\Omega} \left(D \mathfrak{E}^2 |_{\kappa} \delta \Xi_{\kappa}^k + \mathfrak{E}^2 |_{\kappa} D \delta \Xi_{\kappa}^k \right) \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{t} \Delta \Omega \delta t \right]_{i_0}^4 = \\
 & \quad = 2 \varepsilon^2 \sum_{\Omega} \sum_{\mathcal{T}} \sum_{\Omega} \sum_{\mathcal{T}} \left(D^2 \mathfrak{E}^2 |_{\kappa} \delta \Xi_{\kappa}^k + 2 D \mathfrak{E}^2 |_{\kappa} D \delta \Xi_{\kappa}^k + \mathfrak{E}^2 |_{\kappa} D^2 \delta \Xi_{\kappa}^k \right) \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{t} \Delta \Omega \Delta t = \\
 & \quad = 2 \varepsilon^2 \sum_{\Omega} \sum_{\mathcal{T}} \sum_{\Omega} \sum_{\mathcal{T}} \left(D^2 \mathfrak{E}^2 |_{\kappa} + 2 D \mathfrak{E}^2 |_{\kappa}(\cdot) + \mathfrak{E}^2 |_{\kappa} D^2(\cdot) \right) \delta \Xi_{\kappa}^k \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{t} \Delta \Omega \Delta t,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\sum_{\Pi} \left[\sum_{\Pi} \mathfrak{E}^2 \delta \Xi^k \Delta \bar{\Pi}_k \delta \bar{t} \right]_{\epsilon}^4 \delta \Xi^k \Delta \bar{\Pi}_k \delta t \right]_{\epsilon}^4 = \\
& = \left[\sum_{\Pi} \sum_{\Gamma} \sum_{\Pi} (D \mathfrak{E}^2 \delta \Xi^k + \mathfrak{E}^2 D \delta \Xi^k) \epsilon \Delta \bar{\Pi}_k \Delta \bar{t} \delta \Xi^k \Delta \bar{\Pi}_k \delta t \right]_{\epsilon}^4 = \\
& = \epsilon^2 \sum_{\Gamma} \sum_{\Pi} \sum_{\Pi} \left[(D^2 \mathfrak{E}^2 \delta \Xi^k + 2D \mathfrak{E}^2 D \delta \Xi^k + \mathfrak{E}^2 D^2 \delta \Xi^k) \delta \Xi^k + \right. \\
& \quad \left. + (D \mathfrak{E}^2 \delta \Xi^k + \mathfrak{E}^2 D \delta \Xi^k) D \delta \Xi^k \right] \Delta \bar{\Pi}_k \Delta \bar{t} \Delta \bar{\Pi}_k \Delta t = \\
& = \epsilon^2 \sum_{\Gamma} \sum_{\Pi} \sum_{\Omega} \left(D^2 \mathfrak{E}^2 |_{\kappa} \delta \Xi^k \delta \Xi^k + 2D \mathfrak{E}^2 |_{\kappa} D \delta \Xi^k \delta \Xi^k + \mathfrak{E}^2 |_{\kappa} D^2 \delta \Xi^k \delta \Xi^k + \right. \\
& \quad \left. + D \mathfrak{E}^2 |_{\kappa} \delta \Xi^k \delta \Xi^k + \mathfrak{E}^2 |_{\kappa} D \delta \Xi^k D \delta \Xi^k \right) \Delta \bar{\Pi}_k \Delta \bar{t} \Delta \Omega \Delta t = \\
& = \epsilon^2 \sum_{\Gamma} \sum_{\Omega} \sum_{\Gamma} \sum_{\Omega} \left(D^2 \mathfrak{E}^2 |_{\kappa^2} \delta \Xi^k \delta \Xi^k + 2D \mathfrak{E}^2 |_{\kappa^2} D \delta \Xi^k \delta \Xi^k + \mathfrak{E}^2 |_{\kappa^2} D^2 \delta \Xi^k \delta \Xi^k + \right. \\
& \quad \left. + D \mathfrak{E}^2 |_{\kappa^2} \delta \Xi^k D \delta \Xi^k + \mathfrak{E}^2 |_{\kappa^2} D \delta \Xi^k D \delta \Xi^k \right) \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{t} \Delta \Omega \Delta t.
\end{aligned}$$

Teraz słabe prawa zachowania będzie można, na podstawie znajomości wariacji $\delta W = 0$ (7) zapisać przyrównanie do zera operatorów sumacyjnych znajdujących się przy parametrach ruchu oraz ich potęgach i iloczynach. Będzie zatem

$$\delta W = \sum_{\Gamma} \sum_{\Omega} \left\{ \left[-P_k - t_{i\alpha}^k \right]_{\kappa} - t_{i\alpha}^k(\cdot) \right]_{\psi} + D m_k + m_k D(\cdot) \left[\delta_0 \psi_{\alpha}^k + \mathfrak{E} |_{\kappa} \delta \Xi^k + \epsilon D \mathfrak{E} \right] \Delta \Omega \Delta t + \delta_{\Xi} W_{(-)} = 0,$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
\delta_{\Xi} W_{(-)} = & \sum_{\Gamma} \sum_{\Omega} \left(D \mathfrak{E} |_{\kappa} + \mathfrak{E} |_{\kappa} D(\cdot) \right) \epsilon \delta \Xi^k \Delta \Omega \Delta t + \\
& + \sum_{\Gamma} \sum_{\Omega} \sum_{\Gamma} \sum_{\Omega} \left(D \mathfrak{E}^2 |_{\kappa} + \mathfrak{E}^2 |_{\kappa} D(\cdot) + D^2 \mathfrak{E}^2 |_{\kappa} + 2D \mathfrak{E}^2 |_{\kappa} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2 |_{\kappa} D^2(\cdot) \right) 2\epsilon \delta \Xi^k \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{t} \Delta \Omega \Delta t + \\
& + \sum_{\Gamma} \sum_{\Omega} \sum_{\Gamma} \sum_{\Omega} \left(D \mathfrak{E}^2 |_{\kappa^2} + \mathfrak{E}^2 |_{\kappa^2} D(\cdot) \right) 2\epsilon \delta \Xi^k \delta \Xi^k \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{t} \Delta \Omega \Delta t + \\
& + \sum_{\Gamma} \sum_{\Omega} \sum_{\Gamma} \sum_{\Omega} \left[D^2 \mathfrak{E}^2 |_{\kappa^2} + 2D \mathfrak{E}^2 |_{\kappa^2} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2 |_{\kappa^2} D^2(\cdot) + D \mathfrak{E}^2 |_{\kappa^2} D(\cdot) + \right. \\
& \quad \left. + \mathfrak{E}^2 |_{\kappa^2} D(\cdot) D(\cdot) \right] \epsilon^2 \delta \Xi^k \delta \Xi^k \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{t} \Delta \Omega \Delta t.
\end{aligned} \tag{10}$$

Grupując następnie wyrazy względem parametrów ich potęg i iloczynów uzyskuje się słabe całkowite prawa zachowania. Skoro bowiem sama wariacja się zeruje, więc również wszystkie wyrażenia stojące przy parametrach z racji ich liniowej niezależności również będą się zerować. Parametry ruchu zestawiono w tabeli 1. Należy pamiętać, że jak to już uprzednio zaznaczono, wszystkie 61 wielkości są parametrami ruchu. A zatem liczba równań wzrośnie z trzech dla rozwiązań klasycznych do sześćdziesięciu

jeden. Wyrażenia znajdujące się przy parametrze ε^{kl} są antysymetryczne. W dalszym ciągu utrzymuje się warunek niezależności współrzędnych Lagrange'a i Eulera od parametrów ruchu.

Tabela 1. Zestawienie parametrów równań ruchu

ε	ε^k	ε^{kl}	$\varepsilon\varepsilon^k$	$\varepsilon\varepsilon^{kl}$	$\varepsilon^k\varepsilon^{kl}$	$\varepsilon\varepsilon^k\varepsilon^{kl}$
ε^2	ε^{2k}	ε^{2kl}	$\varepsilon\varepsilon^{2k}$	$\varepsilon\varepsilon^{2kl}$	$\varepsilon^k\varepsilon^{2kl}$	$\varepsilon\varepsilon^k\varepsilon^{2kl}$
ε^3	ε^{3k}	ε^{3kl}	$\varepsilon\varepsilon^{3k}$	$\varepsilon\varepsilon^{3kl}$	$\varepsilon^k\varepsilon^{3kl}$	$\varepsilon\varepsilon^k\varepsilon^{3kl}$
ε^4	ε^{4k}	ε^{4kl}	$\varepsilon\varepsilon^{4k}$	$\varepsilon\varepsilon^{4kl}$	$\varepsilon^{2k}\varepsilon^{kl}$	$\varepsilon\varepsilon^{2k}\varepsilon^{kl}$
ε^5			$\varepsilon^2\varepsilon^k$	$\varepsilon^2\varepsilon^{kl}$	$\varepsilon^{2k}\varepsilon^{2kl}$	$\varepsilon\varepsilon^{2k}\varepsilon^{2kl}$
ε^6			$\varepsilon^2\varepsilon^{2k}$	$\varepsilon^2\varepsilon^{2kl}$		$\varepsilon^2\varepsilon^k\varepsilon^{kl}$
			$\varepsilon^2\varepsilon^{3k}$	$\varepsilon^2\varepsilon^{3kl}$		$\varepsilon^2\varepsilon^k\varepsilon^{2kl}$
			$\varepsilon^2\varepsilon^{4k}$	$\varepsilon^2\varepsilon^{4kl}$		$\varepsilon^2\varepsilon^k\varepsilon^{3kl}$
			$\varepsilon^3\varepsilon^k$	$\varepsilon^3\varepsilon^{kl}$		$\varepsilon^2\varepsilon^{2k}\varepsilon^{kl}$
			$\varepsilon^3\varepsilon^{2k}$	$\varepsilon^3\varepsilon^{2kl}$		$\varepsilon^2\varepsilon^{2k}\varepsilon^{2kl}$
			$\varepsilon^3\varepsilon^{3k}$	$\varepsilon^3\varepsilon^{3kl}$		$\varepsilon^3\varepsilon^k\varepsilon^{kl}$
			$\varepsilon^4\varepsilon^k$	$\varepsilon^4\varepsilon^{kl}$		$\varepsilon^3\varepsilon^k\varepsilon^{2kl}$
			$\varepsilon^4\varepsilon^{2k}$	$\varepsilon^4\varepsilon^{2kl}$		$\varepsilon^3\varepsilon^{2k}\varepsilon^{kl}$
			$\varepsilon^5\varepsilon^k$	$\varepsilon^5\varepsilon^{kl}$		$\varepsilon^4\varepsilon^k\varepsilon^{kl}$
6	4	4	14	14	5	14

Teraz całkowite słabe prawa zachowania przyjmą postać

$$\varepsilon \sum_T \sum_{\Omega} \left\{ \left[-P_k - t_{ka}^K \Big|_K - t_{ka}^K(\cdot) \Big|_{\Psi} + Dm_k + m_k D(\cdot) \right] \left[-\psi_a^k \Big|_K D^o \Xi_a^K - D\psi_a^k \right] + \right. \\ \left. + \mathcal{E} \Big|_K D^o \Xi_a^K + D\mathcal{E} \right\} \Delta \Omega \Delta t = 0, \quad (11.1)$$

$$\varepsilon^2 \sum_T \sum_{\Omega} \left\{ \left[-P_k - t_{ka}^K \Big|_K - t_{ka}^K(\cdot) \Big|_{\Psi} + Dm_k + m_k D(\cdot) \right] \cdot \right. \\ \left. \left[-\frac{1}{2} \psi_a^k \Big|_K (D^o)^2 \Xi_a^K - \frac{1}{2} \psi_a^k \Big|_{K^2} (D^o \Xi_a^K)^2 - \frac{1}{2} (\psi_a^k \Big|_{KD} + \psi_a^k \Big|_{DK}) D^o \Xi_a^K - \frac{1}{2} D^2 \psi_a^k \right] + \right. \\ \left. + \mathcal{E} \Big|_K (D^o)^2 \Xi_a^K + \left[D\mathcal{E} \Big|_K + \mathcal{E} \Big|_K D(\cdot) \right] D^o \Xi_a^K + \right. \quad (11.2)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\bar{\tau}} \sum_{\bar{\Omega}} \left(D^2 \mathfrak{E}^2 + 2 \left[D \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa} + \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa} D(\cdot) + D^2 \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa} + 2D \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa} D^2(\cdot) \right] (D^\circ)^2 \Xi_{\bar{\kappa}}^{\kappa} + \right. \\
& \left. + \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} (-D^\circ \Xi_{\bar{\kappa}}^{\kappa} D^\circ \Xi_{\bar{\kappa}}^{\kappa}) \right) \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{\Gamma} \Big\} \Delta \Omega \Delta t = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^3 \sum_{\bar{\tau}} \sum_{\bar{\Omega}} \left\{ \left[-P_k - t_{k\bar{\kappa}}^{\kappa} \Big|_{\kappa} - t_{k\bar{\kappa}}^{\kappa}(\cdot) \Big|_{\kappa} + Dm_k + m_k D(\cdot) \Big|_{\bar{\nu}} \right] \cdot \right. \\
& \cdot \left[-\frac{1}{2} \psi_{\bar{\kappa}}^{\kappa} \Big|_{\kappa^2} D^\circ \Xi_{\bar{\kappa}}^{\kappa} (D^\circ)^2 \Xi_{\bar{\kappa}}^{\kappa} - \frac{1}{4} (\psi_{\bar{\kappa}}^{\kappa} \Big|_{\kappa D} + \psi_{\bar{\kappa}}^{\kappa} \Big|_{D\kappa}) (D^\circ)^2 \Xi_{\bar{\kappa}}^{\kappa} \right] + \left[D \mathfrak{E} \Big|_{\kappa} + \mathfrak{E} \Big|_{\kappa} D(\cdot) \Big|_{\bar{\Xi}} \right] D^\circ \Xi_{\bar{\kappa}}^{\kappa} + \right. \\
& \left. \right\} \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{\Gamma} \Big\} \Delta \Omega \Delta t = 0, \tag{11.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\bar{\tau}} \sum_{\bar{\Omega}} \left(2 \left[D \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa} + \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa} D(\cdot) + D^2 \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa} + 2D \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa} D^2(\cdot) \right] (D^\circ)^2 \Xi_{\bar{\kappa}}^{\kappa} + \right. \\
& \left. + \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} (-D^\circ \Xi_{\bar{\kappa}}^{\kappa} (D^\circ)^2 \Xi_{\bar{\kappa}}^{\kappa}) + 2 \left[D \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} + \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} D(\cdot) \Big|_{\bar{\Xi}} \right] (-D^\circ \Xi_{\bar{\kappa}}^{\kappa} D^\circ \Xi_{\bar{\kappa}}^{\kappa}) \right) \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{\Gamma} \Big\} \Delta \Omega \Delta t = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^4 \sum_{\bar{\tau}} \sum_{\bar{\Omega}} \left\{ \left[-P_k - t_{k\bar{\kappa}}^{\kappa} \Big|_{\kappa} - t_{k\bar{\kappa}}^{\kappa}(\cdot) \Big|_{\kappa} + Dm_k + m_k D(\cdot) \Big|_{\bar{\nu}} \right] \cdot \left[-\frac{1}{8} \psi_{\bar{\kappa}}^{\kappa} \Big|_{\kappa^2} ((D^\circ)^2 \Xi_{\bar{\kappa}}^{\kappa})^2 \right] + \right. \\
& \left. + \sum_{\bar{\tau}} \sum_{\bar{\Omega}} \left(\left[\mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} \left(-\frac{1}{4} (D^\circ)^2 \Xi_{\bar{\kappa}}^{\kappa} (D^\circ)^2 \Xi_{\bar{\kappa}}^{\kappa} \right) \right] + \right. \tag{11.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. + \left[D^2 \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} + 2D \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} D^2(\cdot) + D \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} D(\cdot) D(\cdot) \Big|_{\bar{\Xi}} \right] D^\circ \Xi_{\bar{\kappa}}^{\kappa} D \Xi_{\bar{\kappa}}^{\kappa} - \right. \\
& \left. - 2 \left[D \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} + \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} D(\cdot) \Big|_{\bar{\Xi}} \right] D^\circ \Xi_{\bar{\kappa}}^{\kappa} (D^\circ)^2 \Xi_{\bar{\kappa}}^{\kappa} \right) \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{\Gamma} \Big\} \Delta \Omega \Delta t = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^5 \sum_{\bar{\tau}} \sum_{\bar{\Omega}} \sum_{\bar{\tau}} \sum_{\bar{\Omega}} \left\{ 2 \left[D \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} + \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} D(\cdot) \right] \left(-\frac{1}{4} (D^\circ)^2 \Xi_{\bar{\kappa}}^{\kappa} (D^\circ)^2 \Xi_{\bar{\kappa}}^{\kappa} \right) + \right. \\
& \left. + \left[D^2 \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} + 2D \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} D^2(\cdot) + D \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} D(\cdot) D(\cdot) \Big|_{\bar{\Xi}} \right] \cdot \right. \\
& \left. \cdot (-D^\circ \Xi_{\bar{\kappa}}^{\kappa} (D^\circ)^2 \Xi_{\bar{\kappa}}^{\kappa}) \right\} \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{\Gamma} \Delta \Omega \Delta t = 0, \tag{11.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^6 \sum_{\bar{\tau}} \sum_{\bar{\Omega}} \sum_{\bar{\tau}} \sum_{\bar{\Omega}} \left\{ \left[D^2 \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} + 2D \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} D^2(\cdot) + D \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} D(\cdot) D(\cdot) \Big|_{\bar{\Xi}} \right] \cdot \right. \\
& \left. \cdot \left(-\frac{1}{4} (D^\circ)^2 \Xi_{\bar{\kappa}}^{\kappa} (D^\circ)^2 \Xi_{\bar{\kappa}}^{\kappa} \right) \right\} \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{\Gamma} \Delta \Omega \Delta t = 0, \tag{11.6}
\end{aligned}$$

$$\varepsilon^k \sum_T \sum_{\Omega} \left\{ \left[-P_k - t_{k_n}^K \Big|_K - t_{k_n}^K(\cdot) \Big|_{\psi} + D m_k + m_k D(\cdot) \right] \left[1 - \psi_n^k \Big|_K \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon} \right] + \mathfrak{E} \Big|_K \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon} \right\} \Delta \Omega \Delta t = 0, \quad (11.7)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{2k} \sum_T \sum_{\Omega} \left\{ \left[-P_k - t_{k_n}^K \Big|_K - t_{k_n}^K(\cdot) \Big|_{\psi} + D m_k + m_k D(\cdot) \right] \cdot \left[-\frac{1}{4} \psi_n^k \Big|_K \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{2k}} - \frac{1}{2} \psi_n^k \Big|_{K^2} \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{2k}} \right)^2 \right] + \right. \\ & \left. + \mathfrak{E} \Big|_K \left[-\frac{1}{8} \psi_n^k \Big|_{K^2} \left((D^{\circ})^2 \Xi_n^K \right)^2 \right] + \sum_T \sum_{\Omega} \mathfrak{E}^2 \Big|_{K^2} \left(-\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^2} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^2} \right) \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{t} \right\} \Delta \Omega \Delta t = 0, \end{aligned} \quad (11.8)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{3k} \sum_T \sum_{\Omega} \left\{ \left[-P_k - t_{k_n}^K \Big|_K - t_{k_n}^K(\cdot) \Big|_{\psi} + D m_k + m_k D(\cdot) \right] \cdot \left[-\frac{1}{2} \psi_n^k \Big|_K \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^2} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{2k}} \right] + \right. \\ & \left. + \sum_T \sum_{\Omega} \left[\mathfrak{E}^2 \Big|_{K^2} \left(-\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^2} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{2k}} \right) \right] \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{t} \right\} \Delta \Omega \Delta t = 0, \end{aligned} \quad (11.9)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{4k} \sum_T \sum_{\Omega} \left\{ \left[-P_k - t_{k_n}^K \Big|_K - t_{k_n}^K(\cdot) \Big|_{\psi} + D m_k + m_k D(\cdot) \right] \cdot \left[-\frac{1}{8} \psi_n^k \Big|_K \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{2k}} \right)^2 \right] + \right. \\ & \left. + \sum_T \sum_{\Omega} \left[\mathfrak{E}^2 \Big|_{K^2} \left(-\frac{1}{4} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{2k}} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{2k}} \right) \right] \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{t} \right\} \Delta \Omega \Delta t = 0, \end{aligned} \quad (11.10)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{kl} \sum_T \sum_{\Omega} \left\{ \left[-P_{[k} - t_{[k_n}^K \Big|_K - t_{[k_n}^K(\cdot) \Big|_{\psi} + D m_{[k} + m_{[k} D(\cdot) \right] \cdot \left[\psi_{l]} - \psi_n^k \Big|_K \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^u} \right] + \right. \\ & \left. + \mathfrak{E} \Big|_K \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^u} \right\} \Delta \Omega \Delta t = 0, \end{aligned} \quad (11.11)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{2kl} \sum_T \sum_{\Omega} \left\{ \left[-P_{[k} - t_{[k_n}^K \Big|_K - t_{[k_n}^K(\cdot) \Big|_{\psi} + D m_{[k} + m_{[k} D(\cdot) \right] \cdot \left[-\frac{1}{2} \psi_n^k \Big|_K \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{2k}} - \frac{1}{2} \psi_n^k \Big|_{K^2} \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^2} \right)^2 \right] + \right. \\ & \left. + \mathfrak{E} \Big|_K \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{2k}} + \sum_T \sum_{\Omega} \mathfrak{E}^2 \Big|_{K^2} \left(-\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^u} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^u} \right) \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{t} \right\} \Delta \Omega \Delta t = 0, \end{aligned} \quad (11.12)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{3kl} \sum_T \sum_{\Omega} \left\{ \left[-P_{[k} - t_{[k_n}^K \Big|_K - t_{[k_n}^K(\cdot) \Big|_{\psi} + D m_{[k} + m_{[k} D(\cdot) \right] \cdot \left[-\frac{1}{2} \psi_n^k \Big|_K \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^u} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{2k}} \right] + \right. \\ & \left. + \sum_T \sum_{\Omega} \mathfrak{E}^2 \Big|_{K^2} \left(-\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^u} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{2k}} \right) \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{t} \right\} \Delta \Omega \Delta t = 0, \end{aligned} \quad (11.13)$$

$$\varepsilon^{4kl} \sum_T \sum_{\Omega} \left\{ \left[-P_{[k} - t_{[k_n}^K \Big|_K - t_{[k_n}^K(\cdot) \Big|_{\psi} + D m_{[k} + m_{[k} D(\cdot) \right] \cdot \left[-\frac{1}{8} \psi_n^k \Big|_{K^2} \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{2k}} \right)^2 \right] + \right.$$

$$+ \sum_T \sum_{\Omega} \mathfrak{E}^2 |_{K^1} \left(-\frac{1}{4} \Xi_n^K |_{\epsilon^{2\mu}} \Xi_n^K |_{\epsilon^{2\mu}} \right) \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{\Gamma} \} \Delta \Omega \Delta I = 0, \quad (11.14)$$

$$\begin{aligned} \epsilon \epsilon^k \sum_T \sum_{\Omega} \left\{ \left[-P_k - t_{k_n}^K |_K - t_{k_n}^K (\cdot) |_{\Psi} \right]_K + D m_k + m_k D (\cdot) \right\} \cdot \\ \cdot \left[-\frac{1}{2} \Psi_n^k |_K \left(\Xi_n^K |_{\epsilon^t} + \Xi_n^K |_{\epsilon^t} \right) - \Psi_n^k |_K D^o \Xi_n^K - \frac{1}{2} \left(\Psi_n^k |_{KD} + \Psi_n^k |_{KD} \right) \Xi_n^K |_{\epsilon^t} \right] + \\ + \mathfrak{E} |_K \left(\Xi_n^K |_{\epsilon^t} + \Xi_n^K |_{\epsilon^t} \right) + \left[D \mathfrak{E} |_K + \mathfrak{E} |_K D (\cdot) \right] \Xi_n^K |_{\epsilon^t} + \\ + \sum_T \sum_{\Omega} \left[2 \left[D \mathfrak{E}^2 |_K + \mathfrak{E}^2 |_K D (\cdot) + D^2 \mathfrak{E}^2 |_K + 2 D \mathfrak{E}^2 |_K D (\cdot) + \mathfrak{E}^2 |_K D^2 (\cdot) \right] \Xi_n^K |_{\epsilon^t} + \right. \\ \left. + \mathfrak{E}^2 |_{K^2} \left(-2 \Xi_n^K |_{\epsilon^t} \Xi_n^K |_{\epsilon^t} \right) \right] \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{\Gamma} \} \Delta \Omega \Delta I = 0, \quad (11.15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon \epsilon^{2k} \sum_T \sum_{\Omega} \left\{ \left[-P_k - t_{k_n}^K |_K - t_{k_n}^K (\cdot) |_{\Psi} \right]_K + D m_k + m_k D (\cdot) \right\} \cdot \left[-\frac{1}{2} \Psi_n^k |_{K^2} \Xi_n^K |_{\epsilon^t} \left(\Xi_n^K |_{\epsilon^t} - \Xi_n^K |_{\epsilon^t} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \Psi_n^k |_{K^2} D^o \Xi_n^K \Xi_n^K |_{\epsilon^{2\mu}} - \frac{1}{2} \left(\Psi_n^k |_{KD} + \Psi_n^k |_{KD} \right) \Xi_n^K |_{\epsilon^{2\mu}} \right] + \left[D \mathfrak{E} |_K + \mathfrak{E} |_K D (\cdot) \right] \Xi_n^K |_{\epsilon^{2\mu}} + \\ + \sum_T \sum_{\Omega} \left[2 \left[D \mathfrak{E}^2 |_K + \mathfrak{E}^2 |_K D (\cdot) + D^2 \mathfrak{E}^2 |_K + 2 D \mathfrak{E}^2 |_K D (\cdot) + \mathfrak{E}^2 |_K D^2 (\cdot) \right] \Xi_n^K |_{\epsilon^{2\mu}} + \right. \\ \left. + \mathfrak{E}^2 |_{K^2} \left[-\Xi_n^K |_{\epsilon^t} \left(\Xi_n^K |_{\epsilon^t} + \Xi_n^K |_{\epsilon^t} \right) - D^o \Xi_n^K \Xi_n^K |_{\epsilon^{2\mu}} \right] + \right. \\ \left. + 2 \left[D \mathfrak{E}^2 |_{K^2} + \mathfrak{E}^2 |_{K^2} D (\cdot) \right] \left(-\Xi_n^K |_{\epsilon^t} \Xi_n^K |_{\epsilon^t} \right) \right] \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{\Gamma} \} \Delta \Omega \Delta I = 0, \quad (11.16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon \epsilon^{3k} \sum_T \sum_{\Omega} \left\{ \left[-P_k - t_{k_n}^K |_K - t_{k_n}^K (\cdot) |_{\Psi} \right]_K + D m_k + m_k D (\cdot) \right\} \cdot \left[-\frac{1}{2} \Psi_n^k |_K \Xi_n^K |_{\epsilon^t} \Xi_n^K |_{\epsilon^{2\mu}} \right] + \\ + \sum_T \sum_{\Omega} \left(-\mathfrak{E}^2 |_{K^2} \frac{1}{2} \Xi_n^K |_{\epsilon^{2\mu}} \left(\Xi_n^K |_{\epsilon^t} + \Xi_n^K |_{\epsilon^t} \right) + \right. \\ \left. + 2 \left(D \mathfrak{E}^2 |_{K^2} + \mathfrak{E}^2 |_{K^2} D (\cdot) - \Xi_n^K |_{\epsilon^t} \Xi_n^K |_{\epsilon^{2\mu}} \right) \right) \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{\Gamma} \} \Delta \Omega \Delta I = 0, \quad (11.17) \end{aligned}$$

$$\epsilon \epsilon^{4k} \sum_T \sum_{\Omega} \sum_T \sum_{\Omega} \left\{ 2 \left(D \mathfrak{E}^2 |_{K^1} + \mathfrak{E}^2 |_{K^1} D (\cdot) \right) \left(-\frac{1}{4} \Xi_n^K |_{\epsilon^{2\mu}} \Xi_n^K |_{\epsilon^{2\mu}} \right) \right\} \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{\Gamma} \Delta \Omega \Delta I = 0, \quad (11.18)$$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^2 \varepsilon^k \sum_{\overline{\Gamma}} \sum_{\Omega} \left\{ \left[-P_k - t_{k_n}^K \Big|_K - t_{k_n}^K(\cdot) \Big|_{\psi} \Big|_K + D m_k + m_k D(\cdot) \Big|_{\psi} \right] \cdot \left[-\frac{1}{2} \Psi_n^k \Big|_{K^2} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^t}^{\circ} (D^{\circ})^2 \Xi_n^K - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \Psi_n^k \Big|_{K^1} D^{\circ} \Xi_n^K \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^t}^{\circ} \Big|_{\varepsilon^t} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^t}^{\circ} \Big|_{\varepsilon} \right) - \frac{1}{4} \left(\Psi_n^k \Big|_{KD} + \Psi_n^k \Big|_{DK} \right) \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^t}^{\circ} \Big|_{\varepsilon^t} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^t}^{\circ} \Big|_{\varepsilon} \right) \right] + \\
& \quad + \left[D \mathfrak{E} \Big|_K + \mathfrak{E} \Big|_K D(\cdot) \Big|_{\Xi} \right] \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^t}^{\circ} \Big|_{\varepsilon^t} - \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^t}^{\circ} \Big|_{\varepsilon} \right) + \\
& \quad + \sum_{\overline{\Gamma}} \sum_{\Omega} \left(2 \left[D \mathfrak{E}^2 \Big|_K + \mathfrak{E}^2 \Big|_K D(\cdot) \Big|_{\Xi} + D^2 \mathfrak{E}^2 \Big|_K + 2 D \mathfrak{E}^2 \Big|_K D(\cdot) \Big|_{\Xi} + \mathfrak{E}^2 \Big|_K D^2(\cdot) \Big|_{\Xi} \right] \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^t}^{\circ} \Big|_{\varepsilon^t} - \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^t}^{\circ} \Big|_{\varepsilon} \right) + \\
& \quad + \mathfrak{E}^2 \Big|_{K^1} \left[-\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^t}^{\circ} (D^{\circ})^2 \Xi_n^K - D^{\circ} \Xi_n^K \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^t}^{\circ} \Big|_{\varepsilon^t} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^t}^{\circ} \Big|_{\varepsilon} \right) \right] + \\
& \quad + \left[D \mathfrak{E}^2 \Big|_{K^2} + \mathfrak{E}^2 \Big|_{K^2} D(\cdot) \Big|_{\Xi} \right] \left(-2 \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^t}^{\circ} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu}}^{\circ} \right) \Big\} \Delta \overline{\Omega} \Delta \overline{\Gamma} \Big\} \Delta \Omega \Delta t = 0,
\end{aligned} \tag{11.19}$$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^2 \varepsilon^{2k} \sum_{\overline{\Gamma}} \sum_{\Omega} \left\{ \left[-P_k - t_{k_n}^K \Big|_K - t_{k_n}^K(\cdot) \Big|_{\psi} \Big|_K + D m_k + m_k D(\cdot) \Big|_{\psi} \right] \cdot \left[-\frac{1}{2} \Psi_n^k \Big|_{K^2} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{2t}}^{\circ} (D^{\circ})^2 \Xi_n^K - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{8} \Psi_n^k \Big|_{K^2} \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^t}^{\circ} \Big|_{\varepsilon^t} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^t}^{\circ} \Big|_{\varepsilon} \right)^2 \right] + \\
& \quad + \sum_{\overline{\Gamma}} \sum_{\Omega} \left(2 \left[D \mathfrak{E}^2 \Big|_{K^2} + \mathfrak{E}^2 \Big|_{K^2} D(\cdot) \Big|_{\Xi} \right] \cdot \left[-\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^t}^{\circ} \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^t}^{\circ} \Big|_{\varepsilon^t} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^t}^{\circ} \Big|_{\varepsilon} \right) - D^{\circ} \Xi_n^K \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^t}^{\circ} \right] + \\
& \quad + \mathfrak{E}^2 \Big|_{K^1} \left[-\frac{1}{2} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{2t}}^{\circ} (D^{\circ})^2 \Xi_n^K - \frac{1}{4} \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^t}^{\circ} \Big|_{\varepsilon^t} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^t}^{\circ} \Big|_{\varepsilon} \right) \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^t}^{\circ} \Big|_{\varepsilon^t} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^t}^{\circ} \Big|_{\varepsilon} \right) \right] + \\
& \quad + \left[D^2 \mathfrak{E}^2 \Big|_{K^2} + 2 D \mathfrak{E}^2 \Big|_{K^2} D(\cdot) \Big|_{\Xi} + \mathfrak{E}^2 \Big|_{K^2} D^2(\cdot) \Big|_{\Xi} + D \mathfrak{E}^2 \Big|_{K^2} D(\cdot) \Big|_{\Xi} + \mathfrak{E}^2 \Big|_{K^2} D(\cdot) D(\cdot) \Big|_{\Xi} \right] \cdot \\
& \quad \cdot \left(-\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^t}^{\circ} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^t}^{\circ} \right) \Big\} \Delta \overline{\Omega} \Delta \overline{\Gamma} \Big\} \Delta \Omega \Delta t = 0,
\end{aligned} \tag{11.20}$$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^2 \varepsilon^{3k} \sum_{\overline{\Gamma}} \sum_{\Omega} \sum_{\overline{\Gamma}} \sum_{\Omega} \left\{ 2 \left(D \mathfrak{E}^2 \Big|_{K^2} + \mathfrak{E}^2 \Big|_{K^2} D(\cdot) \Big|_{\Xi} \right) \left[-\frac{1}{2} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{2t}}^{\circ} \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^t}^{\circ} \Big|_{\varepsilon^t} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^t}^{\circ} \Big|_{\varepsilon} \right) \right] + \\
& \quad + \left(D^2 \mathfrak{E}^2 \Big|_{K^2} + 2 D \mathfrak{E}^2 \Big|_{K^2} D(\cdot) \Big|_{\Xi} + \mathfrak{E}^2 \Big|_{K^2} D^2(\cdot) \Big|_{\Xi} + D \mathfrak{E}^2 \Big|_{K^2} D(\cdot) \Big|_{\Xi} + \mathfrak{E}^2 \Big|_{K^2} D(\cdot) D(\cdot) \Big|_{\Xi} \right) \cdot \\
& \quad \cdot \left(-\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^t}^{\circ} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{2t}}^{\circ} \right) \Big\} \Delta \overline{\Omega} \Delta \overline{\Gamma} \Delta \Omega \Delta t = 0,
\end{aligned} \tag{11.21}$$

$$\varepsilon^2 \varepsilon^{4k} \sum_{\bar{r}} \sum_{\bar{\Omega}} \sum_{\bar{r}} \sum_{\bar{\Omega}} \left\{ \left(D^2 \mathfrak{E}^2|_{\kappa^2} + 2D\mathfrak{E}^2|_{\kappa^2} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2|_{\kappa^2} D^2(\cdot) + D\mathfrak{E}^2|_{\kappa^2} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2|_{\kappa^2} D(\cdot) D(\cdot) \right) \cdot \left(-\frac{1}{4} \bar{\Xi}_n^K|_{\varepsilon^{2k}} \bar{\Xi}_n^K|_{\varepsilon^{2k}} \right) \right\} \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{r} \Delta \Omega \Delta t = 0, \quad (11.22)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon^3 \varepsilon^t \sum_{\bar{r}} \sum_{\bar{\Omega}} \left\{ \left[-P_t - t_{\kappa^2}^K|_{\kappa^2} - t_{\kappa^2}^K(\cdot)|_{\kappa^2} + Dm_t + m_t D(\cdot) \right] \left[-\frac{1}{4} \psi_n^t|_{\kappa^2} (D^\circ)^2 \bar{\Xi}_n^K \left(\bar{\Xi}_n^K|_{\varepsilon^t} + \bar{\Xi}_n^K|_{\varepsilon^t} \right) \right] + \right. \\ & + \sum_{\bar{r}} \sum_{\bar{\Omega}} \left(\mathfrak{E}^2|_{\kappa^2} \left[-\frac{1}{2} (D^\circ)^2 \bar{\Xi}_n^K \left(\bar{\Xi}_n^K|_{\varepsilon^t} + \bar{\Xi}_n^K|_{\varepsilon^t} \right) \right] + \right. \\ & + \left. \left[D\mathfrak{E}^2|_{\kappa^2} + \mathfrak{E}^2|_{\kappa^2} D(\cdot) \right] \left(-\bar{\Xi}_n^K|_{\varepsilon^t} (D^\circ) \bar{\Xi}_n^K - D^\circ \bar{\Xi}_n^K \left(\bar{\Xi}_n^K|_{\varepsilon^t} + \bar{\Xi}_n^K|_{\varepsilon^t} \right) \right) \right\} + \quad (11.23) \\ & + \left[D^2 \mathfrak{E}^2|_{\kappa^2} + 2D\mathfrak{E}^2|_{\kappa^2} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2|_{\kappa^2} D^2(\cdot) + D\mathfrak{E}^2|_{\kappa^2} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2|_{\kappa^2} D(\cdot) D(\cdot) \right] \cdot \\ & \cdot \left(-2 \bar{\Xi}_n^K|_{\varepsilon^t} \bar{\Xi}_n^K|_{\varepsilon^{2k}} \right) \left. \right\} \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{r} \Delta \Omega \Delta t = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon^3 \varepsilon^{2k} \sum_{\bar{r}} \sum_{\bar{\Omega}} \sum_{\bar{r}} \sum_{\bar{\Omega}} \left\{ 2 \left[D\mathfrak{E}^2|_{\kappa^2} + \mathfrak{E}^2|_{\kappa^2} D(\cdot) \right] \cdot \left[-\frac{1}{2} \bar{\Xi}_n^K|_{\varepsilon^{2k}} (D^\circ) \bar{\Xi}_n^K - \right. \\ & - \left. \frac{1}{4} \left(\bar{\Xi}_n^K|_{\varepsilon^t} + \bar{\Xi}_n^K|_{\varepsilon^t} \right) \left(\bar{\Xi}_n^K|_{\varepsilon^t} + \bar{\Xi}_n^K|_{\varepsilon^t} \right) \right] + \quad (11.24) \\ & + \left[D^2 \mathfrak{E}^2|_{\kappa^2} + 2D\mathfrak{E}^2|_{\kappa^2} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2|_{\kappa^2} D^2(\cdot) + D\mathfrak{E}^2|_{\kappa^2} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2|_{\kappa^2} D(\cdot) D(\cdot) \right] \cdot \\ & \cdot \left. \left[-\bar{\Xi}_n^K|_{\varepsilon^t} \left(\bar{\Xi}_n^K|_{\varepsilon^t} + \bar{\Xi}_n^K|_{\varepsilon^t} \right) - D^\circ \bar{\Xi}_n^K \bar{\Xi}_n^K|_{\varepsilon^{2k}} \right] \right\} \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{r} \Delta \Omega \Delta t = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon^3 \varepsilon^{3k} \sum_{\bar{r}} \sum_{\bar{\Omega}} \sum_{\bar{r}} \sum_{\bar{\Omega}} \left\{ \left[D^2 \mathfrak{E}^2|_{\kappa^2} + 2D\mathfrak{E}^2|_{\kappa^2} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2|_{\kappa^2} D^2(\cdot) + D\mathfrak{E}^2|_{\kappa^2} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2|_{\kappa^2} D(\cdot) D(\cdot) \right] \cdot \right. \\ & \cdot \left. \left(-\frac{1}{2} \bar{\Xi}_n^K|_{\varepsilon^{2k}} \left(\bar{\Xi}_n^K|_{\varepsilon^t} + \bar{\Xi}_n^K|_{\varepsilon^t} \right) \right) \right\} \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{r} \Delta \Omega \Delta t = 0, \quad (11.25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon^4 \varepsilon^t \sum_{\bar{r}} \sum_{\bar{\Omega}} \sum_{\bar{r}} \sum_{\bar{\Omega}} \left\{ 2 \left[D\mathfrak{E}^2|_{\kappa^2} + \mathfrak{E}^2|_{\kappa^2} D(\cdot) \right] \cdot \left[-\frac{1}{2} (D^\circ)^2 \bar{\Xi}_n^K \left(\bar{\Xi}_n^K|_{\varepsilon^t} + \bar{\Xi}_n^K|_{\varepsilon^t} \right) \right] + \right. \\ & + \left[D^2 \mathfrak{E}^2|_{\kappa^2} + 2D\mathfrak{E}^2|_{\kappa^2} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2|_{\kappa^2} D^2(\cdot) + D\mathfrak{E}^2|_{\kappa^2} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2|_{\kappa^2} D(\cdot) D(\cdot) \right] \cdot \quad (11.26) \\ & \cdot \left. \left[-\bar{\Xi}_n^K|_{\varepsilon^t} (D^\circ)^2 \bar{\Xi}_n^K - D^\circ \bar{\Xi}_n^K \left(\bar{\Xi}_n^K|_{\varepsilon^t} + \bar{\Xi}_n^K|_{\varepsilon^t} \right) \right] \right\} \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{r} \Delta \Omega \Delta t = 0, \end{aligned}$$

$$\varepsilon^4 \varepsilon^{2k} \sum_{\bar{r}} \sum_{\bar{\Omega}} \sum_{\bar{r}} \sum_{\bar{\Omega}} \left\{ \left[D^2 \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} + 2D \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} D^2(\cdot) + D \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} D(\cdot) D(\cdot) \right] \cdot \right. \\ \left. \left[-\frac{1}{2} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{2\mu}} (D^\circ)^2 \Xi_n^K - \frac{1}{4} \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu^2}} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu^2}} \right) \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu^2}} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu^2}} \right) \right] \right\} \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{r} \Delta \Omega \Delta t = 0, \quad (11.27)$$

$$\varepsilon^3 \varepsilon^k \sum_{\bar{r}} \sum_{\bar{\Omega}} \sum_{\bar{r}} \sum_{\bar{\Omega}} \left\{ \left[D^2 \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} + 2D \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} D^2(\cdot) + D \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} D(\cdot) D(\cdot) \right] \cdot \right. \\ \left. \left[-\frac{1}{2} (D^\circ)^2 \Xi_n^K \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu^2}} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu^2}} \right) \right] \right\} \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{r} \Delta \Omega \Delta t = 0, \quad (11.28)$$

$$\varepsilon \varepsilon^{kl} \sum_{\bar{r}} \sum_{\bar{\Omega}} \left\{ \left[-P_k - t_{k_n}^K \Big|_{\kappa} - t_{k_n}^K(\cdot) \Big|_{\psi} + D m_k + m_k D(\cdot) \right] \cdot \right. \\ \left. \left[-\frac{1}{2} \Psi_n^k \Big|_{\kappa} \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu^2}} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu^2}} - \Psi_n^k \Big|_{\kappa^2} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu^2}} D^\circ \Xi_n^K - \frac{1}{2} \left(\Psi_n^k \Big|_{\kappa D} + \Psi_n^k \Big|_{D \kappa} \right) \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu^2}} \right] \right\} + \\ + \mathfrak{E} \Big|_{\kappa} \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu^2}} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu^2}} \right) + \left[D \mathfrak{E} \Big|_{\kappa} + \mathfrak{E} \Big|_{\kappa} D(\cdot) \right] \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu^2}} + \\ + \sum_{\bar{r}} \sum_{\bar{\Omega}} \left(2 \left[D \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa} + \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa} D(\cdot) + D^2 \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa} + 2D \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa} D^2(\cdot) \right] \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu^2}} + \\ + \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} \left(-\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu^2}} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu^2}} \right) \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{r} \Big\} \Delta \Omega \Delta t = 0, \quad (11.29)$$

$$\varepsilon \varepsilon^{2kl} \sum_{\bar{r}} \sum_{\bar{\Omega}} \left\{ \left[-P_k - t_{k_n}^K \Big|_{\kappa} - t_{k_n}^K(\cdot) \Big|_{\psi} + D m_k + m_k D(\cdot) \right] \cdot \left[-\frac{1}{4} \left(\Psi_n^k \Big|_{\kappa D} + \Psi_n^k \Big|_{D \kappa} \right) \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{2\mu}} - \right. \right. \\ \left. \left. -\frac{1}{2} \Psi_n^k \Big|_{\kappa^2} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu^2}} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu^2}} - \frac{1}{2} \Psi_n^k \Big|_{\kappa^2} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu^2}} \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu^2}} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu^2}} \right) - \frac{1}{2} \Psi_n^k \Big|_{\kappa^2} D^\circ \Xi_n^K \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu^2}} \right] + \\ + \left[D \mathfrak{E} \Big|_{\kappa} + \mathfrak{E} \Big|_{\kappa} D(\cdot) \right] \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{2\mu}} + \\ + \sum_{\bar{r}} \sum_{\bar{\Omega}} \left(2 \left[D \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa} + \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa} D(\cdot) + D^2 \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa} + 2D \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa} D^2(\cdot) \right] \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{2\mu}} + \\ + \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} \left[-\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu^2}} \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu^2}} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu^2}} - D^\circ \Xi_n^K \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{2\mu}} \right) \right] + \\ + 2 \left[D \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} + \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} D(\cdot) \right] \left(-\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu^2}} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu^2}} \right) \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{r} \Big\} \Delta \Omega \Delta t = 0, \quad (11.30)$$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \varepsilon^{3\mu} \sum_T \sum_{\Omega} \left\{ \left[-P_k - t_{k_n}^K \Big|_K - t_{k_n}^K(\cdot) \Big|_{\psi} + D m_k + m_k D(\cdot) \right] \left[-\frac{1}{2} \Psi_n^k \Big|_{K^2} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{2\mu}} \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu}} \Big|_{\varepsilon} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon} \Big|_{\varepsilon^{\mu}} \right) \right] + \right. \\
& \quad \left. + \sum_T \sum_{\Omega} \left(\mathfrak{E}^2 \Big|_{K^2} \left[-\frac{1}{2} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu}} \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu}} \Big|_{\varepsilon} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon} \Big|_{\varepsilon^{\mu}} \right) \right] + \right. \\
& \quad \left. + 2 \left[D \mathfrak{E}^2 \Big|_{K^2} + \mathfrak{E}^2 \Big|_{K^2} D(\cdot) \right] \left[-\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu}} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{2\mu}} \right] \right) \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{\Gamma} \Big\} \Delta \Omega \Delta t = 0,
\end{aligned} \tag{11.31}$$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \varepsilon^{4\mu} \sum_T \sum_{\Omega} \sum_T \sum_{\Omega} \left\{ 2 \left[D \mathfrak{E}^2 \Big|_{K^2} + \mathfrak{E}^2 \Big|_{K^2} D(\cdot) \right] \cdot \left[-\frac{1}{4} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{2\mu}} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{2\mu}} \right] \right\} \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{\Gamma} \Delta \Omega \Delta t = 0,
\end{aligned} \tag{11.32}$$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^2 \varepsilon^{\mu} \sum_T \sum_{\Omega} \left\{ \left[-P_k - t_{k_n}^K \Big|_K - t_{k_n}^K(\cdot) \Big|_{\psi} + D m_k + m_k D(\cdot) \right] \cdot \left[-\frac{1}{4} \left(\Psi_n^k \Big|_{K_D} + \Psi_n^k \Big|_{D_K} \right) \cdot \right. \\
& \quad \cdot \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu}} \Big|_{\varepsilon} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon} \Big|_{\varepsilon^{\mu}} \right) - \frac{1}{2} \Psi_n^k \Big|_{K^2} D^{\circ} \Xi_n^K \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu}} \Big|_{\varepsilon} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon} \Big|_{\varepsilon^{\mu}} \right) - \frac{1}{2} \Psi_n^k \Big|_{K^2} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu}} (D^{\circ})^2 \Xi_n^K \right] + \\
& \quad + \left[D \mathfrak{E} \Big|_K + \mathfrak{E} \Big|_K D(\cdot) \right] \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu}} \Big|_{\varepsilon} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon} \Big|_{\varepsilon^{\mu}} \right) + \\
& \quad + \sum_T \sum_{\Omega} \left(2 \left[D \mathfrak{E}^2 \Big|_K + \mathfrak{E}^2 \Big|_K D(\cdot) + D^2 \mathfrak{E}^2 \Big|_K + 2 D \mathfrak{E}^2 \Big|_K D(\cdot) + \mathfrak{E}^2 \Big|_K D^2(\cdot) \right] \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu}} \Big|_{\varepsilon} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon} \Big|_{\varepsilon^{\mu}} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \mathfrak{E}^2 \Big|_{K^2} \left[-D \Xi_n^K \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu}} \Big|_{\varepsilon} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon} \Big|_{\varepsilon^{\mu}} \right) - \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu}} (D^{\circ})^2 \Xi_n^K \right] + \right. \\
& \quad \left. + 2 \left[D \mathfrak{E}^2 \Big|_{K^2} + \mathfrak{E}^2 \Big|_{K^2} D(\cdot) \right] \left(-\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu}} D^{\circ} \Xi_n^K \right) \right) \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{\Gamma} \Big\} \Delta \Omega \Delta t = 0,
\end{aligned} \tag{11.33}$$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^2 \varepsilon^{2\mu} \sum_T \sum_{\Omega} \left\{ \left[-P_k - t_{k_n}^K \Big|_K - t_{k_n}^K(\cdot) \Big|_{\psi} + D m_k + m_k D(\cdot) \right] \cdot \right. \\
& \quad \cdot \left[-\frac{1}{8} \Psi_n^k \Big|_{K^2} \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu}} \Big|_{\varepsilon} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon} \Big|_{\varepsilon^{\mu}} \right)^2 - \frac{1}{4} \Psi_n^k \Big|_{K^2} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{2\mu}} (D^{\circ})^2 \Xi_n^K \right] + \\
& \quad + \sum_T \sum_{\Omega} \left(\mathfrak{E}^2 \Big|_{K^2} \left[-\frac{1}{4} \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu}} \Big|_{\varepsilon} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon} \Big|_{\varepsilon^{\mu}} \right) \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu}} \Big|_{\varepsilon} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon} \Big|_{\varepsilon^{\mu}} \right) - \frac{1}{2} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{2\mu}} (D^{\circ})^2 \Xi_n^K \right] + \right. \\
& \quad \left. + 2 \left[D \mathfrak{E}^2 \Big|_{K^2} + \mathfrak{E}^2 \Big|_{K^2} D(\cdot) \right] \left[-\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu}} \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{\mu}} \Big|_{\varepsilon} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon} \Big|_{\varepsilon^{\mu}} \right) - D^{\circ} \Xi_n^K \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{2\mu}} \right] + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[D^2 \mathfrak{E}^2|_{K^1} + 2D \mathfrak{E}^2|_{K^1} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2|_{K^1} D^2(\cdot) + D \mathfrak{E}^2|_{K^1} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2|_{K^1} D(\cdot) D(\cdot) \right] \cdot \\
& \cdot \left[-\Xi_n^K|_{\epsilon^u} \Xi_n^K|_{\epsilon^u} \right] \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{\Gamma} \Delta \Omega \Delta \Gamma = 0,
\end{aligned} \tag{11.34}$$

$$\begin{aligned}
& \epsilon^2 \epsilon^{3\mu} \sum_{\bar{\Gamma}} \sum_{\bar{\Omega}} \sum_{\bar{\Gamma}} \sum_{\bar{\Omega}} \left\{ 2 \left[D \mathfrak{E}^2|_{K^2} + \mathfrak{E}^2|_{K^2} D(\cdot) \right] \left[-\frac{1}{2} \Xi_n^K|_{\epsilon^{2\mu}} \left[\Xi_n^K|_{\epsilon^\mu}|_{\epsilon} + \Xi_n^K|_{\epsilon}|_{\epsilon^\mu} \right] \right] + \right. \\
& + \left[D^2 \mathfrak{E}^2|_{K^1} + 2D \mathfrak{E}^2|_{K^1} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2|_{K^1} D^2(\cdot) + D \mathfrak{E}^2|_{K^1} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2|_{K^1} D(\cdot) D(\cdot) \right] \cdot \\
& \cdot \left. \left[-\Xi_n^K|_{\epsilon^u} \Xi_n^K|_{\epsilon^{2u}} \right] \right\} \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{\Gamma} \Delta \Omega \Delta \Gamma = 0,
\end{aligned} \tag{11.35}$$

$$\begin{aligned}
& \epsilon^2 \epsilon^{4\mu} \sum_{\bar{\Gamma}} \sum_{\bar{\Omega}} \sum_{\bar{\Gamma}} \sum_{\bar{\Omega}} \left\{ \left[D^2 \mathfrak{E}^2|_{K^1} + 2D \mathfrak{E}^2|_{K^1} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2|_{K^1} D^2(\cdot) + D \mathfrak{E}^2|_{K^1} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2|_{K^1} D(\cdot) D(\cdot) \right] \cdot \right. \\
& \cdot \left. \left[-\frac{1}{4} \Xi_n^K|_{\epsilon^{2\mu}} \Xi_n^K|_{\epsilon^{2\mu}} \right] \right\} \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{\Gamma} \Delta \Omega \Delta \Gamma = 0,
\end{aligned} \tag{11.36}$$

$$\begin{aligned}
& \epsilon^3 \epsilon^{\mu} \sum_{\bar{\Gamma}} \sum_{\bar{\Omega}} \left\{ \left[-P_k - t_{k_n}^K|_k - t_{k_n}^K(\cdot)|_k + D m_k + m_k D(\cdot) \right] \left[-\frac{1}{4} \psi_n^K|_{K^1} (D^\circ) \Xi_n^K \left(\Xi_n^K|_{\epsilon^\mu}|_{\epsilon} + \Xi_n^K|_{\epsilon}|_{\epsilon^\mu} \right) \right] \right\} + \\
& + \sum_{\bar{\Gamma}} \sum_{\bar{\Omega}} \left\{ \mathfrak{E}^2|_{K^1} \left[-\frac{1}{2} (D^\circ)^2 \Xi_n^K \left(\Xi_n^K|_{\epsilon^\mu}|_{\epsilon} + \Xi_n^K|_{\epsilon}|_{\epsilon^\mu} \right) \right] + 2 \left[D \mathfrak{E}^2|_{K^1} + \mathfrak{E}^2|_{K^1} D(\cdot) \right] \cdot \right. \\
& \cdot \left. \left[-D^\circ \Xi_n^K \left(\Xi_n^K|_{\epsilon^\mu}|_{\epsilon} + \Xi_n^K|_{\epsilon}|_{\epsilon^\mu} \right) - \Xi_n^K|_{\epsilon^\mu} (D^\circ)^2 \Xi_n^K \right] + \left[D^2 \mathfrak{E}^2|_{K^1} + 2D \mathfrak{E}^2|_{K^1} D(\cdot) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \mathfrak{E}^2|_{K^1} D^2(\cdot) + D \mathfrak{E}^2|_{K^1} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2|_{K^1} D(\cdot) D(\cdot) \right] \left[-\Xi_n^K|_{\epsilon^\mu} D^\circ \Xi_n^K \right] \right\} \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{\Gamma} \Delta \Omega \Delta \Gamma = 0,
\end{aligned} \tag{11.37}$$

$$\begin{aligned}
& \epsilon^3 \epsilon^{2\mu} \sum_{\bar{\Gamma}} \sum_{\bar{\Omega}} \sum_{\bar{\Gamma}} \sum_{\bar{\Omega}} \left\{ 2 \left[D \mathfrak{E}^2|_{K^1} + \mathfrak{E}^2|_{K^1} D(\cdot) \right] \left[-\frac{1}{4} \left(\Xi_n^K|_{\epsilon^\mu}|_{\epsilon} + \Xi_n^K|_{\epsilon}|_{\epsilon^\mu} \right) \left(\Xi_n^K|_{\epsilon^\mu}|_{\epsilon} + \Xi_n^K|_{\epsilon}|_{\epsilon^\mu} \right) \right] - \right. \\
& - \frac{1}{2} \Xi_n^K|_{\epsilon^{2\mu}} (D^\circ)^2 \Xi_n^K + \left[D^2 \mathfrak{E}^2|_{K^1} + 2D \mathfrak{E}^2|_{K^1} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2|_{K^1} D^2(\cdot) + D \mathfrak{E}^2|_{K^1} D(\cdot) + \right. \\
& \left. + \mathfrak{E}^2|_{K^1} D(\cdot) D(\cdot) \right] \cdot \left. \left[-\Xi_n^K|_{\epsilon^\mu} \left(\Xi_n^K|_{\epsilon^\mu}|_{\epsilon} + \Xi_n^K|_{\epsilon}|_{\epsilon^\mu} \right) - D^\circ \Xi_n^K \Xi_n^K|_{\epsilon^{2\mu}} \right] \right\} \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{\Gamma} \Delta \Omega \Delta \Gamma = 0,
\end{aligned} \tag{11.38}$$

$$\epsilon^3 \epsilon^{3\mu} \sum_{\bar{\Gamma}} \sum_{\bar{\Omega}} \sum_{\bar{\Gamma}} \sum_{\bar{\Omega}} \left\{ \left[D^2 \mathfrak{E}^2|_{K^1} + 2D \mathfrak{E}^2|_{K^1} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2|_{K^1} D^2(\cdot) + D \mathfrak{E}^2|_{K^1} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2|_{K^1} D(\cdot) D(\cdot) \right] \cdot \right.$$

$$\cdot \left[-\frac{1}{2} \Xi_n^K |_{\varepsilon^{2\mu}} \left(\Xi_n^K |_{\varepsilon^\mu} \Big|_{\varepsilon} + \Xi_n^K |_{\varepsilon} \Big|_{\varepsilon^\mu} \right) \right] \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{I} \Delta \Omega \Delta t = 0, \quad (11.39)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 \varepsilon^{\mu} \sum_{\bar{\Gamma}} \sum_{\bar{\Omega}} \sum_{\bar{\Gamma}} \sum_{\bar{\Omega}} & \left\{ \left[D^2 \mathfrak{E}^2 |_{K^1} + \mathfrak{E}^2 |_{K^1} D(\cdot) \Big|_{\Xi} \right] \cdot \left[-\frac{1}{2} (D^\circ)^2 \Xi_n^K \left(\Xi_n^K |_{\varepsilon^\mu} \Big|_{\varepsilon} + \Xi_n^K |_{\varepsilon^\mu} \Big|_{\varepsilon} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \left[D^2 \mathfrak{E}^2 |_{K^1} + 2D \mathfrak{E}^2 |_{K^1} D(\cdot) \Big|_{\Xi} + \mathfrak{E}^2 |_{K^1} D^2(\cdot) \Big|_{\Xi} + D \mathfrak{E}^2 |_{K^1} D(\cdot) \Big|_{\Xi} + \mathfrak{E}^2 |_{K^1} D(\cdot) D(\cdot) \Big|_{\Xi} \right] \cdot \right. \\ & \left. \cdot \left[-D^\circ \Xi_n^K \left(\Xi_n^K |_{\varepsilon^\mu} \Big|_{\varepsilon} + \Xi_n^K |_{\varepsilon} \Big|_{\varepsilon^\mu} \right) - \Xi_n^K |_{\varepsilon^\mu} (D^\circ)^2 \Xi_n^K \right] \right\} \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{I} \Delta \Omega \Delta t = 0, \quad (11.40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 \varepsilon^{2\mu} \sum_{\bar{\Gamma}} \sum_{\bar{\Omega}} \sum_{\bar{\Gamma}} \sum_{\bar{\Omega}} & \left\{ \left[D^2 \mathfrak{E}^2 |_{K^1} + 2D \mathfrak{E}^2 |_{K^1} D(\cdot) \Big|_{\Xi} + \mathfrak{E}^2 |_{K^1} D^2(\cdot) \Big|_{\Xi} + D \mathfrak{E}^2 |_{K^1} D(\cdot) \Big|_{\Xi} + \mathfrak{E}^2 |_{K^1} D(\cdot) D(\cdot) \Big|_{\Xi} \right] \cdot \right. \\ & \left. \cdot \left[-\frac{1}{4} \left(\Xi_n^K |_{\varepsilon^\mu} \Big|_{\varepsilon} + \Xi_n^K |_{\varepsilon} \Big|_{\varepsilon^\mu} \right) \left(\Xi_n^K |_{\varepsilon^\mu} \Big|_{\varepsilon} + \Xi_n^K |_{\varepsilon} \Big|_{\varepsilon^\mu} \right) - \frac{1}{2} \Xi_n^K |_{\varepsilon^{2\mu}} (D^\circ)^2 \Xi_n^K \right] \right\} \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{I} \Delta \Omega \Delta t = 0, \quad (11.41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^5 \varepsilon^\mu \sum_{\bar{\Gamma}} \sum_{\bar{\Omega}} \sum_{\bar{\Gamma}} \sum_{\bar{\Omega}} & \left\{ \left[D^2 \mathfrak{E}^2 |_{K^1} + 2D \mathfrak{E}^2 |_{K^1} D(\cdot) \Big|_{\Xi} + \mathfrak{E}^2 |_{K^1} D^2(\cdot) \Big|_{\Xi} + D \mathfrak{E}^2 |_{K^1} D(\cdot) \Big|_{\Xi} + \mathfrak{E}^2 |_{K^1} D(\cdot) D(\cdot) \Big|_{\Xi} \right] \cdot \right. \\ & \left. \cdot \left[-\frac{1}{2} (D^\circ)^2 \Xi_n^K \left(\Xi_n^K |_{\varepsilon^\mu} \Big|_{\varepsilon} + \Xi_n^K |_{\varepsilon} \Big|_{\varepsilon^\mu} \right) \right] \right\} \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{I} \Delta \Omega \Delta t = 0, \quad (11.42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^k \varepsilon^\mu \sum_{\bar{\Gamma}} \sum_{\bar{\Omega}} & \left\{ \left[-P_k - t_{k_n}^K |_{K^1} - t_{k_n}^K(\cdot) \Big|_{\Psi} \right] + D m_k + m_k D(\cdot) \Big|_{\Psi} \right\} \cdot \\ & \cdot \left[-\Psi_n^k |_{K^1} \Xi_n^K |_{\varepsilon^1} \Xi_n^K |_{\varepsilon^\mu} - \frac{1}{2} \Psi_n^k |_{K^1} \left(\Xi_n^K |_{\varepsilon^\mu} \Big|_{\varepsilon^1} + \Xi_n^K |_{\varepsilon^1} \Big|_{\varepsilon^\mu} \right) \right] + \mathfrak{E} |_{K^1} \left(\Xi_n^K |_{\varepsilon^\mu} \Big|_{\varepsilon^1} + \Xi_n^K |_{\varepsilon^1} \Big|_{\varepsilon^\mu} \right) + \\ & + \sum_{\bar{\Gamma}} \sum_{\bar{\Omega}} \left(\mathfrak{E}^2 |_{K^1} \left[-2 \Xi_n^K |_{\varepsilon^1} \Xi_n^K |_{\varepsilon^\mu} \right] \right) \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{I} \Big|_{\Psi} \Delta \Omega \Delta t = 0, \quad (11.43) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^k \varepsilon^{2\mu} \sum_{\bar{\Gamma}} \sum_{\bar{\Omega}} & \left\{ \left[-P_k - t_{k_n}^K |_{K^1} - t_{k_n}^K(\cdot) \Big|_{\Psi} \right] + D m_k + m_k D(\cdot) \Big|_{\Psi} \right\} \cdot \\ & \cdot \left[-\frac{1}{2} \Psi_n^k |_{K^1} \Xi_n^K |_{\varepsilon^\mu} \left(\Xi_n^K |_{\varepsilon^\mu} \Big|_{\varepsilon^1} + \Xi_n^K |_{\varepsilon^1} \Big|_{\varepsilon^\mu} \right) - \frac{1}{2} \Psi_n^k |_{K^1} \Xi_n^K |_{\varepsilon^1} \Xi_n^K |_{\varepsilon^{2\mu}} \right] + \\ & + \sum_{\bar{\Gamma}} \sum_{\bar{\Omega}} \left(\mathfrak{E}^2 |_{K^1} \left[-\Xi_n^K |_{\varepsilon^\mu} \left(\Xi_n^K |_{\varepsilon^\mu} \Big|_{\varepsilon^1} + \Xi_n^K |_{\varepsilon^1} \Big|_{\varepsilon^\mu} \right) - \Xi_n^K |_{\varepsilon^1} \Xi_n^K |_{\varepsilon^{2\mu}} \right] \right) \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{I} \Big|_{\Psi} \Delta \Omega \Delta t = 0, \quad (11.44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^k \varepsilon^{3\mu} \sum_{\mathcal{T}} \sum_{\Omega} \left\{ \left[-P_k - t_{k_n}^K \Big|_K - t_{k_n}^K(\cdot) \Big|_{\Psi} \right]_K + D m_k + m_k D(\cdot) \right\} \cdot \\
& \cdot \left[-\frac{1}{4} \Psi_n^k \Big|_{K^2} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{2\mu}} \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^\mu} \Big|_{\varepsilon^k} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^k} \Big|_{\varepsilon^\mu} \right) \right] + \\
& + \sum_{\mathcal{T}} \sum_{\Omega} \left(\mathfrak{E}^2 \Big|_{K^2} \left[-\frac{1}{2} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{2\mu}} \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^\mu} \Big|_{\varepsilon^k} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^k} \Big|_{\varepsilon^\mu} \right) \right] \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{\Gamma} \right\} \Delta \Omega \Delta \Gamma = 0,
\end{aligned} \tag{11.45}$$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^{2k} \varepsilon^\mu \sum_{\mathcal{T}} \sum_{\Omega} \left\{ \left[-P_k - t_{k_n}^K \Big|_K - t_{k_n}^K(\cdot) \Big|_{\Psi} \right]_K + D m_k + m_k D(\cdot) \right\} \left[-\frac{1}{4} \Psi_n^k \Big|_{K^2} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{2\mu}} \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^\mu} \Big|_{\varepsilon^k} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^k} \Big|_{\varepsilon^\mu} \right) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \Psi_n^k \Big|_{K^2} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^\mu} \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^\mu} \Big|_{\varepsilon^k} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^k} \Big|_{\varepsilon^\mu} \right) - \frac{1}{2} \Psi_n^k \Big|_{K^2} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^\mu} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{2\mu}} \right] + \\
& + \sum_{\mathcal{T}} \sum_{\Omega} \left(\mathfrak{E}^2 \Big|_{K^2} \left[-\frac{1}{2} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{2\mu}} \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^\mu} \Big|_{\varepsilon^k} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^k} \Big|_{\varepsilon^\mu} \right) - \right. \\
& \left. - \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^k} \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^\mu} \Big|_{\varepsilon^k} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^k} \Big|_{\varepsilon^\mu} \right) - \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^\mu} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{2\mu}} \right] \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{\Gamma} \right\} \Delta \Omega \Delta \Gamma = 0,
\end{aligned} \tag{11.46}$$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^{2k} \varepsilon^{2\mu} \sum_{\mathcal{T}} \sum_{\Omega} \left\{ \left[-P_k - t_{k_n}^K \Big|_K - t_{k_n}^K(\cdot) \Big|_{\Psi} \right]_K + D m_k + m_k D(\cdot) \right\} \cdot \left[-\frac{1}{4} \Psi_n^k \Big|_{K^2} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{2\mu}} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{2\mu}} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{8} \Psi_n^k \Big|_{K^2} \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^\mu} \Big|_{\varepsilon^k} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^k} \Big|_{\varepsilon^\mu} \right)^2 \right] + \sum_{\mathcal{T}} \sum_{\Omega} \left(\mathfrak{E}^2 \Big|_{K^2} \left[-\frac{1}{2} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{2\mu}} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{2\mu}} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{4} \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^\mu} \Big|_{\varepsilon^k} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^k} \Big|_{\varepsilon^\mu} \right) \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^\mu} \Big|_{\varepsilon^k} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^k} \Big|_{\varepsilon^\mu} \right) \right] \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{\Gamma} \right\} \Delta \Omega \Delta \Gamma = 0,
\end{aligned} \tag{11.47}$$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \varepsilon^k \varepsilon^\mu \sum_{\mathcal{T}} \sum_{\Omega} \left\{ \left[-P_k - t_{k_n}^K \Big|_K - t_{k_n}^K(\cdot) \Big|_{\Psi} \right]_K + D m_k + m_k D(\cdot) \right\} \cdot \\
& \cdot \left[-\frac{1}{4} \left(\Psi_n^k \Big|_{KD} + \Psi_n^k \Big|_{DK} \right) \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^\mu} \Big|_{\varepsilon^k} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^k} \Big|_{\varepsilon^\mu} \right) - \frac{1}{2} \Psi_n^k \Big|_{K^2} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^\mu} \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^k} \Big|_{\varepsilon^\mu} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^\mu} \Big|_{\varepsilon^k} \right) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \Psi_n^k \Big|_{K^2} D^\circ \Xi_n^K \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^\mu} \Big|_{\varepsilon^k} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^k} \Big|_{\varepsilon^\mu} \right) - \frac{1}{2} \Psi_n^k \Big|_{K^2} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^k} \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^\mu} \Big|_{\varepsilon^k} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^k} \Big|_{\varepsilon^\mu} \right) \right] + \\
& + \left[D \mathfrak{E} \Big|_K + \mathfrak{E} \Big|_K D(\cdot) \right] \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^\mu} \Big|_{\varepsilon^k} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^k} \Big|_{\varepsilon^\mu} \right) + \\
& + \sum_{\mathcal{T}} \sum_{\Omega} \left(\left[D \mathfrak{E}^2 \Big|_K + \mathfrak{E}^2 \Big|_K D(\cdot) + D^2 \mathfrak{E}^2 \Big|_K + 2D \mathfrak{E}^2 \Big|_K D(\cdot) + \mathfrak{E}^2 \Big|_K D^3(\cdot) \right] \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^\mu} \Big|_{\varepsilon^k} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^k} \Big|_{\varepsilon^\mu} \right) + \right.
\end{aligned} \tag{11.48}$$

$$\begin{aligned}
& + \mathfrak{E}^2|_{K^1} \left[-\frac{1}{2} \Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu} \left(\Xi_n^K|_{\varepsilon^t} + \Xi_n^K|_{\varepsilon^t} \right) - D^o \Xi_n^K \left(\Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu} + \Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu} \right) - \right. \\
& \left. - \Xi_n^K|_{\varepsilon^t} \left(\Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu} + \Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu} \right) \right] + \left[D \mathfrak{E}^2|_{K^2} + \mathfrak{E}^2|_{K^2} D(\cdot) \right] \left[-2 \Xi_n^K|_{\varepsilon^t} \Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu} \right] \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{\Gamma} \left\} \Delta \Omega \Delta \Gamma = 0, \\
\varepsilon \varepsilon^t \varepsilon^{2k} \sum_{\bar{\Gamma}} \sum_{\bar{\Omega}} & \left\{ \left[-P_k - t_{k_n}^K|_K - t_{k_n}^K(\cdot)|_K + D m_k + m_k D(\cdot) \right] \left[-\frac{1}{4} \Psi_n^k|_{K^2} \left(\Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu} + \Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu} \right) \cdot \right. \right. \\
& \cdot \left. \left. \left(\Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu} + \Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu} \right) - \frac{1}{4} \Psi_n^k|_{K^2} \Xi_n^K|_{\varepsilon^{2\mu}} \left(\Xi_n^K|_{\varepsilon^t} + \Xi_n^K|_{\varepsilon^t} \right) \right] + \right. \\
& + \sum_{\bar{\Gamma}} \sum_{\bar{\Omega}} \left(\mathfrak{E}^2|_{K^1} \left[-\frac{1}{2} \left(\Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu} + \Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu} \right) \left(\Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu} + \Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu} \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{2} \Xi_n^K|_{\varepsilon^{2\mu}} \left(\Xi_n^K|_{\varepsilon^t} + \Xi_n^K|_{\varepsilon^t} \right) \right] + 2 \left[D \mathfrak{E}^2|_{K^2} + \mathfrak{E}^2|_{K^2} D(\cdot) \right] \cdot \right. \\
& \left. \cdot \left[-\Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu} \left(\Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu} + \Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu} \right) - \Xi_n^K|_{\varepsilon^t} \Xi_n^K|_{\varepsilon^{2\mu}} \right] \right\} \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{\Gamma} \left\} \Delta \Omega \Delta \Gamma = 0, \tag{11.49}
\end{aligned}$$

$$\varepsilon \varepsilon^t \varepsilon^{3k} \sum_{\bar{\Gamma}} \sum_{\bar{\Omega}} \sum_{\bar{\Gamma}} \sum_{\bar{\Omega}} \left\{ 2 \left[D \mathfrak{E}^2|_{K^2} + \mathfrak{E}^2|_{K^2} D(\cdot) \right] \left[-\frac{1}{2} \Xi_n^K|_{\varepsilon^{2\mu}} \left(\Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu} + \Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu} \right) \right] \right\} \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{\Gamma} \Delta \Omega \Delta \Gamma = 0, \tag{11.50}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon \varepsilon^{2k} \varepsilon^{k\ell} \sum_{\bar{\Gamma}} \sum_{\bar{\Omega}} & \left\{ \left[-P_k - t_{k_n}^K|_K - t_{k_n}^K(\cdot)|_K + D m_k + m_k D(\cdot) \right] \left[-\frac{1}{4} \Psi_n^k|_{K^2} \left(\Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu} + \Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu} \right) \cdot \right. \right. \\
& \cdot \left. \left. \left(\Xi_n^K|_{\varepsilon^t} + \Xi_n^K|_{\varepsilon^t} \right) - \frac{1}{4} \Psi_n^k|_{K^2} \Xi_n^K|_{\varepsilon^{2t}} \left(\Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu} + \Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu} \right) \right] + \right. \\
& + \sum_{\bar{\Gamma}} \sum_{\bar{\Omega}} \left(\mathfrak{E}^2|_{K^1} \left[-\frac{1}{2} \left(\Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu} + \Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu} \right) \left(\Xi_n^K|_{\varepsilon^t} + \Xi_n^K|_{\varepsilon^t} \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{2} \Xi_n^K|_{\varepsilon^{2t}} \left(\Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu} + \Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu} \right) \right] + 2 \left[D \mathfrak{E}^2|_{K^1} + \mathfrak{E}^2|_{K^1} D(\cdot) \right] \cdot \right. \\
& \cdot \left[-\frac{1}{2} \Xi_n^K|_{\varepsilon^{2t}} \left(\Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu} + \Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu} \right) - \Xi_n^K|_{\varepsilon^t} \left(\Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu} + \Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu} \right) - \right. \\
& \left. \left. - \Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu} \Xi_n^K|_{\varepsilon^{2t}} \right] \right\} \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{\Gamma} \left\} \Delta \Omega \Delta \Gamma = 0, \tag{11.51}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \varepsilon^{2k} \varepsilon^{2kl} \sum_T \sum_{\Omega} \left\{ 2 \left[D \mathfrak{Q}^2 \Big|_{K^2} + \mathfrak{Q}^2 \Big|_{K^2} D(\cdot) \right] \left(-\frac{1}{4} \Xi_n^K \Big|_{e^2} \Xi_n^K \Big|_{e^{2\mu}} - \frac{1}{4} \left(\Xi_n^K \Big|_{e^\mu} \Big|_{e^2} + \Xi_n^K \Big|_{e^2} \Big|_{e^\mu} \right) \cdot \right. \\ \left. \left(\Xi_n^K \Big|_{e^\mu} \Big|_{e^2} + \Xi_n^K \Big|_{e^2} \Big|_{e^\mu} \right) \right\} \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{l} \Delta \Omega \Delta l = 0, \end{aligned} \quad (11.52)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \varepsilon^k \varepsilon^{kl} \sum_T \sum_{\Omega} \left\{ \left[-P_k - l_{k_n}^K \Big|_K - l_{k_n}^K(\cdot) \Big|_K + D m_k + m_k D(\cdot) \right] \left[-\frac{1}{4} \Psi_n^k \Big|_{K^2} \left(\Xi_n^K \Big|_{e^\mu} \Big|_e + \Xi_n^K \Big|_{e^\mu} \Big|_{e^\mu} \right) \cdot \right. \\ \left. \left(\Xi_n^K \Big|_{e^\mu} \Big|_{e^2} + \Xi_n^K \Big|_{e^2} \Big|_{e^\mu} \right) - \frac{1}{4} \Psi_n^k \Big|_{K^2} (D^\circ)^2 \Xi_n^K \left(\Xi_n^K \Big|_{e^\mu} \Big|_{e^2} + \Xi_n^K \Big|_{e^2} \Big|_{e^\mu} \right) \right] + \\ + \sum_T \sum_{\Omega} \left\{ \mathfrak{Q}^2 \Big|_{K^2} \left[-\frac{1}{2} \left(\Xi_n^K \Big|_{e^\mu} \Big|_e + \Xi_n^K \Big|_{e^\mu} \Big|_{e^\mu} \right) \left(\Xi_n^K \Big|_{e^\mu} \Big|_{e^2} + \Xi_n^K \Big|_{e^2} \Big|_{e^\mu} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (D^\circ)^2 \Xi_n^K \left(\Xi_n^K \Big|_{e^\mu} \Big|_{e^2} + \Xi_n^K \Big|_{e^2} \Big|_{e^\mu} \right) \right] + 2 \left[D \mathfrak{Q}^2 \Big|_{K^2} + \mathfrak{Q}^2 \Big|_{K^2} D(\cdot) \right] \cdot \\ \left[-\frac{1}{2} \Xi_n^K \Big|_{e^\mu} \left(\Xi_n^K \Big|_{e^2} \Big|_{e^2} + \Xi_n^K \Big|_{e^2} \Big|_{e^\mu} \right) - D^\circ \Xi_n^K \left(\Xi_n^K \Big|_{e^\mu} \Big|_{e^2} + \Xi_n^K \Big|_{e^2} \Big|_{e^\mu} \right) - \Xi_n^K \Big|_{e^2} \left(\Xi_n^K \Big|_{e^\mu} \Big|_e + \Xi_n^K \Big|_{e^\mu} \Big|_{e^\mu} \right) \right] + \\ + \left[D^2 \mathfrak{Q}^2 \Big|_{K^2} + 2D \mathfrak{Q}^2 \Big|_{K^2} D(\cdot) + \mathfrak{Q}^2 \Big|_{K^2} D^2(\cdot) + D \mathfrak{Q}^2 \Big|_{K^2} D(\cdot) + \mathfrak{Q}^2 \Big|_K D(\cdot) D(\cdot) \right] \cdot \\ \left. \left[-2 \Xi_n^K \Big|_{e^2} \Xi_n^K \Big|_{e^\mu} \right] \right\} \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{l} \Delta \Omega \Delta l = 0, \end{aligned} \quad (11.53)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \varepsilon^k \varepsilon^{2kl} \sum_T \sum_{\Omega} \left\{ 2 \left[D \mathfrak{Q}^2 \Big|_{K^2} + \mathfrak{Q}^2 \Big|_{K^2} D(\cdot) \right] \cdot \right. \\ \left[-\frac{1}{2} \left(\Xi_n^K \Big|_{e^\mu} \Big|_{e^2} + \Xi_n^K \Big|_{e^2} \Big|_{e^\mu} \right) \left(\Xi_n^K \Big|_{e^\mu} \Big|_e + \Xi_n^K \Big|_{e^\mu} \Big|_{e^\mu} \right) - \frac{1}{2} \Xi_n^K \Big|_{e^{2\mu}} \left(\Xi_n^K \Big|_{e^\mu} \Big|_{e^2} + \Xi_n^K \Big|_{e^2} \Big|_{e^\mu} \right) \right] + \\ + \left[D^2 \mathfrak{Q}^2 \Big|_{K^2} + 2D \mathfrak{Q}^2 \Big|_{K^2} D(\cdot) + \mathfrak{Q}^2 \Big|_{K^2} D^2(\cdot) + D \mathfrak{Q}^2 \Big|_{K^2} D(\cdot) + \mathfrak{Q}^2 \Big|_K D(\cdot) D(\cdot) \right] \cdot \\ \left. \left[-\Xi_n^K \Big|_{e^\mu} \left(\Xi_n^K \Big|_{e^\mu} \Big|_{e^2} + \Xi_n^K \Big|_{e^2} \Big|_{e^\mu} \right) - \Xi_n^K \Big|_{e^2} \Xi_n^K \Big|_{e^{2\mu}} \right] \right\} \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{l} \Delta \Omega \Delta l = 0, \end{aligned} \quad (11.54)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \varepsilon^k \varepsilon^{3kl} \sum_T \sum_{\Omega} \left\{ \left[D^2 \mathfrak{Q}^2 \Big|_{K^2} + 2D \mathfrak{Q}^2 \Big|_{K^2} D(\cdot) + \mathfrak{Q}^2 \Big|_{K^2} D^2(\cdot) + D \mathfrak{Q}^2 \Big|_{K^2} D(\cdot) + \mathfrak{Q}^2 \Big|_K D(\cdot) D(\cdot) \right] \cdot \right. \\ \left. \left[-\frac{1}{2} \Xi_n^K \Big|_{e^{2\mu}} \left(\Xi_n^K \Big|_{e^\mu} \Big|_{e^2} + \Xi_n^K \Big|_{e^2} \Big|_{e^\mu} \right) \right] \right\} \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{l} \Delta \Omega \Delta l = 0, \end{aligned} \quad (11.55)$$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^2 \varepsilon^{2k} \varepsilon^{kl} \sum_T \sum_{\Omega} \sum_T \sum_{\Omega} \left\{ 2 \left[D^2 \mathfrak{E}^2|_{K^2} + \mathfrak{E}^2|_{K^2} D(\cdot) \right] \cdot \right. \\
& \quad \cdot \left[-\frac{1}{2} \left(\Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu}^\circ|_{\varepsilon^t} + \Xi_n^K|_{\varepsilon^t}^\circ|_{\varepsilon^\mu} \right) \left(\Xi_n^K|_{\varepsilon^t}^\circ + \Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu}^\circ \right) - \frac{1}{2} \Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu}^\circ \left(\Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu}^\circ|_{\varepsilon^t} + \Xi_n^K|_{\varepsilon^t}^\circ|_{\varepsilon^\mu} \right) \right] + \\
& \quad + \left[D^2 \mathfrak{E}^2|_{K^2} + 2D\mathfrak{E}^2|_{K^2} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2|_{K^2} D^2(\cdot) + D\mathfrak{E}^2|_{K^2} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2|_{K^2} D(\cdot) D(\cdot) \right] \cdot \\
& \quad \cdot \left[-\frac{1}{2} \Xi_n^K|_{\varepsilon^{2\mu}}^\circ \left(\Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu}^\circ|_{\varepsilon^t} + \Xi_n^K|_{\varepsilon^t}^\circ|_{\varepsilon^\mu} \right) - \Xi_n^K|_{\varepsilon^t}^\circ \left(\Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu}^\circ|_{\varepsilon^t} + \Xi_n^K|_{\varepsilon^t}^\circ|_{\varepsilon^\mu} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu}^\circ \Xi_n^K|_{\varepsilon^t}^\circ \right] \left. \right\} \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{\Gamma} \Delta \Omega \Delta t = 0, \tag{11.56}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^2 \varepsilon^{2k} \varepsilon^{2kl} \sum_T \sum_{\Omega} \sum_T \sum_{\Omega} \left\{ \left[D^2 \mathfrak{E}^2|_{K^2} + 2D\mathfrak{E}^2|_{K^2} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2|_{K^2} D^2(\cdot) + D\mathfrak{E}^2|_{K^2} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2|_{K^2} D(\cdot) D(\cdot) \right] \cdot \right. \\
& \quad \left. \right\} \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{\Gamma} \Delta \Omega \Delta t = 0, \tag{11.57}
\end{aligned}$$

$$\left[-\frac{1}{2} \Xi_n^K|_{\varepsilon^{2\mu}}^\circ \Xi_n^K|_{\varepsilon^{2\mu}}^\circ - \frac{1}{4} \left(\Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu}^\circ|_{\varepsilon^t} + \Xi_n^K|_{\varepsilon^t}^\circ|_{\varepsilon^\mu} \right) \left(\Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu}^\circ|_{\varepsilon^t} + \Xi_n^K|_{\varepsilon^t}^\circ|_{\varepsilon^\mu} \right) \right] \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{\Gamma} \Delta \Omega \Delta t = 0,$$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^3 \varepsilon^k \varepsilon^{kl} \sum_T \sum_{\Omega} \sum_T \sum_{\Omega} \left\{ 2 \left[D^2 \mathfrak{E}^2|_{K^2} + \mathfrak{E}^2|_{K^2} D(\cdot) \right] \cdot \right. \\
& \quad \cdot \left[-\frac{1}{2} \left(\Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu}^\circ|_{\varepsilon^t} + \Xi_n^K|_{\varepsilon^t}^\circ|_{\varepsilon^\mu} \right) \left(\Xi_n^K|_{\varepsilon^t}^\circ + \Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu}^\circ \right) - \frac{1}{2} (D^\circ)^2 \Xi_n^K \left(\Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu}^\circ|_{\varepsilon^t} + \Xi_n^K|_{\varepsilon^t}^\circ|_{\varepsilon^\mu} \right) \right] + \\
& \quad + \left[D^2 \mathfrak{E}^2|_{K^2} + 2D\mathfrak{E}^2|_{K^2} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2|_{K^2} D^2(\cdot) + D\mathfrak{E}^2|_{K^2} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2|_{K^2} D(\cdot) D(\cdot) \right] \cdot \\
& \quad \cdot \left[-\frac{1}{2} \Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu}^\circ \left(\Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu}^\circ|_{\varepsilon^t} + \Xi_n^K|_{\varepsilon^t}^\circ|_{\varepsilon^\mu} \right) - D^\circ \Xi_n^K \left(\Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu}^\circ|_{\varepsilon^t} + \Xi_n^K|_{\varepsilon^t}^\circ|_{\varepsilon^\mu} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \Xi_n^K|_{\varepsilon^t}^\circ \left(\Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu}^\circ|_{\varepsilon^t} + \Xi_n^K|_{\varepsilon^t}^\circ|_{\varepsilon^\mu} \right) \right] \left. \right\} \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{\Gamma} \Delta \Omega \Delta t = 0, \tag{11.58}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^3 \varepsilon^k \varepsilon^{2kl} \sum_T \sum_{\Omega} \sum_T \sum_{\Omega} \left\{ \left[D^2 \mathfrak{E}^2|_{K^2} + 2D\mathfrak{E}^2|_{K^2} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2|_{K^2} D^2(\cdot) + D\mathfrak{E}^2|_{K^2} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2|_{K^2} D(\cdot) D(\cdot) \right] \cdot \right. \\
& \quad \cdot \left[-\frac{1}{2} \left(\Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu}^\circ|_{\varepsilon^t} + \Xi_n^K|_{\varepsilon^t}^\circ|_{\varepsilon^\mu} \right) \left(\Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu}^\circ|_{\varepsilon^t} + \Xi_n^K|_{\varepsilon^t}^\circ|_{\varepsilon^\mu} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \Xi_n^K|_{\varepsilon^{2\mu}}^\circ \left(\Xi_n^K|_{\varepsilon^\mu}^\circ|_{\varepsilon^t} + \Xi_n^K|_{\varepsilon^t}^\circ|_{\varepsilon^\mu} \right) \right] \left. \right\} \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{\Gamma} \Delta \Omega \Delta t = 0, \tag{11.59}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^3 \varepsilon^{2k} \varepsilon^{k'} \sum_{\Gamma} \sum_{\Omega} \sum_{\Gamma} \sum_{\Omega} \left\{ \left[D^2 \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} + 2D \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} D^2(\cdot) + D \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa} D(\cdot) D(\cdot) \right] \cdot \right. \\
& \cdot \left[-\frac{1}{2} \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{k'}} \Big|_{\varepsilon^k} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^k} \Big|_{\varepsilon^{k'}} \right) \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon} \Big|_{\varepsilon^k} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^k} \Big|_{\varepsilon} \right) - \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{2} \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^{2k}} \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^\mu} \Big|_{\varepsilon} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon} \Big|_{\varepsilon^\mu} \right) \right] \right\} \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{\Gamma} \Delta \Omega \Delta t = 0, \tag{11.60}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^4 \varepsilon^k \varepsilon^{k'} \sum_{\Gamma} \sum_{\Omega} \sum_{\Gamma} \sum_{\Omega} \left\{ \left[D^2 \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} + 2D \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} D^2(\cdot) + D \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa^2} D(\cdot) + \mathfrak{E}^2 \Big|_{\kappa} D(\cdot) D(\cdot) \right] \cdot \right. \\
& \cdot \left[-\frac{1}{2} \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^\mu} \Big|_{\varepsilon} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon} \Big|_{\varepsilon^\mu} \right) \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^k} \Big|_{\varepsilon^k} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^k} \Big|_{\varepsilon} \right) - \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{2} (D^\circ)^2 \Xi_n^K \left(\Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^\mu} \Big|_{\varepsilon^k} + \Xi_n^K \Big|_{\varepsilon^k} \Big|_{\varepsilon^\mu} \right) \right] \right\} \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{\Gamma} \Delta \Omega \Delta t = 0. \tag{11.61}
\end{aligned}$$

W równaniach (11.1 – 11.61) indeks $(\cdot)_n$ jest tożsamy z oznaczeniem $(\cdot)_*$.

Literatura

1. MARCINIAK A.: *Wstępny opis roślinnego ośrodka siatkowego – źdźbłowego*. Rozprawa habilitacyjna, Lublin 1995.
2. WOŹNIAK C.: *Podstawy dynamiki ciał odkształcalnych*. PWN, Warszawa 1969.

Streszczenie

Z przekształceń współrzędnych otrzymuje się postaci ich wariacji a także wariacje funkcjonału działania. Jeżeli uzna się, że parametry ruchu nie mogą być nieskończenie małe w sensie ich poznania więc w ostateczności należy uznać za niezerowe ich potęgę oraz iloczyn. Między punktami pomiarowymi można aproksymować z dużą dokładnością brakujące wyniki w sytuacji, gdy układ jest mało wrażliwy, tj. zachowujący np. zdeterminowany charakter iteracji. Ponieważ takie układy nie są powszechnymi więc lepiej odrzucić tezę o nieskończymalności parametrów. Ilość praw zachowania wynika z ilości parametrów ich potęg i iloczynów. Dla analizowanego modelu otrzymano 61 praw.

UWAGI O OŚRODKU QUASI – PROSTYM

Cz. III. Uproszczenia, silne całkowe prawa zachowania, powiązanie z ruchem siatki przestrzennej

Andrzej L. Marciniak, Andrzej Fijolek
Katedra Maszyn i Urządzeń Rolniczych WTR, Akademia Rolnicza, Lublin
Jerzy Podgórski, Piotr Sieczka
Wydział Inżynierii Budowlanej i Sanitarnej, Politechnika Lubelska, Lublin

Synopsis: Teoria ośrodków quasi-liniowych poprzez operatory sumacyjne jest powiązana z teorią ruchu ośrodków siatkowych.

Słowa kluczowe: Silne całkowe prawa zachowania, warunki niezmienniczości, przestrzenny opis ośrodka, operatory sumacyjne.

Jeżeli ograniczyć się tylko do części liniowych, to wówczas będą zachodziły zależności

$$\begin{aligned} \delta \Xi_*^k &\doteq \Xi_*^k|_{\epsilon^t} \epsilon^k + \Xi_*^k|_{\epsilon^u} \epsilon^{kl} + D^o \Xi_*^k \epsilon, \\ \delta_0 \Psi_*^k &\doteq \psi_l \epsilon^{kl} + \epsilon^k - \psi_*^k|_K \Xi_*^k|_{\epsilon^t} \epsilon^k - \psi_*^k|_K \Xi_*^k|_{\epsilon^u} \epsilon^{kl} - \psi_*^k|_K D^o \Xi_*^k \epsilon - D \Psi_*^k \epsilon, \\ \delta IV &= - \sum_T \sum_{\Omega} P_k \delta_0 \Psi_*^k \Delta \Omega \Delta t - \sum_T \sum_{\Pi} I_{k*}^K \delta_0 \Psi_*^k \Delta \Pi_K \Delta t + \\ &+ \left[\sum_{\Omega} m_k \delta_0 \Psi_*^k \Delta \Omega \right]_{\epsilon^t}^4 + \sum_T \sum_{\Pi} \mathcal{E} \delta \Xi_*^k N_K \Delta \Pi \Delta t + \left[\sum_{\Omega} \mathcal{E} \epsilon \Delta \Omega \right]_{\epsilon^t}^4 = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Po podstawieniu wariacji zmiennych oraz uporządkowaniu względem parametrów otrzymuje się

$$\begin{aligned} &- \sum_T \sum_{\Omega} P_k \epsilon^{kl} \left(\psi_l - \psi_*^k|_K \Xi_*^k|_{\epsilon^u} \right) \Delta \Omega \Delta t - \sum_T \sum_{\Omega} P_k \epsilon^k \left(1 - \psi_*^k|_K \Xi_*^k|_{\epsilon^t} \right) \Delta \Omega \Delta t + \\ &+ \sum_T \sum_{\Omega} P_k \epsilon \left(\psi_*^k|_K D^o \Xi_*^k + D \Psi_*^k \right) \Delta \Omega \Delta t - \sum_T \sum_{\Pi} I_{k*}^K \epsilon^{kl} \left(\psi_l - \psi_*^k|_K \Xi_*^k|_{\epsilon^u} \right) \Delta \Pi N_K \Delta t - \\ &- \sum_T \sum_{\Pi} I_{k*}^K \epsilon^k \left(1 - \psi_*^k|_K \Xi_*^k|_{\epsilon^t} \right) \Delta \Pi N_K \Delta t + \sum_T \sum_{\Pi} I_{k*}^K \epsilon \left(\psi_*^k|_K D^o \Xi_*^k + D \Psi_*^k \right) \Delta \Pi N_K \Delta t + \\ &+ \left[\sum_{\Omega} m_k \epsilon^{kl} \left(\psi_l - \psi_*^k|_K \Xi_*^k|_{\epsilon^u} \right) \Delta \Omega \right]_{\epsilon^t}^4 + \left[\sum_{\Omega} m_k \epsilon^k \left(1 - \psi_*^k|_K \Xi_*^k|_{\epsilon^t} \right) \Delta \Omega \right]_{\epsilon^t}^4 - \\ &- \left[\sum_{\Omega} m_k \epsilon \left(\psi_*^k|_K D^o \Xi_*^k + D \Psi_*^k \right) \Delta \Omega \right]_{\epsilon^t}^4 + \sum_T \sum_{\Pi} \mathcal{E} \Xi_*^k|_{\epsilon^u} \epsilon^{kl} \Delta \Pi N_K \Delta t + \\ &+ \sum_T \sum_{\Pi} \mathcal{E} \Xi_*^k|_{\epsilon^t} \epsilon^k \Delta \Pi N_K \Delta t + \sum_T \sum_{\Pi} \mathcal{E} D^o \Xi_*^k \epsilon \Delta \Pi N_K \Delta t + \left[\sum_{\Omega} \mathcal{E} \epsilon \Delta \Omega \right]_{\epsilon^t}^4 = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Teraz całkowe słabe prawa zachowania przyjmą postaci

$$\begin{aligned}
& \sum_T \sum_{\Omega} \left\{ t_{[k\alpha]}^K \left(1 - \psi_{\bullet}^k \Big|_K \Xi_{\bullet}^K \Big|_{\varepsilon^t}^{\circ} - \mathfrak{E} \Xi_{\bullet}^K \Big|_{\varepsilon^t}^{\circ} \right) - t_{[k\alpha]}^K \left(\left[\psi_{\bullet}^k \Big|_K \Xi_{\bullet}^K \Big|_{\varepsilon^t}^{\circ} \right] \Big|_K + \left(\mathfrak{E} \Xi_{\bullet}^K \Big|_{\varepsilon^t}^{\circ} \right) \Big|_K \right) + \\
& \quad + P_k \left(1 - \psi_{\bullet}^k \Big|_K \Xi_{\bullet}^K \Big|_{\varepsilon^t}^{\circ} \right) - Dm_k \left(1 - \psi_{\bullet}^k \Big|_K \Xi_{\bullet}^K \Big|_{\varepsilon^t}^{\circ} \right) + m_k D \left(\psi_{\bullet}^k \Big|_K \Xi_{\bullet}^K \Big|_{\varepsilon^t}^{\circ} \right) \Big\} \Delta \Omega \Delta t = 0, \\
& \sum_T \sum_{\Omega} \left\{ t_{[k\alpha]}^K \left(\psi_{[l]} - \psi_{\bullet}^k \Big|_K \Xi_{\bullet}^K \Big|_{\varepsilon^{*vl}}^{\circ} - \mathfrak{E} \Xi_{\bullet}^K \Big|_{\varepsilon^{*vl}}^{\circ} \right) + t_{[k\alpha]}^K \left(\psi_{[l]} - \psi_{\bullet}^k \Big|_K \Xi_{\bullet}^K \Big|_{\varepsilon^{*vl}}^{\circ} - \mathfrak{E} \Xi_{\bullet}^K \Big|_{\varepsilon^{*vl}}^{\circ} \right) \Big|_K + \right. \\
& \quad + P_{[k} \left(\psi_{[l]} - \psi_{\bullet}^k \Big|_K \Xi_{\bullet}^K \Big|_{\varepsilon^{*vl}}^{\circ} \right) - Dm_{[k} \left(\psi_{[l]} - \psi_{\bullet}^k \Big|_K \Xi_{\bullet}^K \Big|_{\varepsilon^{*vl}}^{\circ} \right) - \\
& \quad \left. - m_k D \left(\psi_{[l]} - \psi_{\bullet}^k \Big|_K \Xi_{\bullet}^K \Big|_{\varepsilon^{*vl}}^{\circ} \right) \right\} \Delta \Omega \Delta t = 0, \tag{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_T \sum_{\Omega} \left\{ t_{[k\alpha]}^K \left(D\psi_{\bullet}^k + \psi_{\bullet}^k \Big|_K D^{\circ} \Xi_{\bullet}^K + \mathfrak{E} D^{\circ} \Xi_{\bullet}^K \right) + t_{[k\alpha]}^K \left(D\psi_{\bullet}^k + \psi_{\bullet}^k \Big|_K D^{\circ} \Xi_{\bullet}^K + \mathfrak{E} D^{\circ} \Xi_{\bullet}^K \right) \Big|_K + \right. \\
& \quad + P_k \left(D\psi_{\bullet}^k + \psi_{\bullet}^k \Big|_K D^{\circ} \Xi_{\bullet}^K \right) - Dm_k \left(D\psi_{\bullet}^k + \psi_{\bullet}^k \Big|_K D^{\circ} \Xi_{\bullet}^K \right) - \\
& \quad \left. - m_k D \left(D\psi_{\bullet}^k + \psi_{\bullet}^k \Big|_K D^{\circ} \Xi_{\bullet}^K \right) + D\mathfrak{E} \right\} \Delta \Omega \Delta t = 0.
\end{aligned}$$

Dla $\delta \Xi_{\bullet}^K = 0$ słabe całkowe prawa zachowania przyjmą postaci

$$\begin{aligned}
& \sum_T \left(\sum_{\Pi} t_k \Delta \Pi + \sum_{\Omega} b_k \Delta \Omega \right) \Delta t = \sum_T \sum_{\Omega} Dm_k \Delta \Omega \Delta t, \\
& \sum_T \left(\sum_{\Pi} t_{[k} \psi_{[l]} \Delta \Pi + \sum_{\Omega} b_{[k} \psi_{[l]} \Delta \Omega \right) \Delta t = \sum_T \sum_{\Omega} \left(Dm_{[k} \psi_{[l]} + m_{[k} D\psi_{[l]} \right) \Delta \Omega \Delta t, \tag{4} \\
& \sum_T \left(\sum_{\Pi} t_k D\psi_{\bullet}^k \Delta \Pi + \sum_{\Omega} b_k D\psi_{\bullet}^k \Delta \Omega \right) \Delta t = \sum_T \sum_{\Omega} \left(Dm_k D\psi_{\bullet}^k + m_k D^2 \psi_{\bullet}^k - D\mathfrak{E} \right) \Delta \Omega \Delta t.
\end{aligned}$$

W przypadku, gdy ośrodek jest nielokalnym, tj. gdy $\mathfrak{E}^2 \neq 0$ więc wyrażenia pod całkami zależne od \mathfrak{E} tj. $t_{[k\alpha]}^K, m_k$ są całkami po Ω i T . Nie można zatem przyrównać wyrażen podcałkowych do zera (będzie tak, gdy $\mathfrak{E}^2 = 0$ tj. dla ciała sprężystego).

Silne całkowe prawa zachowania wyprowadza się nie z zasady stacjonarności tzn. nie uwzględniając wielkości P_k . Otrzymuje się zatem

$$\begin{aligned}
& \sum_T \sum_{\Omega} \left[\mathfrak{E} \Big|_K - \mathfrak{E} \Big|_{k|K} \Big|_K - D\mathfrak{E} \Big|_{D_t} \right] \cdot \\
& \cdot \left(\varepsilon^k + \varepsilon^{kl} \psi_{[l]} - \varepsilon D\psi_{\bullet}^k - \psi_{\bullet}^k \Big|_K \Xi_{\bullet}^K \Big|_{\varepsilon^t}^{\circ} \varepsilon^k - \psi_{\bullet}^k \Big|_K \Xi_{\bullet}^K \Big|_{\varepsilon^u}^{\circ} \varepsilon^{kl} - \psi_{\bullet}^k \Big|_K D^{\circ} \Xi_{\bullet}^K \varepsilon \right) \Delta \Omega \Delta t +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_T \sum_{\Pi} \mathfrak{E}|_{k|K} \left(\varepsilon^k + \varepsilon^{kl} \psi_l - \varepsilon D \psi_*^k - \psi_*^k|_K \Xi_*^K|_{\varepsilon^t} \varepsilon^k - \psi_*^k|_K \Xi_*^K|_{\varepsilon^\nu} \varepsilon^l - \psi_*^k|_K D^o \Xi_*^K \varepsilon \right) \Delta \Pi_K \Delta t + \\
& + \left[\sum_{\Omega} \mathfrak{E}|_{D_t} \left(\varepsilon^k + \varepsilon^{kl} \psi_l - \varepsilon D \psi_*^k - \psi_*^k|_K \Xi_*^K|_{\varepsilon^t} \varepsilon^k - \psi_*^k|_K \Xi_*^K|_{\varepsilon^\nu} \varepsilon^l - \psi_*^k|_K D^o \Xi_*^K \varepsilon \right) \Delta \Omega \right]_{I_t}^{\prime} + \\
& + \sum_T \sum_{\Pi} \mathfrak{E} \left(\Xi_*^K|_{\varepsilon^t} \varepsilon^k + \Xi_*^K|_{\varepsilon^\nu} \varepsilon^l + D^o \Xi_*^K \varepsilon \right) \Delta \Pi_K \Delta t + \\
& + \left[\sum_{\Omega} \mathfrak{E} \varepsilon \Delta \Omega \right]_{I_t}^{\prime} = 0. \tag{5}
\end{aligned}$$

Drugi składnik można zapisać jako

$$\sum_T \sum_{\Pi} \mathfrak{E}|_{k|K}(\cdot) \Delta \Pi_K \Delta t = \sum_T \sum_{\Omega} \left[\mathfrak{E}|_{k|K}|_K(\cdot) + \mathfrak{E}|_{k|K}(\cdot)|_K \right] \Delta \Omega \Delta t,$$

trzeci zaś będzie

$$\left[\sum_{\Omega} \mathfrak{E}|_{D_t}(\cdot) \Delta \Omega \right]_{I_t}^{\prime} = \sum_T \sum_{\Omega} \left[D \mathfrak{E}|_{D_t}(\cdot) + \mathfrak{E}|_{D_t} D(\cdot) \right] \Delta \Omega \Delta t,$$

czwarty
$$\sum_T \sum_{\Pi} \mathfrak{E}(\bar{\cdot}) \Delta \Pi_K \Delta t = \sum_T \sum_{\Omega} \left[D \mathfrak{E}(\bar{\cdot}) + \mathfrak{E} D(\bar{\cdot}) \right] \Delta \Omega \Delta t,$$

piąty
$$\left[\sum_{\Omega} \mathfrak{E} \varepsilon \Delta \Omega \right]_{I_t}^{\prime} = \sum_T \sum_{\Omega} D \mathfrak{E} \varepsilon \Delta \Omega \Delta t.$$

$$\begin{aligned}
& - \varepsilon^k \left\{ \sum_T \sum_{\Omega} P_k \left(1 - \psi_*^k|_K \Xi_*^K|_{\varepsilon^t} \right) \Delta \Omega \Delta t + \sum_T \sum_{\Pi} t_{k*}^K \left(1 - \psi_*^k|_K \Xi_*^K|_{\varepsilon^t} \right) \Delta \Pi_N \Delta t - \right. \\
& \quad \left. - \left[\sum_{\Omega} m_k \left(1 - \psi_*^k|_K \Xi_*^K|_{\varepsilon^t} \right) \Delta \Omega \right]_{I_t}^{\prime} - \sum_T \sum_{\Pi} \mathfrak{E} \Xi_*^K|_{\varepsilon^t} \Delta \Pi_N \Delta t \right\} - \\
& - \varepsilon^{kl} \left\{ \sum_T \sum_{\Omega} P_k \left(\psi_l - \psi_*^l|_K \Xi_*^K|_{\varepsilon^\nu} \right) \Delta \Omega \Delta t + \sum_T \sum_{\Pi} t_{k*}^K \left(\psi_l - \psi_*^l|_K \Xi_*^K|_{\varepsilon^\nu} \right) \Delta \Pi_N \Delta t - \right. \\
& \quad \left. - \left[\sum_{\Omega} m_k \left(\psi_l - \psi_*^l|_K \Xi_*^K|_{\varepsilon^\nu} \right) \Delta \Omega \right]_{I_t}^{\prime} - \sum_T \sum_{\Pi} \mathfrak{E} \Xi_*^K|_{\varepsilon^\nu} \Delta \Pi_N \Delta t \right\} + \\
& - \varepsilon \left\{ \sum_T \sum_{\Omega} P_k \left(D \psi_*^k + \psi_*^k|_K D^o \Xi_*^K \right) \Delta \Omega \Delta t + \sum_T \sum_{\Pi} t_{k*}^K \left(D \psi_*^k + \psi_*^k|_K D^o \Xi_*^K \right) \Delta \Pi_N \Delta t - \right. \\
& \quad \left. - \left[\sum_{\Omega} m_k \left(D \psi_*^k + \psi_*^k|_K D^o \Xi_*^K \right) \Delta \Omega \right]_{I_t}^{\prime} + \sum_T \sum_{\Pi} \mathfrak{E} D^o \Xi_*^K \Delta \Pi_N \Delta t + \left[\sum_{\Omega} \mathfrak{E} \Delta \Omega \right]_{I_t}^{\prime} \right\} = 0.
\end{aligned}$$

Wyrażenia w nawiasach klamrowych zerują się. W drugim nawiasie występuje jedynie część antysymetryczna. Zerowanie to jest możliwe dlatego też, że utrzymuje się niez-

leżność współrzędnych Lagrange'a i Eulera od parametrów ruchu. Tak więc słabe całkowe prawa zachowania przyjmą postaci

$$\begin{aligned}
 & \left[\sum_{\Omega} m_k \left(1 - \psi_{\bullet}^k \Big|_K \Xi_{\bullet}^K \Big|_{\varepsilon^t} \right) \Delta \Omega \right]_{t_0}^{t_1} = \\
 & \quad + \sum_{\Gamma} \left(\sum_{\Pi} t_k \left(1 - \psi_{\bullet}^k \Big|_K \Xi_{\bullet}^K \Big|_{\varepsilon^t} - \mathcal{E} \Xi_{\bullet}^K \Big|_{\varepsilon^t} \right) \Delta \Pi + \sum_{\Omega} P_k \left(1 - \psi_{\bullet}^k \Big|_K \Xi_{\bullet}^K \Big|_{\varepsilon^t} \right) \Delta \Omega \right) \Delta t, \\
 & \left[\sum_{\Omega} m_k \left[\psi_{I|} - \psi_{\bullet}^k \Big|_K \Xi_{\bullet}^K \Big|_{\varepsilon^{p|}} \right] \Delta \Omega \right]_{t_0}^{t_1} = \tag{6} \\
 & = \sum_{\Gamma} \left(\sum_{\Pi} t_k \left(\psi_{I|} - \psi_{\bullet}^k \Big|_K \Xi_{\bullet}^K \Big|_{\varepsilon^{p|}} - \mathcal{E} \Xi_{\bullet}^K \Big|_{\varepsilon^{p|}} \right) \Delta \Pi + \sum_{\Omega} P_k \left(\psi_{I|} - \psi_{\bullet}^k \Big|_K \Xi_{\bullet}^K \Big|_{\varepsilon^{p|}} \right) \Delta \Omega \right) \Delta t, \\
 & \left[\sum_{\Omega} \left\{ m_k \left(D \psi_{\bullet}^k + \psi_{\bullet}^k \Big|_K D^o \Xi_{\bullet}^K \right) - \mathcal{E} \right\} \Delta \Omega \right]_{t_0}^{t_1} = \\
 & = \sum_{\Gamma} \left(\sum_{\Pi} t_k \left(D \psi_{\bullet}^k + \psi_{\bullet}^k \Big|_K D^o \Xi_{\bullet}^K + \mathcal{E} D^o \Xi_{\bullet}^K \right) \Delta \Pi + \sum_{\Omega} P_k \left(D \psi_{\bullet}^k + \psi_{\bullet}^k \Big|_K D^o \Xi_{\bullet}^K \right) \Delta \Omega \right) \Delta t.
 \end{aligned}$$

Tutaj należy przypomnieć, że $m_k \doteq \mathcal{E} \Big|_{D \psi_{\bullet}^k}$ a więc lewe strony będą odpowiednikami pędów, momentów pędu i energii. Występujące tu składowe wariacji $\delta \Xi_{\bullet}^K$ będzie można interpretować następująco: $\psi_{\bullet}^k \Big|_K \Xi_{\bullet}^K \Big|_{\varepsilon^{p|}}$ jest zmianą cząstki w ruchu kulistym, $\psi_{\bullet}^k \Big|_K D^o \Xi_{\bullet}^K$ jest zmianą czasową energetyczną. Do wielkości tych należy wprowadzić te obiekty geometryczne, które wiążąc się z budową rośliny i miejsc kontaktowych będą jednocześnie opisywały zmienność tarcia (w trzech kierunkach), zmienność odkształceń wyrażonych poprzez zmienność kątów Eulera w trakcie ruchu kulistego, zmienność innych obiektów z nimi związanymi itp. zmiany.

Występujące w podanych zależnościach przyrosty $\Delta \Omega$ i $\Delta \Pi$ należy zdefiniować dla przestrzeni $\mathcal{G}_{\varepsilon}$. Otóż wielkości $\Delta \Omega$ i $\Delta \Pi$ będą zależę od obiektów krzywizny a także wymiaru samej przestrzeni. Ten ostatni wynik pochodzi z rozważań nad fraktalną naturą przestrzeni. Wielkość $t_k = t_k(\Xi_{\bullet}^K, t)$ jest synonimem siły powierzchniowej $\left(t_k^K \doteq -\mathcal{E} \Big|_{\psi_{\bullet}^k} \Big|_K \right)$ i nie jest wielkością pierwotną. Wyrażenia po prawych stronach są synonimami wypadkowych: sił wewnętrznych, momentów zewnętrznych i pracy oddziaływań na ośrodek $\mathcal{O}(t_0 < t < t_1)$.

Przekształcając odpowiednio zależności (6)

$$\begin{aligned}
 \sum_{\Pi} t_k(\cdot) \Delta \Pi &= \sum_{\Pi} t_{k^*}^K(\cdot) N_K \Delta \Pi = \sum_{\Omega} \left[t_{k^*}^K \Big|_K(\cdot) + t_{k^*}^K(\cdot) \Big|_K \right] \Delta \Omega, \\
 \left[\sum_{\Omega} m_k(\cdot) \Delta \Omega \right]_{t_0}^{t_1} &= \sum_{\Gamma} \sum_{\Omega} D[m_k(\cdot)] \Delta \Omega \Delta t = \sum_{\Gamma} \sum_{\Omega} [D m_k(\cdot) + m_k D(\cdot)] \Delta \Omega \Delta t,
 \end{aligned} \tag{7}$$

po uporządkowaniu otrzymuje się silne całkowe prawa zachowania takie jak podano w pracy [2]. Są one warunkami istnienia słabych praw zachowania.

Zależność (6.1) wskazuje na jednorodność tj. braku wyróżnienia poszczególnych miejsc przestrzeni odniesienia i jest to jednocześnie bilans sił powierzchniowych oraz objętościowych. Zależność (6.2) mówi o izotropowości przestrzeni odniesienia tj. o nie uprzywilejowaniu żadnych z kierunków przechodzących przez wyróżnione miejsca oraz jest bilansem momentów powierzchniowych i objętościowych. Natomiast zależność (6.3) mówi o jednorodności czasu i jest bilansem pracy sił zewnętrznych względem ośrodka.

Jeżeli w wyrażeniach na funkcję materiałową uwzględni się jedynie elementy liniowe, to wówczas warunki niezmienniczości są takie same jak w pracy [2]. Spełnienie warunków niezmienniczości powoduje, że spełnione są silne całkowe prawa zachowania. Warunki niezmienniczości nakładają również pewne ograniczenia na funkcje \mathcal{L}^1 i \mathcal{L}^2 . Funkcja \mathcal{L}^1 nie zależy bezpośrednio od argumentów t i ψ^k a jedynie poprzez ich pochodne $\psi_{\cdot}^k|_K$ i $D\psi_{\cdot}^k$. Natomiast funkcja \mathcal{L}^2 będzie zależec od różnicy $(t - \bar{t})$ oraz $(\psi^k - \bar{\psi}^k)$. Funkcje \mathcal{L}^1 i \mathcal{L}^2 są niezmiennicze względem obrotów przestrzeni odniesienia tj. względem $\varepsilon^{kl} = -\varepsilon^{lk}$. Do dalszych obliczeń można przyjąć, że

$$\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1\left(\psi_{\cdot}^k|_K, \psi_{\cdot}^k|_L, \psi_{\cdot}^k|_K, D\psi_{\cdot}^k, D\psi_{\cdot}^k, \varepsilon_{klm} \psi_{\cdot}^k|_K \psi_{\cdot}^l|_L, D\psi_{\cdot}^m, \varepsilon_{klm} \psi_{\cdot}^k|_K \psi_{\cdot}^l|_L, \psi_{\cdot}^m|_M\right), \quad (8)$$

$$\text{gd\k{y}ż:} \quad \varepsilon_{klm} \psi_{\cdot}^k|_K D\psi_{\cdot}^l D\psi_{\cdot}^m = \varepsilon_{klm} D\psi_{\cdot}^k D\psi_{\cdot}^l D\psi_{\cdot}^m = 0.$$

Dalsze uproszczenia w przestrzeni \mathcal{P}_x , podane w pracy [2], nie są możliwe do przyjęcia. Następnie

$$\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}^2\left(\Xi_{\cdot}^K, \Xi_{\cdot}^K, t - \bar{t}, a_{(\alpha)}^k a_{(\beta)}^l \delta_{kl}, a_{(\alpha)}^k a_{(\beta)}^l a_{(\gamma)}^m \varepsilon_{klm}\right), \quad (9)$$

gdzie: $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, 9$.

$$a_{(\alpha)}^k = \left(\psi_{\cdot}^k - \bar{\psi}_{\cdot}^k, \psi_{\cdot}^k|_1, \psi_{\cdot}^k|_2, \psi_{\cdot}^k|_3, \bar{\psi}_{\cdot}^k|_1, \bar{\psi}_{\cdot}^k|_2, \bar{\psi}_{\cdot}^k|_3, D\psi_{\cdot}^k, D\bar{\psi}_{\cdot}^k\right). \quad (10)$$

Z kolei na funkcje \mathcal{L} będzie można nałożyć ograniczenia wynikające z warunku

$$\sum_T \sum_{\Omega} \left(\mathcal{L}|_k t + \mathcal{L}|_D\right) \Delta\Omega \Delta t = \sum_T \sum_{\Omega} \left(DF_k + F_{k\cdot}^K|_K\right) \Delta\Omega \Delta t. \quad (11)$$

Funkcjonały $F_k, F_{k\cdot}^K$ gwarantują identyczność równań ruchu w każdym inercyjnym układzie współrzędnych.

Przy stosowaniu opisu przestrzennego do praw zachowania należy pamiętać, że zachodzić będzie zależność

$$\psi_{\cdot}^k|_K \Xi_{\cdot}^K|_k = \left(\frac{\partial \psi_{\cdot}^k}{\partial \Xi_{\cdot}^K} + \sum_{qK}^k \psi_{\cdot}^q\right) \left(\frac{\partial \Xi_{\cdot}^K}{\partial \psi_{\cdot}^k} + \sum_{Pk}^K \psi_{\cdot}^P\right), \quad (12)$$

$$\text{gdzie: } \sum_{qK}^k = \frac{d\bar{e}_k}{d\psi^q} \bar{e}^J (\alpha_{\cdot}^J)^R, \quad \sum_{Pk}^K = \frac{d\bar{e}_k}{d\Xi^P} \bar{e}^J (\alpha_{\cdot}^J)^R.$$

Jeżeli teraz

$$\psi_{\cdot}^k \Big|_K \Xi_{\cdot}^k \Big|_k = \delta_k^k = 1 \quad (13)$$

to wówczas będzie można skorzystać z opisu przestrzennego takiego, w którym całki powierzchniowe są zamienione na objętościowe. Z racji niesymetryczności drugich przyrostów kowariantnych (wszak zakłada się, że obiekt krzywizny jest istotnie niezerowym), nie jest możliwe podanie równań ruchu w postaci przestrzennej takiej jak to podaje praca [2]. Tensor t_{kl} nie jest tensorem naprężeń Cauchy'ego.

Podstawiając do wyjściowej postaci wariacji funkcjonału działania, wariację zmiennej zależnej $\delta_0 \psi_{\cdot}^k$ przy $\delta \Xi_{\cdot}^k \neq 0$, po zgrupowaniu wyrazów względem parametrów i ich kombinacji, otrzymuje się silne całkowe prawa zachowania. Z istnienia silnych praw zachowania wynika znikanie całek używanych w warunkach niezmienniczości. Funkcje \mathcal{L}^1 i \mathcal{L}^2 , opisujące własności ośrodka, nie zależą od przesunięć i obrotów w czasie i przestrzeni. Będą one zależeć od obiektów geometrycznych $\mathfrak{A}_{\cdot\cdot}^{\cdot\cdot}$. Można je przedstawić jako wyrażenia

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1 \left(\Xi_{\cdot}^k, t, \psi_{\cdot}^k, \psi_{\cdot}^k \Big|_K, D\psi_{\cdot}^k \right) &= \\ &= \mathcal{L}^1 \left(\Xi_{\cdot}^k + \delta \Xi_{\cdot}^k, t + \delta t, \psi_{\cdot}^k + \delta \psi_{\cdot}^k, \psi_{\cdot}^k \Big|_K + \delta \psi_{\cdot}^k \Big|_K, D\psi_{\cdot}^k + \delta D\psi_{\cdot}^k \right), \\ \mathcal{L}^2 \left(\Xi_{\cdot}^k, t, \psi_{\cdot}^k, \psi_{\cdot}^k \Big|_K, D\psi_{\cdot}^k, \bar{\Xi}_{\cdot}^k, \bar{t}, \bar{\psi}_{\cdot}^k, \bar{\psi}_{\cdot}^k \Big|_K, D\bar{\psi}_{\cdot}^k \right) &= \\ &= \mathcal{L}^2 \left(\Xi_{\cdot}^k + \delta \Xi_{\cdot}^k, \bar{\Xi}_{\cdot}^k + \delta \bar{\Xi}_{\cdot}^k, t + \delta t, \bar{t} + \delta \bar{t}, \psi_{\cdot}^k + \delta \psi_{\cdot}^k, \bar{\psi}_{\cdot}^k + \delta \bar{\psi}_{\cdot}^k, \right. \\ &\quad \left. \psi_{\cdot}^k \Big|_K + \delta \psi_{\cdot}^k \Big|_K, \bar{\psi}_{\cdot}^k \Big|_K + \delta \bar{\psi}_{\cdot}^k \Big|_K, D\psi_{\cdot}^k + \delta D\psi_{\cdot}^k, D\bar{\psi}_{\cdot}^k + \delta D\bar{\psi}_{\cdot}^k \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Rozwijając te funkcje w szereg Taylora otrzymuje się zależności, których spełnienie powoduje, że zachodzą silne prawa zachowania [2]. Jednocześnie uzyskuje się w ten sposób ograniczenia nałożone na funkcje \mathcal{L}^1 i \mathcal{L}^2 .

Jeżeli następnie, przekształcenie Galileusza nie będzie zmieniać równań ruchu, to wówczas równania te w każdym inercjalnym układzie współrzędnych ξ_{\cdot}^k będą miały tę samą postać. Z zasady stacjonarności wynika, że również równania ruchu pozostaną te same dla funkcjonału działania W jak i dla funkcjonału wraz z jego przyrostem $W + \Delta W$.

Wreszcie po słabych i silnych całkowych prawach zachowania oraz warunkach niezmienniczości należałoby zapisać słabe całkowe prawa zachowania przestrzennie, gdyż dotychczasowy zapis miał charakter materialny. Jednak z racji niesymetryczności drugich przyrostów kowariantnych (wszak zakłada się, że obiekt krzywizny jest istotnie niezerowym), zapis taki jest niemożliwy.

Występujące w równaniach (11, cz.II) operatory sumacyjne w przypadku obiektów powierzchniowych mają postaci

$$\sum_{\Pi} (\cdot) \Delta \Pi = -(\cdot) \Big|_{\Phi} \Delta \xi_{\cdot}^{\Phi} \left(1 + (\cdot) \Big|_{\Psi} \Delta \xi_{\cdot}^{\Psi} \right) \left(1 + (\cdot) \Big|_{\Lambda} \Delta \xi_{\cdot}^{\Lambda} \right) (\cdot), \quad (15)$$

natomiast dla obiektów objętościowych będzie

$$\sum_{\Omega} (\cdot) \Delta \Omega = - \left(1 + (\cdot) \Big|_1 \Delta \xi_{\cdot}^1\right) \left(1 + (\cdot) \Big|_2 \Delta \xi_{\cdot}^2\right) \left(1 + (\cdot) \Big|_3 \Delta \xi_{\cdot}^3\right) (\cdot). \quad (16)$$

Operator sumacyjny dotyczący czasu nie ma innego znaczenia od podanego.

W nawiązaniu do zbiorów dyskretnych opisujących ośrodki sprężyste proste ($\mathcal{E}^2 = 0$) szczególne operatory sumacyjne mają postaci:

– dla naprężeń siłowych

$$\sum_{\Pi} : - (\cdot) \Big|_{\Phi} \Delta \xi_{\cdot}^{\Phi} \left(1 + (\cdot) \Big|_{\Psi} \Delta \xi_{\cdot}^{\Psi}\right) \left(1 + (\cdot) \Big|_{\Lambda} \Delta \xi_{\cdot}^{\Lambda}\right) q_{\cdot\Phi}^{\Sigma} \mathcal{A}_{\cdot\Phi}^{\Sigma} \doteq \sum_{\Pi} t_{k\cdot}^K, \quad (17)$$

– dla naprężeń momentowych

$$\sum_{\Pi} : - \left(1 + (\cdot) \Big|_{\Psi} \Delta \xi_{\cdot}^{\Psi}\right) \left(1 + (\cdot) \Big|_{\Lambda} \Delta \xi_{\cdot}^{\Lambda}\right) \left[m_{\cdot\Phi}^{\Sigma} \Big|_{\Phi} \mathcal{A}_{\cdot\Phi}^{\Sigma} + \right. \quad (18) \\ \left. + \epsilon_{\Phi\alpha\gamma} \left(q_{\cdot\Phi}^{\alpha} \Big|_{\Phi} \bar{\epsilon}_{\alpha} \bar{\mathfrak{z}}_{\cdot}^{\Sigma} (-) + q_{\cdot\Phi}^{\alpha} \bar{\epsilon}_{\alpha} \bar{\mathfrak{z}}_{\cdot}^{\Sigma} (-) \Big|_{\Phi} \right) \right] \doteq \sum_{\Pi} t_{k\cdot}^K \psi_k,$$

– dla wymuszeń siłowych

$$\sum_{\Omega} : \left(1 + (\cdot) \Big|_1 \Delta \xi_{\cdot}^1\right) \left(1 + (\cdot) \Big|_2 \Delta \xi_{\cdot}^2\right) \left(1 + (\cdot) \Big|_3 \Delta \xi_{\cdot}^3\right) \mathcal{P}_{\cdot}^{\Sigma} \mathcal{A}_{\cdot}^{\Sigma} \doteq \sum_{\Omega} P, \quad (19)$$

– dla wymuszeń momentowych

$$\sum_{\Omega} : \left(1 + (\cdot) \Big|_1 \Delta \xi_{\cdot}^1\right) \left(1 + (\cdot) \Big|_2 \Delta \xi_{\cdot}^2\right) \left(1 + (\cdot) \Big|_3 \Delta \xi_{\cdot}^3\right) \mathcal{L}_{\cdot}^{\Sigma} \mathcal{A}_{\cdot}^{\Sigma} \doteq \sum_{\Omega} L. \quad (20)$$

Literatura

1. MARCINIAK A.: *Wstępny opis roślinnego ośrodka siatkowego – żdźbłowego*. Rozprawa habilitacyjna, Lublin 1995.
2. WOŹNIAK C.: *Ośrodki ciągłe z mikrostrukturą. Metody Geometryczne w Fizyce i Technice*. PWN, Warszawa 1968.
3. WOŹNIAK C.: *Podstawy dynamiki ciał odkształcalnych*. PWN, Warszawa 1969.
4. WOŹNIAK C.: *Wstęp do mechaniki analitycznej kontinuum materialnego. Dynamika układów sprężystych*. Ossolineum, Wrocław 1976.

Streszczenie

W tej części przedstawiono jak będzie wyglądać liniowa teoria ośrodka. Taki ośrodek z quasi-prostego staje się prostym. Jeszcze dalszym uproszczeniem jest założenie, że $\delta \Xi_{\cdot}^K = 0$. Wynik ten mówi, że liczba „cząstek” nie ulega zmianie oraz, że struktura ciała jest stała w trakcie ruchu. Może to również oznaczać brak oddziaływania pól zewnętrznych.

Warunki niezmienniczości nakładają określone ograniczenia na funkcję \mathcal{E} ale także powodują, że spełnione są silne prawa zachowania.

Silne prawa zachowania, warunki niezmienniczości oraz przejście do opisu przestrzennego wymaga dalszych badań w przypadku ośrodka quasi-liniowego.

Operatory sumacyjne $\sum_{\Pi} (\cdot) \Delta \Pi$ i $\sum_{\Omega} (\cdot) \Delta \Omega$, a także dalsze związane z pozostałymi postaciami parametrów, łączą wyłożoną teorię z ruchem ośrodków siatkowych.

APROKSYMACJA MECHANIKI ŁANU MODELAMI BARDZIEJ ZŁOŻONYCH OŚRODKÓW

Cz. I. Wprowadzenie, dodatkowe stopnie swobody

Andrzej L. Marciniak, Andrzej Fijolek
Katedra Maszyn i Urządzeń Rolniczych WTR, Akademia Rolnicza, Lublin
Jerzy Podgórski, Piotr Siczka
Wydział Inżynierii Budowlanej i Sanitarnej, Politechnika Lubelska, Lublin

Synopsis: Dalszym, poza opisem ciała jako quasi-prostego, jest ośrodek wieloskładnikowy oraz z dodatkowymi stopniami swobody.

Słowa kluczowe: Ciała sprężyste w przestrzeniach nieeuklidesowych, ciała z dodatkowymi stopniami swobody.

Opis ośrodków bardziej złożonych niż prosty można dokonać w oparciu o prace [1 ÷ 16]. Poniżej przedstawiono bardzo skrótowy opis takich modeli uszeregowanych w kolejności wskazującej na możliwość uszczegółowienia opisu. Ponadto bardziej kompletny opis powinien zawierać poza przedstawionymi elementami również odniesienie do: ciał nieprostych, pól zewnętrznych, termodynamiki oraz dyssypacji ośrodka a także plastyczności.

Każdy ośrodek materialny występujący w rolnictwie może być aproksymowany jednym z ciał teoretycznych o charakterze złożonym. Najogólniej można powiedzieć, że będą to ośrodki termodynamiczne i niesprężyste. Będą to zatem ośrodki nielokalne, w których część \mathcal{L}^2 funkcji materiałowej nie jest zerem a ponadto może zależeć z definicji od wyższych pochodnych. Złożoność ośrodków wynikać będzie z jego strukturalności a także wieloskładnikowości oraz obecności dodatkowych stopni swobody. Stopnie swobody mogą się przejawiać wektorami kierunkowymi – ciała zorientowane - oraz tensorami różnowalencyjnymi – ciała wielobiegunowe.

Część objętości zajmowanej przez łan jest przez zespoły robocze maszyny zbierającej wydzielana z całości a następnie przetwarzana. Należy przyjąć, że komponenty owego ośrodka wykonują ruch względny w stosunku do całości i siebie. Taki ośrodek, w którym da się opisać poszczególne składowe $(\cdot)_\alpha$ będzie ciałem o strukturze dyskretno-ciągłej.

Można tutaj zapisać: współrzędne dla całości $\xi_\alpha^k = \xi_\alpha^k(\Xi_\alpha^k, t)$, współrzędne dla komponentu $\alpha - \xi_{(\alpha)}^k = \chi_{(\alpha)}^k(\tilde{y}_\alpha^A, t)$. Poszczególne komponenty są w porównaniu do stanu naturalnego dość gęsto upakowane co w opisie jest ważne, gdyż obok funkcji materiałowych $\mathcal{L}_{(\alpha)}$ pojawią się funkcje $\mathcal{L}_{(\alpha\beta)}$, opisujące wzajemne oddziaływania. Dla pewnych ośrodków można przyjąć, że kształty poszczególnych elementów w sensie geometrii całkowitej nie wiele się różnią od siebie. Ponadto również nie wiele w tymże sensie będą się różniły położenia. Wówczas każdej cząstce Ξ ośrodka \mathfrak{B} będzie można przyporządkować element $\mathfrak{R}_{(\Xi)}$ i współrzędną α zapisać jako

$$\chi_{(\alpha)}^k(\tilde{y}^A, t) \rightarrow \chi_{(\alpha)}^k(\tilde{y}_\alpha^A, t, \Xi_\alpha^k). \quad (1)$$

Wartości funkcji χ_*^k są miejscami w przestrzeni odniesienia \mathcal{P}_x zajmowanymi w chwili t przez punkt o mikrowspółrzędnych x_*^A elementu $\mathcal{R}_{(\Xi)}$ przyporządkowanego cząstce $\Xi \in \mathcal{B}$ o współrzędnych Ξ_*^K . Będzie więc to ośrodek o strukturze lokalnej. Struktury globalne obejmują cały ośrodek. Mogą być nimi elementy, z których każdy jeden wypełnia sam całą przestrzeń. A więc mogą to być np. nici ułożone równolegle.

W ciałach niesprężystych nie można pominąć powierzchniowych sił dyssypatywnych. Ciało niesprężyste jako ciało termodynamiczne nie wykazuje zasadniczych analogii do nielokalnych ciał tj. takich, dla których $\mathcal{E}^2 \neq 0$ [14]. W ciałach termosprężystych, które będą ewentualnie użyte w opisie ośrodka siatkowego muszą być uwzględnione źródła ciepła, jako efekt działania sił tarcia. Siły dyssypatywne traktuje się jako pojęcie pierwotne (tak jak siły objętościowe).

Model ciała sprężystego prostego jest niewystarczającym dla opisu takiego ośrodka jakim jest łań. Wprowadzenie jednak do opisu ośrodka już choćby modelu ciała sprężystego nieprostego powoduje, że nawet wstępne rozważania wykraczają poza mechanikę klasyczną. Wiąże się to np. z zupełnie odmienną od przyjętej powszechnie interpretacją pojęć masy i przyspieszenia.

Tylko dla ciał prostych sprężystych tensor naprężeń powierzchniowych t_{k*}^K oraz siła $t_{k*}^{(N)} \doteq t_{k*}^K N_k$, gdzie: N_k – wektor normalny, zależą od pierwszych gradientów funkcji $\psi_*^k(\Xi_*^K, t)$ a naprężenia wewnętrzne będą się znosić. Zakłada się, że $\delta \Xi_*^K = 0$.

Ciała bez „pamięci” tj. nielocalne w przestrzeni ale lokalne w czasie wydają się być dobrą aproksymacją pewnych sytuacji napotykanych w opisie ośrodka roślinnego. Często bowiem nie można własności wyróżnionych części ciała określić bez odwoływania się do pozostałych.

Dla ciał bez „pamięci” i bez „efektu skali” tj. dla przypadku, gdy funkcja $\mathcal{E}^2 = 0$ zachodzić będą zależności

$$\mathcal{E}^2 = 0, \quad \mathcal{E}^1 = \mathcal{E} = \frac{1}{2} P(\Xi_*^K) D\psi_k D\psi_*^k + C^K \psi_k|_K D\psi_*^k - \tilde{\mathcal{E}}(\Xi_*^L, \psi_*^k|_L \psi_k|_N). \quad (2)$$

Ponieważ równania mechaniki muszą być odwracalne względem czasu, tzn. dla przekształcenia $t \rightarrow -t$ funkcja \mathcal{E}^1 nie może zmieniać znaku więc należy wprowadzić wielkość

$$C^K = \epsilon_{(Z)} \bar{C}^K, \quad (3)$$

gdzie: \bar{C}^K – dowolna stała,

$\epsilon_{(Z)}$ – alternator znaku gwarantujący zachowanie znaku funkcji \mathcal{E}^1 .

Wprowadzenie alternatora $\epsilon_{(Z)}$ wynika z faktu, że w przestrzeni łań \mathcal{P}_x droga całkowania wpływa na wartość całki. Natomiast w przestrzeni euklidesowej wyrażenie $C^K \psi_k|_K D\psi_*^k$ będzie zerem.

Wprowadzić tutaj można następujące zależności:

- dla gęstości pędu

$$m_k = \mathcal{E}^1|_D = P(\Xi_*^K) D\psi_k + \epsilon_{(Z)} \bar{C}^K \psi_k|_K, \quad (4)$$

gdzie: $P(\Xi_{\bullet}^k)$ jest gęstością masy odniesioną do jednostki objętości Ω ,
 - dla składowych tensora Pioli - Kirchhoffa

$$t_{k_{\bullet}}^k = -\mathcal{L}^1|_{k|K} = -\epsilon_{(z)} \bar{C}^K D \psi_{\bullet}^K + \bar{\epsilon}^1|_{k|K}. \quad (5)$$

Uwzględnienie w opisie $\delta \Xi_{\bullet}^k, \delta \psi_{\bullet}^k, \delta W$ wyższych przyrostów kowariantnych powoduje, że ośrodki owe stają się nieprostymi. Jeżeli natomiast funkcja $\mathcal{L}^2 \neq 0$, to ośrodek taki staje się nielokalnym. Efektem nielokalności jest: brak praw zachowania przedstawianych w ich lokalnej postaci, brak możliwości rozdzielenia energii na kinetyczną i wewnętrzną.

W pracy WOŹNIAKA [14] podano przykłady ciał nieprostych zajmujących pozycję pośrednią pomiędzy lokalnymi ciałami prostymi będącymi synonimami ciał sprężystych a ciałami prostymi nielokalnymi. Ciała te charakteryzują się tym, że funkcja \mathcal{L}^1 jest taka sama jak w przypadku ciał prostych, natomiast funkcja \mathcal{L}^2 zależy od wyższych pochodnych. Jest to ciało sprężyste nieproste, które może być traktowane jako niesprężyste ciało proste. Niesprężyste ciała nieproste pojawiają się wówczas, gdy funkcja materiałowa \mathcal{L}^1 będzie zależała od wyższych pochodnych.

Jak to pokazano w przypadku ciała „quasi prostego” wykorzystanie członów nieliniowych w rozwinięciu funkcji $\Xi_{\bullet}^k, \psi_{\bullet}^k$ i W powoduje, że nie będzie już tylko trzech obiektów geometrycznych odpowiadającym naprężeniom siłowemu, momentowemu i energii ale więcej. Tzn. siedmio parametrowa grupa przekształceń ruchu nie będzie sprowadzała równań do $\epsilon^k, \epsilon^{kl} = -\epsilon^{lk}$ oraz ϵ ale uwzględniała potęgi i iloczyny tych parametrów [8]. Ilość parametrów ruchu wyniesie zatem $M = 61$ (dla uwzględnienia tylko pierwszych wyrazów nieliniowych w wariacjach $\delta \Xi^K$ i $\delta_o \psi_{\bullet}^k$ oraz odrzucenie członu nieliniowego ${}^2\delta_{\psi} W$ a także nieliniowości przy wyprowadzaniu $\delta_{\Xi} W$, tj.

$$\delta_{\Xi} W^1 = \sum_{T+\Delta T} \sum_{\Omega'+\Delta\Omega'} \mathcal{L}^1 \Delta\Omega' \Delta t - \sum_T \sum_{\Omega'} \mathcal{L}^1 \Delta\Omega' \Delta t, \quad (6)$$

$$\delta_{\Xi} W^2 = \sum_{T+\Delta T} \sum_{\Omega'+\Delta\Omega'} \sum_{T+\Delta T} \sum_{\Omega'+\Delta\Omega'} \mathcal{L}^2 \Delta\bar{\Omega}' \Delta\bar{t} \Delta\Omega \Delta t - \sum_T \sum_{\Omega} \sum_T \sum_{\Omega} \mathcal{L}^2 \Delta\bar{\Omega}' \Delta\bar{t} \Delta\Omega' \Delta t,$$

gdzie pominięto sumy drugich przyrostów, tj. $\sum_{T+\Delta t} \sum_{\Omega+\Delta\Omega} (\cdot) \Delta(\Delta t) \Delta(\Delta\Omega)$.

Ponieważ obiekty geometryczne ruchu będą niesymetryczne a więc dla trójwymiarowej przestrzeni ruchu będzie $3^2 = 9$ niewiadomych. Zatem przy trzech zależnościach (z racji wymiaru przestrzeni), które można wyprowadzić, jedno równanie ruchu będzie 6 razy niewyznaczalne. Ostatecznie zaś przy $M = 61$ równaniach ruchu problem ten będzie wymagał zbudowania $6 \cdot 61 = 366$ warunków zgodności geometrycznej. Skorzystanie w tym miejscu z zależności konstytutywnych staje się problematyczne, gdyż takowe w przypadku ośrodków roślinnych nie są znane a używane proste zależności reologiczne nie mają uzasadnienia.

Przedstawione w pracy WOŹNIAKA [14] ciała zależne od wyższych pochodnych powstały poprzez różniczkowanie wariacji zmiennych zależnych $\delta_o \psi_\alpha^k$, natomiast nie są one tworzone na zasadzie uwzględniania wyższych wyrazów. Należałoby podać interpretacje wyrazów zawierających wyższe pochodne w obydwu omawianych przypadkach. W pracy [14] podano je jako pojęcia quasi-pierwotne.

Ogólnie można powiedzieć, że istnieją dwa typy ciał nieprostych. Te, w których funkcja materiałowa \mathcal{L} zależy od pochodnych zmiennych dynamicznych względem czasu tj. $D\psi_\alpha^k$ oraz ciała różniczkowe, w których \mathcal{L} zależy od $\psi_\alpha^k|_K$.

Jeżeli nie będzie uwzględniać się nieliniowych części wariacji, to w przypadku ciał nieprostych, a więc uzyskanych przez różniczkowanie bezpośrednie $\delta_o \psi_\alpha^k$, uzyskuje się trzy słabe całkowite prawa zachowania.

Nową jakością byłoby powiązanie obydwu rodzajów ciał nieprostych.

Zgodnie z teorią wyłożoną w pracy [14] należy przyjąć funkcje $S_{kl}^\alpha(\psi_\alpha^\beta)$ i $S_k^\alpha(\psi_\alpha^\beta)$. Jeżeli funkcja S_{kl}^α jest jednorodną i liniową względem zmiennych dynamicznych a funkcja S_k^α jest stałą, to wówczas będzie zachodziła zależność

$$\psi_\alpha^k(\Xi_\alpha^k, t) \rightarrow \tilde{\psi}_\alpha^k(\Xi_\alpha^k, t) = \psi_\alpha^k(\Xi_\alpha^k, t) + \varepsilon^{kl} S_{kl}^{\alpha\beta} \psi_\beta^\alpha(\Xi_\alpha^k, t) + \varepsilon^k S_k^\alpha, \quad (7)$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, m.$$

Przekształcenie (7) wynika ze związku $\xi_\alpha^{k'} = (\delta_t^k + \varepsilon_{ot}^k) \xi_\alpha^k + \varepsilon_\alpha^k$, który nie jest uzależniony od warunku infitezymalności przyrostów parametrów ε_α^k . Stałe $S_{kl}^{\alpha\beta}, S_k^\alpha$ charakteryzują wielkości transformacyjne zmiennych dynamicznych $\psi_\alpha^k(\Xi_\alpha^k, t)$ przy przemieszczeniach i obrotach przestrzeni odniesienia. Stałe te należy powiązać z uprzednio przedstawionymi obiektami geometrycznymi $\mathfrak{M}_\alpha^{\dots}$ opisującymi strukturę roślin i łąnu. Teraz przekształcenia i wariacje związane z zależnością (7) przyjmują postaci:

$$\xi_\alpha^k \rightarrow \xi_\alpha^k + \varepsilon^{kl} \xi_\alpha^l + \varepsilon^k, \quad t \rightarrow t + \delta t, \quad \Xi_\alpha^k \rightarrow \Xi_\alpha^k + \delta \Xi_\alpha^k,$$

$$\delta \Xi_\alpha^k = \tilde{\Xi}_\alpha^k - \Xi_\alpha^k = \tilde{\Xi}_\alpha^k|_{\varepsilon^\alpha} \varepsilon^\alpha + \frac{1}{2} \left[(\cdot)|_{\varepsilon^\alpha} \varepsilon^\alpha \right]^2 \tilde{\Xi}_\alpha^k, \quad (8)$$

$$\delta t = \varepsilon,$$

$$\delta \psi_\alpha^\alpha = \delta_o \psi_\alpha^\alpha + \psi_\alpha^\alpha|_B \delta \Xi_\alpha^\beta + \delta_o \psi_\alpha^\alpha|_B \delta \Xi_\alpha^\beta + \frac{1}{2} \psi_\alpha^\alpha|_{B^2} (\delta \Xi_\alpha^\beta)^2 + \frac{1}{2} \delta_o \psi_\alpha^\alpha|_{B^2} (\delta \Xi_\alpha^\beta)^2 =$$

$$= \varepsilon^{kl} S_{kl}^{\alpha\beta} \psi_\beta^\alpha + \varepsilon^k S_k^\alpha,$$

$$\delta_o \psi_\alpha^\alpha = \varepsilon^k S_k^\alpha + \varepsilon^{kl} S_{kl}^{\alpha\beta} \psi_\beta^\alpha - \varepsilon D \psi_\alpha^\alpha.$$

Wariacja $\delta \Xi_\alpha^k$ mówi o jej bezpośrednich powiązaniach z obiektami geometrycznymi opisującymi przemieszczenia liniowe i kątowe w przestrzeni oraz w czasie.

Dodatkowe stopnie swobody można również interpretować jako współdziałanie ośrodka z polami zewnętrznymi.

Funkcje materiałowe będzie można zapisać

$$\mathcal{L}^1(\Xi_{\bullet}^K; t; \Psi_{\bullet}^{\alpha}; \Psi_{\bullet}^{\alpha}|_K; D\Psi_{\bullet}^{\alpha}) \rightarrow \mathcal{L}^1(\Xi_{\bullet}^K + \delta\Xi_{\bullet}^K; t + \varepsilon; \Psi_{\bullet}^{\alpha} + \varepsilon^k S_k^{\alpha} + \varepsilon^{kl} S_{kl}^{\alpha\beta} \Psi_{\beta}; \Psi_{\bullet}^{\alpha}|_K + \varepsilon^{kl} S_{kl}^{\alpha\beta} \Psi_{\beta}|_K; D\Psi_{\bullet}^{\alpha} + \varepsilon^{kl} S_{kl}^{\alpha\beta} D\Psi_{\beta}) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^2(\Xi_{\bullet}^K; t; \bar{\Xi}_{\bullet}^K; \bar{t}; \Psi_{\bullet}^{\alpha}; \bar{\Psi}_{\bullet}^{\alpha}; \Psi_{\bullet}^{\alpha}|_K; \bar{\Psi}_{\bullet}^{\alpha}|_K; D\Psi_{\bullet}^{\alpha}; D\bar{\Psi}_{\bullet}^{\alpha}) \rightarrow \\ & \rightarrow \mathcal{L}^2(\Xi_{\bullet}^K + \delta\Xi_{\bullet}^K; t + \varepsilon; \bar{\Xi}_{\bullet}^K + \delta\bar{\Xi}_{\bullet}^K; \bar{t} + \varepsilon; \Psi_{\bullet}^{\alpha} + \varepsilon^k S_k^{\alpha} + \varepsilon^{kl} S_{kl}^{\alpha\beta} \Psi_{\beta}; \\ & \bar{\Psi}_{\bullet}^{\alpha} + \varepsilon^k S_k^{\alpha} + \varepsilon^{kl} S_{kl}^{\alpha\beta} \bar{\Psi}_{\beta}; \Psi_{\bullet}^{\alpha}|_K + \varepsilon^{kl} S_{kl}^{\alpha\beta} \Psi_{\beta}|_K; \bar{\Psi}_{\bullet}^{\alpha}|_K + \varepsilon^{kl} S_{kl}^{\alpha\beta} \bar{\Psi}_{\beta}|_K; \\ & D\Psi_{\bullet}^{\alpha} + \varepsilon^{kl} S_{kl}^{\alpha\beta} D\Psi_{\beta}; D\bar{\Psi}_{\bullet}^{\alpha} + \varepsilon^{kl} S_{kl}^{\alpha\beta} D\bar{\Psi}_{\beta}) \end{aligned}$$

Przedstawione zależności będą miały wpływ na postać praw zachowania oraz warunków ograniczających postać funkcji materiałowej.

Wielkości $S_{kl}^{\alpha\beta}$ i S_k^{α} należałoby zastąpić funkcjami mającymi bezpośrednio powiązanie ze strukturą χ tj. współrzędne Ψ_{\bullet}^{α} przedstawić jako

$$\Psi_{\bullet}^{\alpha}(\Xi_{\bullet}^K, t) \rightarrow \tilde{\Psi}_{\bullet}^{\alpha}(\Xi_{\bullet}^K, t) = \Psi_{\bullet}^{\alpha}(\Xi_{\bullet}^K, t) + \varepsilon^{kl} \chi_{kl}^{\alpha\beta} \Psi_{\beta}(\Xi_{\bullet}^K, t) + \varepsilon^k \chi_k^{\alpha}, \quad (10)$$

gdzie: $\chi_k^{\alpha} = const$, $\chi_{kl}^{\alpha\beta} = const$ i nie zależą od ε^k oraz ε^{kl} .

Pamiętając, że funkcje struktury $\chi_{kl}^{\alpha\beta}$ i χ_k^{α} znajdują się zawsze przy stałych $\varepsilon_{\bullet\bullet}^{kl}$ i ε_{\bullet}^k otrzymuje się również 61 równań [8]. Dla opisu ośrodka roślinnego właściwszymi jednak wydaje się być przekształcenie

$$\Psi_{\bullet}^{\alpha}(\Xi_{\bullet}^K, t) \rightarrow \tilde{\Psi}_{\bullet}^{\alpha}(\Xi_{\bullet}^K, t) = \Psi_{\bullet}^{\alpha}(\Xi_{\bullet}^K, t) + \varepsilon^{kl} (\Psi_{\bullet}^{\beta}) S_{kl}^{\alpha} + \varepsilon^k (\Psi_{\bullet}^{\beta}), \quad (11)$$

które wskazują na zależność $\varepsilon^{kl}, \varepsilon^k, S_{kl}^{\alpha}$ od współrzędnych Eulera Ψ_{\bullet}^{β} .

Prawa zachowania można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} & \sum_{\tau} \sum_{\Omega} \chi_k^{\alpha} \left\{ t_{\alpha\bullet}^k \left(1 - \Psi_{\bullet}^{\alpha} \right)_K \left(\Xi_{\bullet}^K \right)_{c^t} - \mathcal{L} \Xi_{\bullet}^K \right|_{c^t} \left(\left[\Psi_{\bullet}^{\alpha} \right]_K \left(\Xi_{\bullet}^K \right)_{c^t} \right) \right\}_K + \left(\mathcal{L} \Xi_{\bullet}^K \right)_{c^t} \Big|_K + \\ & + P_{\alpha} \left(1 - \Psi_{\bullet}^{\alpha} \right)_K \left(\Xi_{\bullet}^K \right)_{c^t} - D m_{\alpha} \left(1 - \Psi_{\bullet}^{\alpha} \right)_K \left(\Xi_{\bullet}^K \right)_{c^t} + m_{\alpha} D \left(\Psi_{\bullet}^{\alpha} \right)_K \left(\Xi_{\bullet}^K \right)_{c^t} \Big\} \Delta \Omega \Delta t = 0, \\ & \sum_{\tau} \sum_{\Omega} \chi_{kl}^{\alpha\beta} \left\{ t_{\alpha\bullet}^k \left(\Psi_{\beta} - \Psi_{\bullet}^{\alpha} \right)_K \left(\Xi_{\bullet}^K \right)_{c^u} - \mathcal{L} \Xi_{\bullet}^K \right|_{c^u} \left(\Psi_{\beta} - \Psi_{\bullet}^{\alpha} \right)_K \left(\Xi_{\bullet}^K \right)_{c^u} - \mathcal{L} \Xi_{\bullet}^K \right|_{c^u} \Big\}_K + \\ & + P_{\alpha} \left(\Psi_{\beta} - \Psi_{\bullet}^{\alpha} \right)_K \left(\Xi_{\bullet}^K \right)_{c^{u1}} - D m_{\alpha} \left(\Psi_{\beta} - \Psi_{\bullet}^{\alpha} \right)_K \left(\Xi_{\bullet}^K \right)_{c^{u1}} - \\ & - m_{\alpha} D \left(\Psi_{\beta} - \Psi_{\bullet}^{\alpha} \right)_K \left(\Xi_{\bullet}^K \right)_{c^{u1}} \Big\} \Delta \Omega \Delta t = 0, \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\tau} \sum_{\Omega} \left\{ \chi_{\alpha\bullet}^k \left(D \Psi_{\bullet}^{\alpha} + \Psi_{\bullet}^{\alpha} \right)_K D^{\circ} \Xi_{\bullet}^K + \mathcal{L} D^{\circ} \Xi_{\bullet}^K \right\}_K + t_{\alpha\bullet}^k \left(D \Psi_{\bullet}^{\alpha} + \Psi_{\bullet}^{\alpha} \right)_K D^{\circ} \Xi_{\bullet}^K + \mathcal{L} D^{\circ} \Xi_{\bullet}^K \Big\}_K + \\ & + P_{\alpha} \left(D \Psi_{\bullet}^{\alpha} + \Psi_{\bullet}^{\alpha} \right)_K D^{\circ} \Xi_{\bullet}^K - D m_{\alpha} \left(D \Psi_{\bullet}^{\alpha} + \Psi_{\bullet}^{\alpha} \right)_K D^{\circ} \Xi_{\bullet}^K - \\ & - m_{\alpha} D \left(D \Psi_{\bullet}^{\alpha} + \Psi_{\bullet}^{\alpha} \right)_K D^{\circ} \Xi_{\bullet}^K + D \mathcal{L} \Big\} \Delta \Omega \Delta t = 0. \end{aligned}$$

Dodatkowymi stopniami swobody mogą być np. gradienty pól skalarnych takich jak wilgotność i jej odpowiednik temperatura a także ogólnie rozumiane pola biologiczne oraz entropia.

Literatura

1. ACHENBACH J.D.: *Generalized continuum theories for directionally reinforced solids*. Archives of Mechanics, 28, 3, 1976.
2. BYTNER S., GAMBIN B.: *Homogenization of Cosserat continuum*. Archives of Mechanics, 38, 3, 1986.
3. CHRISTENSEN R.M.: *Mechanics of Composite Materials*. J. Wiley & Sons. Przekł. ros. Mir, Moskwa 1982.
4. EIMER C.: *The viscoelasticity of multi-phase media*. Archives of Mechanics, 23, 1, 1971.
5. GAIROLA B.K.D.: *The nonlocal theory of elasticity and its application to interaction of point defect*. Archives of Mechanics, 28, 3, 1976.
6. KRÖNER E.: *Ordered versus disordered materials: consequences for the continuum model*. Archives of Mechanics, 28, 3, 1976.
7. LUDWIG W.: *Invariance conditions in the transmission from discrete lattice models to the continuum limit*. Archives of Mechanics, 28, 3, 1976.
8. MARCINIAK A.: *Wstępny opis roślinnego ośrodka siatkowego – żdźbłowego*. Rozprawa habilitacyjna, Lublin 1995.
9. PERZYNA P.: *Teoria lepkoplastyczności*. PWN, Warszawa 1966.
10. PROVAN J.W.: *Deformation of arbitrarily oriented media*. Archives of Mechanics, 23, 3, 1971.
11. RIVLIN R.S.: *The passage from a particle system to a continuum model*. Archives of Mechanics, 28, 3, 1976.
12. TKACZENKO A.I.: *O kinematyce uprugowo obiektu*. Prikladnaja Mechanika, t. IV, w. 10, 1968.
13. TRUESDELL C.: *Sześć wykładów nowoczesnej filozofii przyrody*. PWN, Warszawa 1969.
14. WOŹNIAK C.: *Podstawy dynamiki ciał odkształcalnych*. PWN, Warszawa 1969.
15. WOŹNIAK C.: *Podstawy mechaniki ciał dyskretyzowanych*. Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 11, 1973.
16. WOŹNIAK C., KLEIBER M.: *Nieliniowa mechanika konstrukcji*. PWN, Warszawa 1982.

Streszczenie

Dla ośrodków, w których funkcje $\mathfrak{L}^2 = 0$, $\mathfrak{L}^1 = \mathfrak{L}$, zachodzi w przestrzeniach nieeuklidesowych konieczność wprowadzenia alternatora $\in_{(z)}$ gwarantującego zachowanie znaku funkcji \mathfrak{L}^1 .

Dalszą kwestią uszczegółowiającą opis ośrodka jest wprowadzenie dodatkowych stopni swobody. Ilość praw zachowania będzie zależna od wprowadzonych uproszczeń. Dla warunków przyjętych przy opisie ośrodków quasi-prostych będzie 61 zależności.

APROKSYMACJA MECHANIKI ŁANU MODELAMI BARDZIEJ ZŁOŻONYCH OŚRODKÓW

Cz. II. Ośrodek wieloskładnikowy, ośrodek strukturalny

Andrzej L. Marciniak, Andrzej Fijolek
Katedra Maszyn i Urządzeń Rolniczych WTR, Akademia Rolnicza, Lublin
Jerzy Podgórski, Piotr Sieczka
Wydział Inżynierii Budowlanej i Sanitarnej, Politechnika Lubelska, Lublin

Synopsis: Dalszą próbą opisów ośrodków jest wprowadzenie ciał wieloskładnikowych, zorientowanych lub wielobiegunowych. Następnie ciało o strukturze dyskretno-ciągłej, lokalnej i globalnej. Najwłaściwszym opisem wydaje się być ciało współdziałające z polami zewnętrznymi.

Słowa kluczowe: Ośrodek: wieloskładnikowy, zorientowany, wielobiegunowy. O strukturze dyskretno-ciągłej, lokalnej, globalnej. Pola zewnętrzne.

Mechanika tych ośrodków wymaga ich zhomogenizowania [1] co ogranicza możliwość wykorzystania tej teorii w opisie łań. Uwzględnienie dodatkowych stopni swobody pozwala traktować ośrodek jako jeden układ dynamiczny przy ograniczeniu się do przestrzeni $\Omega \times T$ a przy uwzględnieniu $\delta \Xi_o^K \neq 0$, do przestrzeni $(\Omega \times \Delta\Omega) \times (T \times \Delta T)$. Te dodatkowe stopnie swobody umożliwiają opisanie ruchów ogólnych innych niż ruch samego ciała traktowanego jako jednorodny (uwaga o zhomogenizowaniu). Tak więc każdej cząstce można przypisać pewien zbiór wielkości identyfikujących ją. Tymi wielkościami byłyby gęstość, lepkość, wymiary, kształty itp. Występujące tutaj funkcje struktury χ_k^α i $\chi_{kl}^{\alpha\beta}$ powinny być raczej zależnymi od współrzędnych. Jeżeli $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}$ tj. $\mathcal{L}^2 = 0$, to wówczas uzyskuje się ciało sprężyste proste z dodatkowymi stopniami swobody. Przekształcenie współrzędnych dane będzie zależnością (10 cz. I) lub (11 cz. I). Współrzędne Lagrange'a będzie można zapisać

$$\Xi_{\mathcal{A}} \in \mathcal{B}_{\mathcal{A}}, \quad \mathcal{A} = 1, 2, \dots, N, \quad \Xi_{\mathcal{A}(i)} \in \mathcal{B}_{\mathcal{A}(i)} \in \dots \in \mathcal{B}_{\mathcal{A}(M)} \quad (1)$$

gdzie: $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ – zadane rozmaitości różniczkowe.

Współrzędne Eulera

$$\xi_o^\alpha = \psi_{(\mathcal{A})o}^\alpha(\Xi_o^\mathcal{A}, t) \quad (2)$$

wskazują na miejsce zajmowane przez cząstkę $\Xi_{(\mathcal{A})}$ składnika (\mathcal{A}) w momencie t .

Zależność (10 cz. I) będzie teraz można zapisać

$$\begin{aligned} \psi_{(\mathcal{A})o}^\alpha(\Xi_o^\mathcal{A}, t) &\rightarrow \psi_{(\mathcal{A})o}^\alpha(\Xi_o^\mathcal{A}, t) + \varepsilon^{\gamma\delta} \psi_{(\mathcal{A})\delta}(\Xi_o^\mathcal{A}, t) \chi_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} + \varepsilon^\gamma \chi_\gamma^\alpha, \\ \psi_o^\alpha(\Xi_o^\mathcal{A}, t) &= \sum_{\mathcal{A}=1}^N (\delta_{\gamma+3\mathcal{A}-3}^\alpha) \psi_{(\mathcal{A})\gamma}(\Xi_o^\mathcal{A}, t), \quad M = 3N, \\ \chi_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} &= \sum_{\mathcal{A}=1}^N (\delta_{\gamma+3\mathcal{A}-3}^\alpha) (\delta_{\delta+3\mathcal{A}-3}^\beta), \quad \chi_\gamma^\alpha = \sum_{\mathcal{A}=1}^N (\delta_{\gamma+3\mathcal{A}-3}^\alpha), \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie: $\delta_{\gamma+3\mathcal{A}-3}^\alpha$ – δ – Kroneckera.

Tutaj współrzędne $\psi_{(\mathcal{A})\alpha}^{\alpha}(\Xi_{\alpha}^{\mathcal{A}}, t)$ są składowymi, które łączą cząstki o pewnej wspólnej cesze (\mathcal{A}). W ośrodku wieloskładnikowym posiadającym \mathcal{A} typów cząstek można wprowadzić funkcje

$$\begin{aligned}\chi_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} &= \sum_{\mathcal{A}=1}^N (\alpha_{\gamma+3\mathcal{A}-3}^{\alpha}) (\alpha_{\delta+3\mathcal{A}-3}^{\beta}) \\ \chi_{\gamma}^{\alpha} &= \sum_{\mathcal{A}=1}^N (\alpha_{\gamma+3\mathcal{A}-3}^{\alpha})\end{aligned}\quad (4)$$

Wprowadzenie wielkości $(\alpha_{\delta+3\mathcal{A}-3}^{\alpha})$ pozwoli zapisać szereg wielkości trudno definiowalnych a związanych ze składnikiem \mathcal{A} . Tak więc wielkości $\chi_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}$ i χ_{γ}^{α} charakteryzują własności transformacyjne zmiennych dynamicznych uwzględniających jednocześnie funkcje β^i . Należy tutaj wprowadzić następujące oznaczenia

$$t_{(\mathcal{A})k\alpha}^K \doteq -D\mathcal{E}|_{\psi_{(\mathcal{A})\alpha}^k}, \quad m_{(\mathcal{A})k} \doteq D\mathcal{E}|_{D\psi_{(\mathcal{A})\alpha}^k}. \quad (5)$$

Używając do zapisu operatora δ -Kroneckera będzie

$$t_{(\mathcal{A})k\alpha}^K = \delta_{\tau+3\mathcal{A}-3}^{\alpha} t_{\alpha\sigma}^K, \quad m_{(\mathcal{A})k} = \delta_{\tau+3\mathcal{A}-3}^{\alpha} m_{\alpha}. \quad (6)$$

Słabe całkowe prawa zachowania będą miały postać podobną do zależności uzyskanej dla ośrodka quasi-prostego. Będą one uwzględniać funkcję struktury. Każde z 61 równań wynikających ze słabych praw zachowania będzie sumą $\sum_{\mathcal{A}}(\cdot)$. Omawiany

model można rozszerzyć na ciała nieproste dowolnego rzędu ([2], s. 142).

Ciało wieloskładnikowe jest zorientowane, gdy każdy punkt materialny posiada określoną orientację zdefiniowaną przez bazę wektorów kierunkowych. Wektor orientujący ma postać

$$d_{(\mathcal{A})\alpha}^{\alpha} \doteq d_{(\mathcal{A})\alpha}^{\alpha}(\Xi_{\alpha}^{\mathcal{A}}, t, \mathfrak{M}_{\alpha}^{\alpha}) \quad \mathcal{A} = 1, 2, \dots, N. \quad (7)$$

Zaczepony jest on w miejscu ξ_{α}^{α} zajęty w chwili t przez punkt materialny o współrzędnych $\Xi_{\alpha}^{\mathcal{A}}$. Ponadto należy uwzględnić ruch względny dla $N-1$ składników.

Wektor definiujący ciało zorientowane zachodzi w zapis współrzędnej

$$\psi_{\alpha}^k = \delta_k^{\alpha} \psi_{\alpha}^k(\Xi_{\alpha}^{\mathcal{A}}, t) + \sum_{\mathcal{A}} \delta_{k+3\mathcal{A}}^{\alpha} d_{(\mathcal{A})\alpha}^k(\Xi_{\alpha}^{\mathcal{A}}, t) \quad (8)$$

Ograniczając się jedynie do liniowych wyrazów rozwinięcia będzie można zapisać

$$\begin{aligned}\psi_{\alpha}^k(\Xi_{\alpha}^{\mathcal{A}}, t) &\rightarrow \psi_{\alpha}^k(\Xi_{\alpha}^{\mathcal{A}}, t) + \varepsilon^{kl} \psi_{l\alpha}(\Xi_{\alpha}^{\mathcal{A}}, t) + \varepsilon^k, \\ d_{(\mathcal{A})\alpha}^k(\Xi_{\alpha}^{\mathcal{A}}, t) &\rightarrow d_{(\mathcal{A})\alpha}^k(\Xi_{\alpha}^{\mathcal{A}}, t) + \varepsilon^{kl} d_{(\mathcal{A})l}(\Xi_{\alpha}^{\mathcal{A}}, t)\end{aligned}\quad (9)$$

Z porównania powyższego przekształcenia zmiennych dynamicznych ciała zorientowanego z ogólnym przekształceniem

$$\xi^k \rightarrow \xi^k + \varepsilon^k + \varepsilon^{kl} \xi_l$$

wynika, że

$$S_{kl}^{\alpha\beta} = \delta_k^{\alpha} \delta_l^{\beta} + \sum_{\mathcal{A}} \delta_{k+3\mathcal{A}}^{\alpha} \delta_{l+3\mathcal{A}}^{\beta}, \quad S_k^{\alpha} = \delta_k^{\alpha}. \quad (10)$$

Wynika stąd, że w tak prostej interpretacji ośrodka, tj. gdy zadany jest wektor kierunkowy, funkcje struktury można przestawić w postaci funkcji δ -Kroneckera.

Zastępując wektor $d_{(a)}^k$ tensorem $\psi_{\alpha k_1 k_2 \dots k_n}^k(\Xi_{\alpha}^K, t)$ otrzymuje się ośrodek wielobiegunowy. Te dwa ośrodki tj. zorientowany wieloskładnikowy i wielobiegunowy zorientowany po zastosowaniu do nich odpowiedniego zabiegu homogenizacyjnego będzie z pewnością można wykorzystać w opisie łań. Prawa zachowania przyjmą teraz postać

$$\begin{aligned}
 & \left[\sum_{\Omega} m_k \left(1 - \psi_{\alpha}^k \Big|_K \Xi_{\alpha}^K \Big|_{c^t} \right) \Delta \Omega \right]_{t_0}^{t_1} = \\
 & = \sum_{\Gamma} \left(\sum_{\Pi} t_k \left(1 - \psi_{\alpha}^k \Big|_K \Xi_{\alpha}^K \Big|_{c^t} - \mathcal{L} \Xi_{\alpha}^K \Big|_{c^t} \right) \Delta \Pi - \sum_{\Omega} P_k \left(1 - \psi_{\alpha}^k \Big|_K \Xi_{\alpha}^K \Big|_{c^t} \right) \Delta \Omega \right) \Delta t, \\
 & \left\{ \sum_{\Omega} \left[m_{(a)k} \left(\psi_{i1} - \psi_{\alpha}^k \Big|_K \Xi_{\alpha}^K \Big|_{c^{uv1}} \right) + m_{(a)k} \left(d_{i1}^{(a)} - d_{\alpha}^k \Big|_K \Xi_{\alpha}^K \Big|_{c^{uv1}} \right) \right] \Delta \Omega \right\}_{t_0}^{t_1} = \\
 & = \sum_{\Gamma} \left(\sum_{\Pi} \left\{ t_k \left(\psi_{i1} - \psi_{\alpha}^k \Big|_K \Xi_{\alpha}^K \Big|_{c^{uv1}} - \mathcal{L} \Xi_{\alpha}^K \Big|_{c^{uv1}} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + t_{(a)k} \left(d_{i1}^{(a)} - d_{\alpha}^k \Big|_K \Xi_{\alpha}^K \Big|_{c^{uv1}} - \mathcal{L} \Xi_{\alpha}^K \Big|_{c^{uv1}} \right) \right\} \Delta \Pi + \\
 & \quad + \sum_{\Omega} \left(P_k \left(\psi_{i1} - \psi_{\alpha}^k \Big|_K \Xi_{\alpha}^K \Big|_{c^{uv1}} \right) + P_{(a)k} \left(d_{i1}^{(a)} - d_{\alpha}^k \Big|_K \Xi_{\alpha}^K \Big|_{c^{uv1}} \right) \right) \Delta \Omega \right) \Delta t, \\
 & \left[\sum_{\Omega} \left\{ m_k \left(D \psi_{\alpha}^k + \psi_{\alpha}^k \Big|_K D^{\circ} \Xi_{\alpha}^K \right) - \mathcal{L} + \left(m_{(a)k} D d_{\alpha}^{k(a)} + d_{\alpha}^k \Big|_K D^{\circ} \Xi_{\alpha}^K \right) \right\} \Delta \Omega \right]_{t_0}^{t_1} = \\
 & = \sum_{\Gamma} \left\{ \sum_{\Pi} \left[t_k \left(D \psi_{\alpha}^k + \psi_{\alpha}^k \Big|_K D^{\circ} \Xi_{\alpha}^K + \mathcal{L} D^{\circ} \Xi_{\alpha}^K \right) + t_{(a)k} \left(D d_{\alpha}^{k(a)} + d_{\alpha}^k \Big|_K D^{\circ} \Xi_{\alpha}^K + \mathcal{L} D^{\circ} \Xi_{\alpha}^K \right) \right] \Delta \Pi + \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{\Omega} \left[P_k \left(D \psi_{\alpha}^k - \psi_{\alpha}^k \Big|_K D^{\circ} \Xi_{\alpha}^K \right) + P_{(a)k} \left(D d_{\alpha}^{k(a)} + d_{\alpha}^k \Big|_K D^{\circ} \Xi_{\alpha}^K \right) \right] \Delta \Omega \right\} \Delta t.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Łączenie elementów ciała wieloskładnikowego i zorientowanego daje ciało wieloskładnikowe zorientowane o współrzędnych [2]

$$\psi_{\alpha}^{\alpha}(\Xi_{\alpha}^K, t) = \sum_{\alpha=1}^S \delta_{k+3\alpha-3}^{\alpha} \psi_{\alpha}^k(\Xi_{\alpha}^K, t) + \sum_{\alpha=5}^N \delta_{k+3\alpha}^{\alpha} d_{(a)}^k(\Xi_{\alpha}^K, t) \tag{12}$$

Tutaj

$$S_{ki}^{\alpha\beta} = \sum_{\alpha=1}^N \delta_{k+3\alpha-3}^{\alpha} \delta_{i+3\alpha-3}^{\beta}, \quad S_k^{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^S \delta_{k+3\alpha-3}^{\alpha}. \tag{13}$$

Siły objętościowe dane będą zależnościami

$$b_k = (\delta_{\alpha k}^{\alpha}) b_{\alpha}, \quad b_{(a)k} = (\delta_{\alpha k+3\alpha}^{\alpha}) b_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, 3N+3. \tag{14}$$

W równaniach momentów i energii wystąpią obok sił objętościowych również momenty objętościowe. Będzie zatem

$$b_{[k} \psi_{i]} = b'_{[k} \psi_{i]} + l_k, \quad b_k D \psi_{\alpha}^k = b'_k D \psi_{\alpha}^k + l_k D \varphi_{\alpha}^k = b'_k D \psi_{\alpha}^k + \epsilon_{ijk} D \psi_{\alpha}^k l_k, \tag{15}$$

gdzie: b'_k - siły masowe.

Wektory orientujące a także przypisywane punktom tensory różnych walencji są ściśle związane z więzami wewnętrznymi [3, 4].

W ogólnym przypadku więzy przyjmują postaci [2]

$$L_{(1)}[\psi_{\alpha}^{\alpha}] = L_{(2)}[\psi_{\alpha}^{\alpha}] = \dots = L_{(r)}[\psi_{\alpha}^{\alpha}] = 0, \quad r < M. \quad (16)$$

Zatem współrzędne ψ_{α}^{α} będą zmiennymi dynamicznymi z racji na Ξ_{α}^K i t oraz zależnymi z uwagi na występujące więzy, które mogą przyjąć dla ośrodka roślinnego szczególnie interesujące postaci

$$d_{(\alpha)}^k - \delta_{(\alpha)}^k \psi_{\alpha}^k \Big|_K = 0, \quad Dd_k^{(\alpha)} d_{(\alpha)} - D\psi_{k|l} \Big|_l = 0. \quad (17)$$

Więzy nie mogą wpływać na postać funkcji materiałowej \mathcal{L} oraz na postać słabych i silnych praw zachowania. Więzy natomiast będą wpływać na postać oraz ilość równań ruchu. Cechą ośrodka wieloskładnikowego jest między innymi to, że w danej makroobjętości wystąpi zbiór mikroelementów tak małych, że zjawiska zachodzące w tej objętości są ciągłe. Model ponadto dopuszcza wzajemną dyfuzję składników.

Wyróżnione elementy takiego ośrodka mogą jednak poruszać się inaczej niż np. wybrany fragment ośrodka jako całości. Ośrodek taki można przedstawić w postaci zbiorów [2]

$$\Xi_{\alpha}^K \in B, \quad \Xi_{(\alpha)}^A \in B_{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, M. \quad (18)$$

Zbiory te spełniają warunki:

1. Zbiór B , będący częścią ciągłą ośrodka, można odwzorować funkcją $\xi_{\alpha}^k = \psi_{\alpha}^k(\Xi_{\alpha}^K, t)$ na objętość $\Omega \in \mathcal{F}_{\Sigma}$ parametryzowaną przez makro-współrzędne Lagrange'a Ξ_{α}^K .
2. Zbiory $B_{(\alpha)}$ jako elementy ośrodka, można odwzorować funkcją $\zeta_{\alpha}^k = \kappa_{(\alpha)}^k(\xi_{\alpha}^A, t)$ na objętość $\omega \in \mathcal{F}_{\Sigma}$ parametryzowaną przez mikro-współrzędne Lagrange'a ξ_{α}^A .
3. Ośrodek B jest ciałem quasi-prostym.

Funkcje materiałowe przyjmują postaci

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1 &= \mathcal{L}^1(\Xi_{\alpha}^K, t, \psi_{\alpha}^k, \psi_{\alpha}^k \Big|_K, D\psi_{\alpha}^k) = \mathcal{L}^1(\cdot), \quad \mathcal{L}^2 = \mathcal{L}^2\left(\cdot, \bar{\cdot}\right) \\ \mathcal{L}_{(\alpha)}^1 &= \mathcal{L}_{(\alpha)}^1(\xi_{\alpha}^A, t, \kappa_{(\alpha)}^k, \kappa_{(\alpha)}^k \Big|_A, D\kappa_{(\alpha)}^k) = \mathcal{L}_{(\alpha)}^1[\cdot], \quad \mathcal{L}_{(\alpha)}^2 = \mathcal{L}_{(\alpha)}^2\left([\cdot], \bar{[\cdot]}\right) \\ \mathcal{L}_{(\alpha, \beta)} &= \mathcal{L}_{(\alpha, \beta)}(\cdot)_{\alpha}, (\cdot)_{\beta} \end{aligned} \quad (19)$$

Funkcje $\mathcal{L}_{(\alpha)}^1, \mathcal{L}_{(\alpha)}^2, \mathcal{L}_{(\alpha)}$ nie zależą od żadnej ze zmiennych dynamicznych $\kappa_{(\gamma)}^k, \gamma \neq \alpha$. Podobnie będzie dla funkcji $\mathcal{L}_{(\alpha, \beta)}$ z zaznaczeniem, że $\alpha \neq \beta$. Ponadto dla $\alpha = \beta$, $\mathcal{L}_{(\alpha, \beta)} = 0$ oraz $\mathcal{L}_{(\alpha, \beta)} = \mathcal{L}_{(\beta, \alpha)}$. Funkcje $\mathcal{L}_{(\alpha)}$ przedstawiają związki między elementami α i β , które z racji owych wzajemnych powiązań stają się nielokalnymi przestrzennie. Oddziaływania lokalne wyrażają się przez warunki brzegowe a także poprzez uzależnienie sił objętościowych od zmiennych dynamicznych $\psi_{\alpha}^k(\Xi_{\alpha}^K, t)$ i $\kappa_{(\alpha)}^k(\xi_{\alpha}^A, t)$.

Przekształcenia „na”: zmiennych dynamicznych, zmiennych niezależnych oraz ich wariacje będą podobne do analogicznych zależności uzyskanych dla ośrodka prostego. Zakłada się tutaj również uwzględnienie wyrazów nieliniowych.

Funkcjonał działania przyjmie postać

$$\begin{aligned}
 W = & \sum_T \sum_{\Omega} \left\{ \mathcal{L}^1 + \sum_T \sum_{\Omega} \mathcal{L}^2 \Delta \bar{\Omega} \Delta t \right\} \Delta \Omega \Delta t + \\
 & + \sum_{\alpha} \left\{ \sum_T \sum_{\omega} \left(\mathcal{L}_{(\alpha)}^1 + \sum_T \sum_{\omega} \mathcal{L}_{(\alpha)}^2 \Delta \bar{\omega}^{(\alpha)} \Delta t \right) \Delta \omega^{(\alpha)} \Delta t + \sum_T \sum_{\Omega} \sum_{\omega} \mathcal{L}_{(\alpha)} \Delta \omega^{(\alpha)} \Delta \Omega \Delta t \right\} + \\
 & + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_T \sum_{\Omega} \sum_{\omega} \mathcal{L}_{(\alpha\beta)} \Delta \omega^{(\alpha)} \Delta \omega^{(\beta)} \Delta t,
 \end{aligned} \tag{20}$$

gdzie: $\Delta \omega^{(\alpha)} \doteq \Delta \bar{\gamma}_{(\alpha)}^1, \dots, \Delta \bar{\gamma}_{(\alpha)}^r$, $\Delta \bar{\omega}^{(\alpha)} \doteq \Delta \bar{\gamma}_{(\alpha)}^1, \dots, \Delta \bar{\gamma}_{(\alpha)}^r$.

Jeżeli zmiany współrzędnych będą infinitesimalne to uzyskuje się postać słabych praw zachowania identyczną jak w pracy [2]. Jednak dla zmian skończonych i w obecności $\delta \Xi_{\alpha}^K \neq 0$ oraz $\delta \bar{\gamma}_{\alpha}^A \neq 0$ należy uwzględnić w postaci wariacji kombinacje wynikające z różnicy

$$\sum_{T+\delta T} \sum_{\Omega+\delta\Omega} \sum_{\omega+\delta\omega} \sum_{T+\delta T} \sum_{\Omega+\delta\Omega} \sum_{\omega+\delta\omega} - \sum_T \sum_{\Omega} \sum_{\omega} \sum_T \sum_{\Omega} \sum_{\omega}. \tag{21}$$

Wpłyne to na znaczne rozbudowanie postaci praw zachowania a także zwiększy ich ilość. Należy pamiętać, że symbole \sum_{α} i \sum_{β} są zwykłymi sumami.

Należy zaznaczyć, że α nie jest liczbą zbyt dużą. Ponadto model ośrodka dyskretno-ciągłego można rozszerzyć na ciała nieproste.

Jeżeli ośrodek traktować jako pewną załość o elementach składowych mogących wykonywać ruchy względne, to aproksymacja łańca modelem dyskretno-ciągłym będzie właściwą.

Niech elementy (α) będą znikomo małe w porównaniu z wymiarami ośrodka oraz będą bardzo liczne i gęsto „upakowane”. Każdej cząstce $\Xi \in \mathcal{B}$ można przypisać element $\mathcal{B}_{(\Xi)}$ a współrzędne $\underline{\chi}_{\alpha(\alpha)}^k(\bar{\gamma}_{\alpha}^A, t)$ zastąpić współrzędnymi $\underline{\chi}_{\alpha}^k(\bar{\gamma}_{\alpha}^A, t, \Xi_{\alpha}^K)$. Wartości

funkcji χ_{α}^k są miejscami w \mathcal{P}_{α} zajmowanymi w chwili t przez „punkt” materialny $\mathcal{B}_{(\Xi)}$ o współrzędnych $\bar{\gamma}_{\alpha}^A$. Punkt ten jest przyporządkowany cząstce $\Xi \in \mathcal{B}$ o współrzędnych Lagrange'a Ξ_{α}^K .

Będzie zatem: dla ruchu ośrodka $\mathcal{B} - \xi_{\alpha}^k = \psi_{\alpha}^k(\Xi_{\alpha}^K, t)$

dla ruchu elementu $\mathcal{B}_{(\Xi)} - \xi_{\alpha}^k = \chi_{\alpha}^k(\bar{\gamma}_{\alpha}^A, t, \Xi_{\alpha}^K)$, $\Xi_{\alpha}^K \in \Omega$, $\bar{\gamma}_{\alpha}^A \in \omega$.

Ilość rodzajów cząstek (α) też jest bardzo znaczna.

Lokalne oddziaływania między ośrodkiem \mathcal{B} a elementem $\mathcal{B}_{(\Xi)}$ są opisane warunkami brzegowymi bądź wyrażają się poprzez siły objętościowe. Lokalne oddziaływanie po-

między $\mathfrak{B}_{(\Xi)}$ i $\mathfrak{B}_{(\Xi)}$ jest możliwe jedynie, gdy owe elementy stykają się. Oddziaływania nielokalne tj. za pośrednictwem ośrodka są dane funkcją

$$\check{\Psi} = \check{\Psi} \left(\Xi_{\bullet}^k, \psi_{\bullet}^k, \psi_{\bullet}^k \Big|_A, D\psi_{\bullet}^k, \Xi_{\bullet}^k, \tilde{\gamma}_{\bullet}^A, \tilde{\chi}_{\bullet}^k, \tilde{\chi}_{\bullet}^k \Big|_A, D\tilde{\chi}_{\bullet}^k, t \right) \quad (22)$$

Natomiast oddziaływania nielokalne między dwoma elementami $\mathfrak{B}_{(\Xi)}$ i $\mathfrak{B}_{(\Xi)}$ dane będzie zależnością

$$\hat{\Psi} = \hat{\Psi} \left(\Xi_{\bullet}^k, \tilde{\gamma}_{\bullet}^A, \tilde{\chi}_{\bullet}^k, \tilde{\chi}_{\bullet}^k \Big|_A, D\chi_{\bullet}^k, \Xi_{\bullet}^k, \tilde{\gamma}_{\bullet}^A, \tilde{\chi}_{\bullet}^k, \tilde{\chi}_{\bullet}^k \Big|_A, D\tilde{\chi}_{\bullet}^k, t \right) \quad (23)$$

Funkcja materialowa elementu $\mathfrak{B}_{(\Xi)}$ jest dana jako ${}^1\mathcal{L}$.

Funkcja $\hat{\Psi}$ zależy od argumentów funkcji ${}^1\mathcal{L}$ w punkcie $\Xi_{\bullet}^k, \tilde{\gamma}_{\bullet}^A, t$ przestrzeni $\Omega \times \omega \times T$ oraz od argumentów tejże funkcji ${}^1\mathcal{L}$ tylko że w punkcie $(\Xi_{\bullet}^k, \tilde{\gamma}_{\bullet}^A, t) \in (\Omega \times \omega \times T)$.

Funkcjonal działania przyjmie postać

$$\begin{aligned} W = & \sum_T \sum_{\Omega} \left(\mathcal{L}^1 + \sum_T \sum_{\Omega} \mathcal{L}^2 \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{t} \right) \Delta \Omega \Delta t + \sum_{\Omega} \sum_T \sum_{\omega} \left({}^1\mathcal{L}^1 + \sum_T \sum_{\omega} {}^1\mathcal{L}^2 \Delta \bar{\omega} \Delta \bar{t} \right) \Delta \bar{\omega} \Delta \Omega \Delta t + \\ & + \sum_T \sum_{\Omega} \sum_{\omega} \sum_{\omega} \check{\Psi} \Delta \bar{\omega} \Delta \bar{\Omega} \Delta \Omega \Delta t + \sum_T \sum_{\Omega} \sum_{\omega} \sum_{\omega} \hat{\Psi} \Delta \bar{\omega} \Delta \bar{\Omega} \Delta \omega \Delta \Omega \Delta t, \quad (24) \\ & \Delta \Omega \doteq \Delta \Xi_{\bullet}^1 \Delta \Xi_{\bullet}^2 \Delta \Xi_{\bullet}^3 \dots \\ & \Delta \omega \doteq \Delta \tilde{\gamma}_{\bullet}^1 \Delta \tilde{\gamma}_{\bullet}^2 \Delta \tilde{\gamma}_{\bullet}^3 \dots \end{aligned}$$

W omawianym przypadku liczba równań stanowiących treść słabych praw zachowania będzie jeszcze większa a ich postać znacznie bardziej rozbudowana.

Elementy strukturalne, małe w porównaniu z wymiarem ośrodka, są rozmieszczone zgodnie z określonym porządkiem oraz możliwie gęsto. Dla żdźbła, ale także dla łań, można przedstawić zbiór prętów $B_{(\alpha)}$ o zadanych powierzchniach bocznych. Oś pręta - walca jest krzywą o końcach leżących na powierzchni otaczającej ośrodek - żdźbło bądź łań. Strukturę globalną będzie można zatem zapisać

$$\begin{aligned} \xi_{\bullet}^k &= \chi_{(\alpha)}^k(\tilde{\gamma}_{\bullet}^A, t), & A &= 1, 2, 3, \\ \xi_{\bullet}^k &= \chi_{\bullet}^k(\tilde{\gamma}_{\bullet}^A, t, \psi_{(\alpha)}^{\mathcal{A}}) & \alpha &= 1, 2, \dots, M, \quad \mathcal{A} = I, II, \end{aligned} \quad (25)$$

gdzie parametry $\psi_{(\alpha)}^{\mathcal{A}}$ wyróżniają oś elementu $B_{(\alpha)}$.

Funkcjonal działania ma postać

$$\begin{aligned} W = & \sum_T \sum_{\Omega} \left(\mathcal{L}^1 + \sum_T \sum_{\Omega} \mathcal{L}^2 \Delta \bar{\Omega} \Delta \bar{t} \right) \Delta \Omega \Delta t + \sum_{\Phi} \sum_T \sum_{\omega} \left({}^1\mathcal{L}^1 + \sum_T \sum_{\omega} {}^1\mathcal{L}^2 \Delta \bar{\omega} \Delta \bar{t} \right) \Delta \omega \Delta t \Delta \Phi + \\ & + \sum_T \sum_{\Omega} \sum_{\Phi} \sum_{\omega} \check{\Psi} \Delta \omega \Delta \Phi \Delta \Omega \Delta t + \sum_T \sum_{\Phi} \sum_{\omega} \sum_{\omega} \hat{\Psi} \Delta \bar{\omega} \Delta \bar{\Phi} \Delta \omega \Delta \Phi \Delta t, \quad (26) \end{aligned}$$

gdzie: $\Delta \Phi \doteq \Delta \psi^1$, $\Delta \bar{\Phi} \doteq \Delta \bar{\psi}^1$, lub $\Delta \Phi \doteq \Delta \psi^1 \Delta \psi^2$, $\Delta \bar{\Phi} \doteq \Delta \bar{\psi}^1 \Delta \bar{\psi}^2$.

$$\xi_*^k = \psi_*^k(\Xi_*^k, \tau) \quad \xi_*^k = \underline{\chi}_*^k(Z_*^A, \tau, \vartheta_*^A) \quad \Xi_*^k \in \Omega, \quad Z_*^A \in \mathcal{S}, \quad \vartheta_*^A \in \Phi, \quad (27)$$

gdzie: funkcje ψ_*^k są miejscami zajętymi w chwili τ przez cząstkę Ξ_*^k ośrodka B w przestrzeni \mathcal{P}_x , natomiast $\underline{\chi}_*^k$ są miejscami zajętymi w chwili t przez punkt o współrzędnych Z_*^A należący do elementu $B_{(\vartheta)}$ wyróżnionego parametrami ϑ_*^A , ${}^3\mathcal{S}$ - obszar co najwyżej trójwymiarowy, ${}^2\Phi$ - obszar co najwyżej dwuwymiarowy. Wynika to z faktu, że położenie dowolnego punktu na krzywej $\vartheta_*^A = const$ określone jest jednym parametrem $Z_*^1 (\mathcal{A} = I, II; A = 1)$ lub, że powierzchnia $\vartheta_*^A = const$ jest zdefiniowana przez parametry $Z^1 Z^2 (\mathcal{A} = I; A = 1, 2)$. Inaczej mówiąc ${}^3\mathcal{S}$ jest obszarem parametryzującym każdy z elementów, natomiast ${}^2\Phi$ jest obszarem przestrzeni parametrów ϑ_*^A wyróżniających elementy $B_{(\vartheta)}$.

Nielokalne oddziaływania: między ośrodkiem a elementami są dane funkcją

$$\check{\mathcal{E}} = \check{\mathcal{E}} \left(\Xi_*^k, \psi_*^k, \psi_*^k \Big|_K, D\psi_*^k, Z_*^A, \vartheta_*^A, \underline{\chi}_*^k, \underline{\chi}_*^k \Big|_A, D\underline{\chi}_*^k, t \right)$$

natomiast między elementami można zapisać jako (28)

$$\hat{\mathcal{E}} = \hat{\mathcal{E}} \left(Z_*^A, \vartheta_*^A, \underline{\chi}_*^k, \underline{\chi}_*^k \Big|_A, D\underline{\chi}_*^k, \tilde{Z}_*^A, \tilde{\vartheta}_*^A, \tilde{\underline{\chi}}_*^k, \tilde{\underline{\chi}}_*^k \Big|_A, D\underline{\chi}_*^k, t \right)$$

Współrzędne Lagrange'a $(\Xi_*^k, Z_*^A, \vartheta_*^A)$ opisują położenia punktów ciała co związane jest z dokładnym opisem morfologicznym, histologicznym oraz cytologicznym.

Jeżeli teraz każda cząstka będzie sama dla siebie kontinuum materialnym [2], to wówczas

$$\xi_*^k = \varphi_*^k(\Xi_*^k, Z_*^A, t) \quad \Xi_*^k \in \Omega, \quad Z_*^A \in {}^3\mathcal{S}. \quad (29)$$

Funkcje te opisują mikroruchy (Z_*^A) ośrodka w cząstce o współrzędnych (Ξ_*^k) . Ruch samej cząstki, bez wyróżnienia jej struktury mikro opisany jest funkcją $\xi_*^k = \psi_*^k(\Xi_*^k, t)$.

Funkcja ta jest uśrednieniem w mikroobszarze ${}^3\mathcal{S}$ wartości φ_*^k . Ciało takie zwane ośrodkiem Mindlina odpowiada ciału z dodatkowymi stopniami swobody a ściślej ciału wieloskładnikowemu. Struktura globalna może odnosić się np. do pojedynczego żdźbła, traktowanego jako element zbrojony.

Pola zewnętrzne φ^n to w gruncie rzeczy pola o charakterze biomechanicznym wynikającym z racji uwarunkowań samej rośliny jak i z racji „mikrometeorologii” lanu. Jeżeli uwzględnimy owe pole zewnętrzne φ^n a także to wszystko co płynie z zachowania się $\delta\Xi_*^k$, to wówczas będzie można mówić o znacznie pełniejszym obrazie mechaniki lanu. Prezentowane w rozprawie rozważania w gruncie rzeczy nie wykraczają poza mechanikę podaną w pracy WOŹNIAKA [2]. Innowością podejścia do zagadnienia opisu procesu byłoby uwzględnienie wyrazów nieliniowych w wariacjach $\delta\Xi_*^k, \delta\psi_*^k, \delta\underline{\chi}_*^k$ i we wszystkich innych funkcjach materiałowych, których rozpatrzenie

okazałyby się konieczne. Ponadto założenie, że $\delta \Xi_*^K \neq 0$, umożliwia wprowadzenie elementów eksperymentalnych do opisu teoretycznego a także przejście do opisu ośrodka poprzez pola zewnętrzne. Pełen zapis $\delta \Xi_*^K(\varepsilon, \varepsilon^k, \varepsilon^M)$ daje także inną postać praw zachowania. Parametry $\varepsilon, \varepsilon^k$ i $\varepsilon^M = -\varepsilon^{lk}$ nie są infinitesimalnymi z racji ograniczeń instrumentalnych. Należałoby tutaj wprowadzić do $\delta \Xi_*^K$ zbiór obiektów geometrycznych $\{\mathcal{A}_{**}\}$ opisujących ośrodek. Elementy tego zbioru będą również definiować pola zewnętrzne. Zbiór $\{\mathcal{A}_{**}\}$ również będzie można wprowadzić do $\delta \Xi_*^K$ dzięki umowie sumacyjnej obowiązującej we wzorze

$$\delta \Xi_*^A = \Xi_*^A - \Xi_*^A = \Xi_*^A|_{\varepsilon^a} \varepsilon^a + \frac{1}{2} [(\cdot)|_{\varepsilon^a} \varepsilon^a]^2 \Xi_*^A$$

Należy wyróżnić: $\check{\mathcal{L}}$ – funkcję materiałową pól zewnętrznych,

$\hat{\mathcal{L}}$ – funkcję materiałową oddziaływań pole zewnętrzne – ośrodek,

$$\Phi^a(\Xi_*^K, t) = \varphi^a[\psi^k(\Xi_*^K, t)]$$

Wyrażając funkcje występujące w $\check{\mathcal{L}}$ i $\hat{\mathcal{L}}$ poprzez $\Phi^a|_K$, gdyż

$$\Phi^a|_K = \varphi^a|_k \psi^k|_K, \quad D\Phi^a = D\varphi^a + \varphi^a|_k D\psi^k, \quad \psi^k|_K \Psi_*^K|_l = \delta_l^k, \quad (30)$$

$$\varphi^a|_k = \Phi^a|_K \Psi_*^K|_k, \quad D\varphi^a = D\Phi^a - \varphi^a|_k D\Psi_*^K = D\Phi^a - D\Phi^a|_K \Psi_*^K|_k D\Psi_*^K.$$

wówczas $\check{\mathcal{L}} \rightarrow \check{L}$ a $\hat{\mathcal{L}} \rightarrow \hat{L}$.

Stosując metody wcześniej przedstawione uzyskuje się wariację funkcjonału, która tym różni się od innych, że nigdy nie może w niej $\delta \Xi_*^K = 0$. Uwzględnienie wariacji zmiennych niezależnych jest wynikiem zmian przestrzeni odniesienia spowodowanymi przez pola zewnętrzne.

Literatura

1. BARAŃSKI W.S.: *Microstresses in homogenization*. Archives of Mechanics, 38, 4, 1986.
2. WOŹNIAK C.: *Podstawy dynamiki ciał odkształcalnych*. PWN, Warszawa 1969.
3. WOŹNIAK C.: *Wstęp do mechaniki analitycznej kontinuum materialnego*. Dynamika układów sprężystych. Ossolineum, Wrocław 1976.
4. WOŹNIAK C.: *Więzy w mechanice ciał odkształcalnych*. Ossolineum, Wrocław 1988.

Streszczenie

Na ogół modele ośrodków wieloskładnikowych wymagają ich zhomogenizowania co nie zawsze jest możliwe. Ciała wieloskładnikowe mogą być zorientowane a także wielobiegunowe. Problemy te wiążą się z zagadnieniem więzów wewnętrznych.

Jednym z najbardziej przydatnych w opisie ośrodków rolnicznych jest ciało o strukturze dyskretno-ciągłej. Poszczególne składniki mogą poruszać się inaczej niż całe ciało. Ważną rzeczą będzie podanie funkcji materiałowej składnika $\mathcal{L}_{(\alpha)}$ oraz międzyskładnikowej $\mathcal{L}_{(\alpha\beta)}$. Przy dużej liczbie składników (α) i ich znikomo małych wymiarach ośrodek staje się ciałem wyposażonym w strukturę lokalną. Natomiast gdy w ośrodku można wyróżnić pewne porządki, to staje się on ciałem wyposażonym w strukturę globalną. Najwnikliwszym modelem ośrodków rolnicznych wydaje się być ciało, na które oddziałują pola zewnętrzne.

ZAGADNIENIA PROBABILISTYCZNE W DYNAMICE ROŚLINNYCH OŚRODKÓW SIATKOWYCH

Andrzej L. Marciniak, Andrzej Fijolek
Katedra Maszyn i Urządzeń Rolniczych WTR, Akademia Rolnicza, Lublin
Jerzy Podgórski, Piotr Siczka
Wydział Inżynierii Budowlanej i Sanitarnej, Politechnika Lubelska, Lublin

Synopsis: Opis probabilistyczny jest przyjęty z konieczności. Zbyt często bowiem elementy losowe dają o sobie znać w opisie mechaniki ruchu ośrodków rolniczych. Obecnie nie jest możliwe sporządzenie opisu w języku atraktorów (chaos deterministyczny) i dlatego należy właśnie odwołać się do probabilistyki.

Słowa kluczowe: Przekroje makro, mezo, mikro, komórki i punkty „koincydencji”, równanie Chapmana-Kolmogorowa, proces Markowa, M-equations.

W mechanice łanu znaczną rolę odgrywa element losowy. Z racji bardzo znacznej ilości obiektów geometrycznych uczestniczących w budowie modelu ośrodka, należy zdefiniować obszar mezoskopowy [1, 2, 3, 4]. Obszar ten musi być taki, aby jako minimalny co do wielkości zawierał dostateczną liczbę mikroskładowych a jednocześnie był na tyle duży, aby można było jego granice uznać za brzeg wielkości makroskopowej. Średnice obszarów wyznaczać będą możliwości eksperymentalne. Celem zasadniczym analizy probabilistycznej jest podanie postaci kinetycznego równania M - equation. Zakłada się, że proces odkształcania jest procesem Markowa. Można tutaj dokonać następującego porównania.

Deterministyczny układ siatkowy

1. Quasi ciągły układ materialny.
2. Dowolnie mały pojedynczy element.
3. Deterministyczne równania ruchu.
4. Naprężenia Cauchy'ego - we współrzędnych Eulera oraz Pioli-Kirchhoffa we współrzędnych Lagrange'a.
5. Równania konstytutywne – funkcje materiałowe \mathcal{L}

Probabilistyczny układ mikrosiatkowy

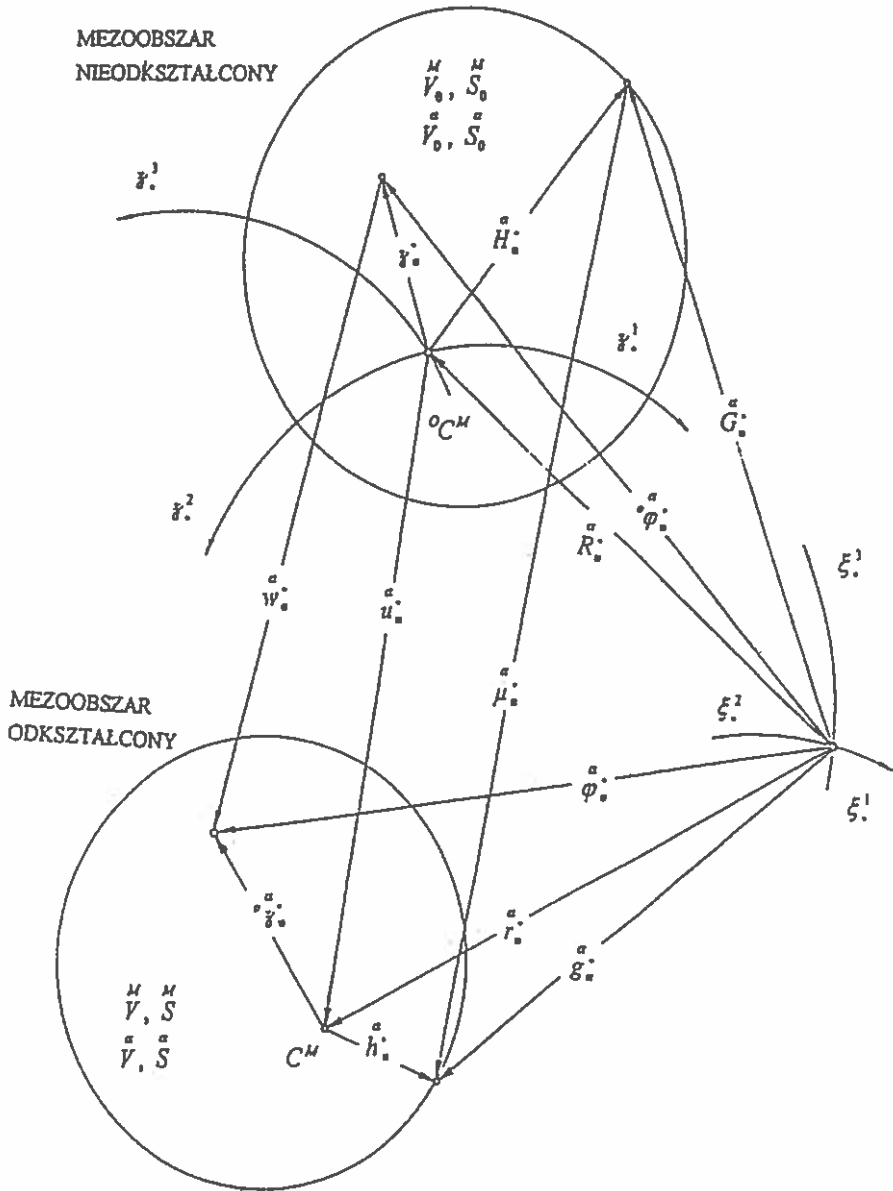
- Dyskretny układ materialny.
Cząsteczka o objętości $\overset{\alpha}{V}$ i powierzchni $\overset{\alpha}{S}$
Probabilistyczne równania ruchu.
Uogólniona siła powierzchniowa – model komórki koincydencji [4].

Probabilistyczny funkcjonal materiałowy

$$\overset{M}{\mathfrak{N}} \doteq \overset{M}{\mathfrak{N}} \left\{ E_{\dots}, \alpha_{\cdot}, \rho_{\alpha}, \Psi, \overset{\alpha}{O}_{\dots}, \overset{\alpha}{\sigma}_{\dots}, \overset{\alpha}{v}, \theta, t \right\}$$

gdzie: ρ - gęstość, θ - temperatura,
 α_{\cdot} - wektor wskazujący na
położenie „komórki” elementu α .

Na podstawie pracy [4] wprowadzono następujące oznaczenia (rys. 1).



Rys. 1. Schemat oznaczeń przy konstruowaniu modelu probabilistycznego

Objętość i powierzchnia są dane dla: obszarów makro - V, S , mezo - $\bar{V} \ll V, \bar{S} \ll S$, pojedynczych elementów \bar{V}^y, \bar{S}^s . Będą zachodziły tutaj zależności

$$\bar{V}^M \cap \bar{V}^L = 0, \quad L \neq M, \quad V = \bigcup_{M=1}^P \bar{V}^M. \quad (1)$$

Literami dużymi oznaczono stan przed odkształceniem, natomiast małymi stan po odkształceniu. Będą tutaj zachodziły następujące zależności geometryczne

$$\begin{aligned}\xi_{\alpha}^{\cdot} &= \bar{O}_{\alpha\alpha}^{\cdot} \delta_{\alpha\alpha}^{\cdot} + \bar{R}_{\alpha}^{\cdot}, & \xi_{\beta}^{\cdot} &= \bar{o}_{\alpha\alpha}^{\cdot} \delta_{\alpha}^{\cdot} + \bar{r}_{\alpha}^{\cdot}, & \bar{G}_{\alpha}^{\cdot} &= \bar{O}_{\alpha\alpha}^{\cdot} \bar{H}_{\alpha}^{\cdot} + \bar{R}_{\alpha}^{\cdot}, \\ g_{\alpha}^{\cdot} &= \bar{o}_{\alpha\alpha}^{\cdot} h_{\alpha}^{\cdot} + \bar{r}_{\alpha}^{\cdot}, & u_{\alpha}^{\cdot} &= \bar{r}_{\alpha}^{\cdot} - \bar{R}_{\alpha}^{\cdot}, & w_{\alpha}^{\cdot} &= \xi_{\alpha}^{\cdot} - \xi_{\alpha\alpha}^{\cdot} = \bar{o}_{\alpha\alpha}^{\cdot} \delta_{\alpha}^{\cdot} - \bar{O}_{\alpha\alpha}^{\cdot} \delta_{\alpha\alpha}^{\cdot} + u_{\alpha}^{\cdot}, \\ \mu_{\alpha}^{\cdot} &= g_{\alpha}^{\cdot} - \bar{G}_{\alpha}^{\cdot} = \bar{o}_{\alpha\alpha}^{\cdot} h_{\alpha}^{\cdot} - \bar{O}_{\alpha\alpha}^{\cdot} \bar{H}_{\alpha}^{\cdot} + u_{\alpha}^{\cdot}.\end{aligned}\quad (2)$$

Mikroodkształcenia dla współrzędnych Lagrange'a i Eulera można wyliczyć z wcześniej podanych zależności. Będą one zatem różne od podanych w cytowanych pracach AXELRADA i PROVANA. Dla orientacji oraz rozmiarów elementów można również podać momenty gęstości rozkładów prawdopodobieństwa.

Sieci, tak w sensie makro (ξ_{α}^i) jak i mikro (z_{α}^j) są ruchome względem siebie. Można tutaj podać punkty chwilowo pokrywające się, które należą do dwóch różnych sieci. Byłby to więc niejako „punkt koincydencji” [4]. Powierzchnie tych komórek a także odległości ich centrów od siebie przyjmują postaci

$$\Delta S^{\alpha q} = \Delta S^{\beta q}, \quad q = 1, \dots, p, \quad d_{\alpha}^{\alpha\beta} = \bar{\partial}_{\alpha}^{\alpha\beta} - \Delta_{\alpha}^{\alpha} = \left| \frac{\bar{\alpha\beta}}{d_{\alpha}^{\cdot}} \right| \bar{e}_{\alpha} = \left| \frac{\alpha\beta}{d_{\alpha}^{\cdot}} \right| e_{\alpha} \quad (3)$$

gdzie: $\bar{\Delta}_{\alpha}^{\alpha\beta} = \bar{G}_{\alpha}^{\cdot} - \bar{G}_{\alpha}^{\cdot} = \bar{O}_{\alpha\alpha}^{\cdot} \bar{H}_{\alpha}^{\cdot} - \bar{O}_{\alpha\alpha}^{\cdot} \bar{H}_{\alpha}^{\cdot} + \bar{R}_{\alpha}^{\cdot} - \bar{R}_{\alpha}^{\cdot}$ - wielkość powierzchni w stanie nieodkształconym,

$\bar{\partial}_{\alpha}^{\alpha\beta} = g_{\alpha}^{\cdot} - g_{\alpha}^{\cdot} = \bar{o}_{\alpha\alpha}^{\cdot} h_{\alpha}^{\cdot} - \bar{o}_{\alpha\alpha}^{\cdot} h_{\alpha}^{\cdot} + \bar{r}_{\alpha}^{\cdot} - \bar{r}_{\alpha}^{\cdot}$ - wielkość powierzchni w stanie odkształconym,

$d_{\alpha}^{\alpha\beta} = \bar{\partial}_{\alpha}^{\alpha\beta} - \Delta_{\alpha}^{\alpha} = \mu_{\alpha}^{\cdot} - \mu_{\alpha}^{\cdot}$ - względne przemieszczenie,

$\lambda_{\alpha}^{\alpha\beta} = \bar{R}_{\alpha}^{\cdot} - \bar{R}_{\alpha}^{\cdot}$ - odległość środków mas komórek uczestniczących w koincydencji.

Punkt „koincydencji” w skali makro może być modelem punktu kontaktowego.

Pomiędzy „komórkami” wystąpi określony potencjał $\Psi \left\{ \left| \frac{\bar{\alpha\beta}}{d_{\alpha}^{\cdot}} \right| \right\}$, którego pochodna

kowariantna stanowi siłę, traktowaną jako siła wewnętrzna względem obiektu

$$F_{\alpha}^{\alpha\beta} = \varepsilon \cdot \Psi \left| \frac{\bar{\alpha\beta}}{d_{\alpha}^{\cdot}} \right| = \tau_{\alpha}^{\alpha\beta} \left(\frac{\alpha\beta}{d_{\alpha}^{\cdot}} \right) = \delta \left(\frac{\alpha\beta}{d_{\alpha}^{\cdot}} - \frac{\bar{\alpha\beta}}{d_{\alpha}^{\cdot}} \right) F_{\alpha}^{\alpha\beta}, \quad (4)$$

gdzie: dla $d_{\alpha}^{\cdot} = \bar{d}_{\alpha}^{\cdot}$, $\delta = 1$, oraz dla $d_{\alpha}^{\cdot} \neq \bar{d}_{\alpha}^{\cdot}$, $\delta = 0$.

Bilanś sił jako pierwsze równanie równowagi przyjmie postać

$$\sum_{\Delta S} \left\{ \delta \left(\frac{\alpha\beta}{d_{\alpha}^{\cdot}} - \frac{\bar{\alpha\beta}}{d_{\alpha}^{\cdot}} \right) F_{\alpha}^{\alpha\beta} \right\} \Delta S = \sum_{\Delta S} \tau_{\alpha}^{\alpha\beta} \Delta S = \sum_{\rho \Delta S} \varphi_{\alpha\alpha}^{\alpha\beta} n_{\alpha} \Delta S, \quad (5)$$

gdzie: mikronaprężenie Cauchy'ego,

$$\varphi_{\alpha}^{\alpha} = \varphi_{\alpha}^{\alpha} \left\{ \bigcup \left\{ \left. \begin{matrix} \alpha \\ \gamma_{\alpha}^{\alpha} \end{matrix} \right| \left. \begin{matrix} \alpha \\ \sigma_{\alpha}^{\alpha} \end{matrix} \right| \left. \begin{matrix} \alpha \\ \sigma_{\alpha}^{\alpha} \end{matrix} \right\} \right\}. \quad (6)$$

Podobnie można zapisać bilans momentów. Natomiast funkcjonal charakterystyczny energii dany jest zależnością \mathcal{N} . Energia całkowita dana będzie zależnością

$$U = \sum_{M=1}^P \sum_{S=1}^M T_{\alpha}^{\alpha} \gamma_{\alpha}^{\alpha} \Delta S = \sum_{M=1}^P \mathcal{N}. \quad (7)$$

gdzie: ΔS - przyrost powierzchni, T - siła powierzchniowa, γ_{α}^{α} - przemieszczenie mezoobszaru.

Wielkości opisujące: siły, momenty oraz energię, należy wprowadzić do równań ruchu siatki w wielkości $q_{\alpha\Phi}^{\bar{\alpha}}, m_{\alpha\Phi}^{\bar{\alpha}}, q_{\alpha\Phi}^{\bar{\alpha}} \frac{D\xi_{\alpha}^{\bar{\alpha}}}{dt}$ będące naprężeniami siłowymi, naprężeniami momentowymi oraz energią. Ponadto należy uwzględnić losowość: wymuszeń objętościowych $P^{\bar{\alpha}}$ i $L^{\bar{\alpha}}$ oraz $\mathcal{A}_{\alpha\Phi}^{\bar{\alpha}}, \mathcal{A}_{\alpha\Sigma}^{\bar{\alpha}}, \mathcal{A}_{\alpha\Phi}^{\bar{\alpha}}, \mathcal{A}_{\alpha\Sigma}^{\bar{\alpha}}$ będące odpowiednikami obiektów δ - Kroneckera.

Szczególnie ważne miejsce w opisie ośrodka roślinnego zajmować będą procesy Markowa. Każda „komórka” - element α posiada swój wektor stanu

$$\begin{aligned} \dot{v}_{\alpha}^{\alpha}(t) : \dot{v}_{\alpha}^{\alpha}(t), \quad \alpha = 1, \dots, M, \quad i = 1, \dots, r, \\ \dot{v}_{\alpha}^{\alpha} < \dot{v}_{\alpha}^{\alpha}(t) < \dot{v}_{\alpha}^{\alpha} + \underline{\sigma} \dot{v}_{\alpha}^{\alpha}, \quad \exists \in C, \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie: r - liczba określająca ilość zmiennych, $\dot{v}_{\alpha}^{\alpha} \in X$, $\left(\dot{v}_{\alpha}^{\alpha}, \dot{v}_{\alpha}^{\alpha} + \underline{\sigma} \dot{v}_{\alpha}^{\alpha} \right) \subset X$, gdzie X jest zbiorem otwartym, \exists - symbolizuje możliwą dokładność pomiarów, C - zbiór liczb całkowitych [4], $\underline{\sigma}$ - oznacza tu i dalej przyrost. Tak więc wielkości \exists wyznaczają zakres wartości, między którymi znajdzie się wielkość mierzona [5, 6, 7]. Teraz

$$\underline{\sigma} \dot{v}_{\alpha}^{\alpha} \in \Sigma, \quad \bigcup_{\alpha} \Sigma \subset X. \quad (9)$$

Można zatem przyjąć, że Σ jest σ - algebrą kul zbioru X . Jest tak dlatego, że Σ stanowi σ - ciało zbiorów będących rodziną ξ taką, że

- zawiera ona element pusty,

- dopełnienie $\bigcup_{\alpha=1}^{\infty} \xi \setminus A \in \xi$ gdy $A \in \xi$,

- gdy elementy zbioru należą do rodziny, to należy również i ich suma. Najmniejsze σ - ciało zawierające rodzinę wszystkich zbiorów otwartych przestrzeni topologicznej będzie zbiorem borelowskim tej przestrzeni mierzalnym w sensie Lebesgue'a. Ma to takie znaczenie, że można nie tylko poznać wartość sumy ale i również udziały w niej poszczególnych składowych.

Zbiory wektorów $v_* \in A$ należy wyposażyć w domknięcie \bar{A} , które można zdefiniować jako ciąg granic wyrazów należących do A . Natomiast brzeg zbioru

$$\partial A = \bar{A} - \text{int } A, \quad (10)$$

gdzie: $\text{int } A$ wnętrze zbioru (zbiór otwarty jest wówczas, gdy $\text{int } A = A$), może być definiowany w oparciu o tensor krzywizny. Występujące w definicji domknięcia granice można interpretować z kolei poprzez omawiane wcześniej obiekty geometryczne.

Miarą zbioru będzie wielkość

$$\omega = \omega(\underline{\sigma} v_*^3) \doteq \prod_{i=1}^r \underline{\sigma} v_*^3. \quad (11)$$

Zbiór wektorów A definiuje trójka (X, Σ, ω) w sensie określenia jego właściwości względem miary. Na zbiorze tym będą występować funkcje

$$(f(v_*), g(v_*)) \in X, \quad \left(\pi(\underline{\sigma} v_*^3), \varphi(\underline{\sigma} v_*^3) \right) \in \Sigma \quad (12)$$

Będą one mierzalnymi, gdy [4]

$$\left\{ \frac{v_*}{h(v_*)} > c \right\} \in \Sigma. \quad (13)$$

Jedną z funkcji (12) będzie gęstość prawdopodobieństwa a argumentami obiekty geometryczne oraz słabe prawa zachowania.

W dalszym ciągu przestrzeń łanu \mathcal{P}_x będzie między innymi zbiorem elementów będących klasami równoważności funkcji np. ψ_*^k ograniczonych, mierzalnych w sensie zależności (13) w X oraz całkowalnych w sensie Lebesgue'a.

Teraz w sensie procesów Markowa, można określić prawdopodobieństwo $\mathfrak{F}_x(v_*; \underline{\sigma} v_*^3)$ przejścia wektora stanu $v_*(t)$ w kulę otwartą $\underline{\sigma} v_*^3$ w czasie (bądź przy zmianie dowolnego parametru) $t + \Delta t$ ($\Delta t > 0$). Funkcja \mathfrak{F}_x jest procesem Markowa o właściwościach:

1. $\underline{\sigma} v_*^3 \in \Sigma$ z miarami ω w X i Σ w \mathfrak{F}_x ,
2. dla każdych danych parami rozłącznych zbiorów $\underline{\sigma} v_*^3 \in \Sigma$ i dla prawie wszystkich $v_* \in X$ będzie: $\mathfrak{F}_x \geq 0$ i $\mathfrak{F}_x(v_*; X) = 1$.

Prawdopodobieństwo \mathfrak{F}_x określa operator liniowo sumacyjny związany z całką Lebesgue'a - Stieltjesa

$$\Lambda_x \pi(\underline{\sigma} v_*^3) = \int_x \mathfrak{F}_x(v_*; \underline{\sigma} v_*^3) \pi(\Delta v_*^3), \quad (14)$$

gdzie: $\pi \in \Omega$, $\Lambda_x \Omega \subset \Omega$, $\Lambda_x \pi(X) = \pi(X)$, $\Lambda_x > 0$, $\pi \in \Omega$, \int_x - symbol sumacyjny.

Charakterystyki materiałowe są dane funkcją

$$\frac{\mathfrak{L}}{M} = {}_M m_t \left(\underline{\sigma v}_*^3 \right) \quad (15)$$

która jest równa liczbie elementów mikro M -tego mezoobszaru takich, że ich stan umieszcza je w otwartej kuli $\underline{\sigma v}_*^3$ w chwili t . Można zatem przyjąć, że funkcję materiałową Lagrange'a będzie można zapisać

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L} \left(\frac{\mathfrak{L}}{M}, \dots \right) \quad (16)$$

Prawdopodobieństwo tego, że w momencie t stan α -tego elementu mikro M -tego mezoobszaru znajduje się w kuli $\underline{\sigma v}_*^3 \in X$ wyniesie

$${}_M \pi_t \left(\underline{\sigma v}_*^3 \right) = \frac{{}_M m_t \left(\underline{\sigma v}_*^3 \right)}{N}, \quad \sum_x {}_M m_t \left(\underline{\sigma v}_*^3 \right) = N. \quad (17)$$

Omawiane prawdopodobieństwo przejścia będzie można zapisać

$${}_M \pi_{t+s} \left(\underline{\sigma v}_*^3 \right) = \Lambda_{s \ M} \pi_t = \mathfrak{L} \mathfrak{T}_s \left(v_*^3; \underline{\sigma v}_*^3 \right) {}_M \pi_t \left(\Delta v_*^3 \right) \quad (18)$$

Będą zachodziły ważne zależności rekurencyjne o charakterze równań Chapmana-Kołmogorowa

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{t+s} \left(v_*^3; \underline{\sigma v}_*^3 \right) &= \mathfrak{L} \mathfrak{T}_s \left(\mu_*^3; \underline{\sigma v}_*^3 \right) \mathfrak{T}_t \left(v_*^3; \Delta \mu_*^3 \right) \\ \Lambda_{t+s} \pi \left(\underline{\sigma v}_*^3 \right) &= \mathfrak{L} \mathfrak{T}_{t+s} \left(v_*^3; \underline{\sigma v}_*^3 \right) \pi \left(\Delta v_*^3 \right) \\ L_{t+s} f \left(v_*^3 \right) &= \mathfrak{L} f \left(\mu_*^3 \right) \mathfrak{T}_{t+s} \left(v_*^3; \Delta \mu_*^3 \right) \end{aligned} \quad (19)$$

gdzie: L_{t+s} operator dualny do Λ_{t+s} o następujących właściwościach [4]:

1. $\mathfrak{L} L_{t+s} f \left(v_*^3 \right) \pi \left(\Delta v_*^3 \right) = \mathfrak{L} f \left(v_*^3 \right) \Lambda_{t+s} \pi \left(\Delta v_*^3 \right)$ (20)
2. jest liniowy i dodatni,
3. $L_{t+s} \mathbf{1} = \mathbf{1}$.

Następnie można zapisać

$$L_s f \left(v_*^3 \right) = \mathfrak{L} f \left(\mu_*^3 \right) \mathfrak{T}_s \left(v_*^3; \Delta \mu_*^3 \right) \quad (21)$$

Z procesami Markowa związany jest operator λ_s , do którego dochodzi się następująco

$$\pi \left(\underline{\sigma v}_*^3 \right) = \mathfrak{L} f \left(v_*^3 \right) \omega \left(\underline{\sigma \mu}_*^3 \right) \quad \sigma \mu_*^3 \in \Sigma, \quad (22)$$

$$\text{gdzie funkcja} \quad f \left(v_*^3 \right) = \frac{\pi \left(\Delta v_*^3 \right)}{\omega \left(\Delta v_*^3 \right)}, \quad (23)$$

jako argument może zawierać równania równowagi wynikające ze słabych praw zachowania. Z kolei będą zachodziły zależności [4]

$$\Lambda_x \pi \left(\sigma v_x^3 \right) = \int_x \lambda_x f(v_x^3) \omega(\sigma v_x^3) \quad (24)$$

gdzie:
$$\lambda_x f(v_x^3) = \frac{\Lambda_x \pi(\Delta v_x^3)}{\omega(\Delta v_x^3)} \quad (25)$$

Operator ten będzie miał następujące właściwości: $\lambda_x A \subset A$, jest liniowy i dodatni,

$$\int_x \lambda_x f(v_x^3) \omega(\Delta v_x^3) = \int_x f(v_x^3) \omega(\Delta v_x^3) \quad (26)$$

Z ostatnią zależnością związana jest formuła

$$\int_x L_x g(v_x^3) f(v_x^3) \omega(\Delta v_x^3) = \int_x g(v_x^3) \lambda_x f(v_x^3) \omega(\Delta v_x^3) \quad (27)$$

Wzory (11) + (27) związane są ściśle z układem operatorów (19), które pozwalają na konstruowanie prawdopodobieństwa \mathfrak{F}_t będącego procesem Markowa. Operatory te wyznaczają M - równanie. Będzie bowiem

$$\frac{\mathfrak{F}_{t+\delta t} \left(v_x^3; \sigma v_x^3 \right) - \mathfrak{F}_t \left(v_x^3; \sigma v_x^3 \right)}{\delta t} = \int_x \left\{ \frac{\mathfrak{F}_{\delta t} \left(\mu_x^3; \sigma v_x^3 \right)}{\delta t} \mathfrak{F}_t \left(v_x^3; \Delta \mu_x^3 \right) - \mathfrak{F}_t \left(v_x^3; \sigma v_x^3 \right) \frac{\mathfrak{F}_t \left(v_x^3; \Delta \mu_x^3 \right)}{\delta t} \right\} \quad (28)$$

Przyjmując, że $\mathcal{Q} \left(v_x^3; \sigma v_x^3 \right) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\mathfrak{F}_{\delta t} \left(v_x^3; \sigma v_x^3 \right)}{\delta t}$, zależność (28) można przedstawić w postaci równania szybkości zmian warunkowego prawdopodobieństwa

$$\frac{D \mathfrak{F}_t \left(v_x^3; \sigma v_x^3 \right)}{\delta t} = \int_x \left\{ \mathcal{Q} \left(\mu_x^3; \sigma v_x^3 \right) \mathfrak{F}_t \left(v_x^3; \Delta \mu_x^3 \right) - \mathfrak{F}_t \left(v_x^3; \sigma v_x^3 \right) \mathcal{Q} \left(v_x^3; \Delta \mu_x^3 \right) \right\} \quad (29)$$

Uwzględniając następnie zależność (28), ostatecznie otrzymuje się M - równanie

$$\begin{aligned} \frac{D}{\delta t} \left({}_M \pi_{t+s} \left(\sigma v_x^3 \right) \right) &= \frac{D}{\delta t} \left(\Lambda_x {}_M \pi_t \right) = \int_x \frac{D}{\delta t} \mathfrak{F}_t \left(v_x^3; \sigma v_x^3 \right) {}_M \pi_t \left(\Delta v_x^3 \right) = \\ &= \int_x \left\{ \mathcal{Q} \left(v_x^3; \sigma v_x^3 \right) \left({}_M \pi_t \left(\Delta \mu_x^3 \right) \right) - \mathcal{Q} \left(v_x^3; \Delta \mu_x^3 \right) \left({}_M \pi_t \left(\sigma v_x^3 \right) \right) \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

Równanie to wiąże proces Markowa \mathfrak{F}_t z prędkością jego zmian \mathcal{Q} oraz funkcją charakterystyk materiałowych ${}_M \pi_t$ dla dynamicznego stanu danego mezoobszaru. Procesami Markowa mogą być zarówno siły i momenty wewnętrzne a w tym i powierzchniowe jak i zewnętrzne masowe więc funkcje ${}_M \pi_t$ będą związane z wszystkimi tymi wektorami.

Operator \mathfrak{J}_x należy rozumieć w sensie wzorów określających operatory sumacyjne [8].

Za stan równowagi można uznać sytuację, w której

$$\frac{D}{\delta t} {}_M \pi_i = 0, \quad \text{lub} \quad Q = 0. \quad (31)$$

Funkcja ${}_M \pi_i$ musi uwzględniać przytaczane wcześniej obiekty geometryczne. W ten sposób będzie można podać rozkłady wielkości mierzonych tak w badaniach makro jak i mikro. W tych drugich należy odwołać się do badań spektroskopowych a uzyskane wyniki interpretować na gruncie mechaniki kwantowej. Można założyć, że łączniki siatki - żdźbła a także elementy odpowiedzialne mechanicznie takie jak wiązki a w ostateczności i błony komórkowe mają strukturę włóknistą. Włókna mogą stykać się ze sobą quasi-punktowo bądź na określonej powierzchni. Granica wybranego więc mezoobszaru może przecinać z prawdopodobieństwem $p_1(t)$ włókno bądź z prawdopodobieństwem $p_2(t)$ punkt czy powierzchnię styku ($p_1 + p_2 = 1$). Charakterystykę materiałową (15) można zatem zapisać

$$\frac{\mathfrak{L}}{M} = {}_M m_i \left[\sigma \nabla_i^3 \cdot \left(p_1, p_2, \pi_E \left(E_{\dots}^{\dots} \right), \pi_D \left(D_{\dots}^{\dots} \right), \pi_S \left(S_o \right), \pi_O \left(O_{\dots}^{\dots} \right) \right) \right], \quad (32)$$

gdzie: gęstości rozkładu prawdopodobieństwa:

π_E - tensora stałych sprężystości,

π_D - tensora pozostałych wielkości konstytutywnych,

π_S - parametrów spektroskopowych, π_O - kątów orientacji elementu.

Tak w skali makro jak i mikro, zaznaczone na rys. 1 wektory można rozłożyć na część deterministyczną i losową. Do tej drugiej najprawdopodobniej będzie można w całej rozciągłości zastosować analizę korelacyjną. Podobnie będzie można tę analizę zastosować do wielkości $E_{\dots}^{\dots}, D_{\dots}^{\dots}, S_o$ i O_{\dots}^{\dots} .

Literatura

1. AXELRAD D.R.: *Foundations of the Probabilistic Mechanics of Discrete Media*. Pergamon Press, Oxford 1984.
2. AXELRAD D.R.: *Micromechanics of discrete systems*. Archives of Mechanics, 28, 3, 1976.
3. AXELRAD D.R.: *Micromechanics of Solids*. PWN Warszawa, Elsevier Amsterdam 1978.
4. AXELRAD D.R., PROWAN J.W.: *Probabilistyczna mikromechanika ciał stałych ze strukturą*. Teorie Statystyczne w Ciałach Stałych, Cieczach i Gazach. Ossolineum, Warszawa 1974.
5. SINGER D.: *Geomorfijne sfierie mnogogranniki s zadannymi kriviznami*. Matematika, nowoje w zaru-bieźnoj naukie, 18, 1980.
6. SITTE P.: *Struktura i ultrastruktura komórki roślinnej*. PWRiL, Warszawa 1978.
7. SOBCZYK K.: *Metody dynamiki statystycznej*. PWN, Warszawa 1973.
8. MARCINIAK A.: *Wstępny opis roślinnego ośrodka siatkowego - żdźbłowego*. Rozprawa habilitacyjna, Lublin 1995.

Streszczenie

Celem rozważań probabilistycznych jest przedstawienie M-równania, które daje pojęcie o postaci spodziewanych rozkładów. Równanie to wiąże proces Markowa \mathfrak{J}_i z prędkością jego zmian Q oraz funkcją charakterystyk materiałowych ${}_M \pi_i$ dla dynamicznego stanu danego mezoobszaru. Z równaniem M związana będzie poprzez funkcję ${}_M \pi_i$ funkcja materiałowa \mathfrak{L} . Procesami Markowa mogą być siły i momenty objętościowe oraz powierzchniowe.

PODSUMOWANIE

Przedstawione pozycje w liczbie dziesięciu wiążą się w pewną całość stanowiącą wprowadzenie do konstrukcji modeli tych wszystkich ośrodków, które dadzą się przedstawić jako siatki przestrzenne.

Rozważania na ten temat są rozwinięte w pracy A.L. Marciniaka: *Wstępny opis ośrodka siatkowego żdźbłowego*.

W pierwszym artykule przedstawiono operatory sumacyjne, które działając na dowolne obiekty geometryczne np. wektory bądź tensory pozwalają na śledzenie ich zmian w różnych punktach siatki. Natomiast drugi artykuł omawia podstawowe operatory używane w racjonalnej mechanice mającej zastosowanie w analizie ośrodków roślinnych bądź gleby.

Następne prace poświęcone są omówieniu podstawowych obliczeń wariacyjnych związanych z budową funkcjonału działania opisującą własności dynamiczne ośrodka. Wariacja współrzędnych jako ich różnica jest rozwijana w szereg Taylora, przy czym uwzględnia się dalej więcej niż jeden jego wyraz. Określono tutaj wariacje współrzędnych niezależnych – Lagrange'a oraz zależnych – Eulera. Wyrażono je poprzez obiekty przemieszczenia i obrotów. Zdefiniowano także przyrosty kowariantne współrzędnych Eulera oraz przyrosty kowariantne funkcji materiałowej Lagrange'a. W konsekwencji uzyskano wariację funkcjonału działania. Podanie postaci wariacji funkcjonału działania jest równoznaczne ze zdefiniowaniem ośrodka quasi-prostego.

Funkcja materiałowa Lagrange'a składająca się ze składowej lokalnej oraz dwóch części nielokalnych tj. przestrzeni i czasu, które wszystkie są wyrażane przez obiekty krzywizny. Z ostatecznej postaci funkcjonału działania otrzymuje się słabe całkowite prawa zachowania. Ponieważ przyjęto, że parametry przekształceń nie są infinitesimalne więc dla rozpatrywanego przypadku będą nie 3 parametry ruchu (przemieszczenia, obroty i czas) ale 61 parametrów będących nieliniowymi kombinacjami owych trzech.

Dokonując stosowanych w mechanice uproszczeń otrzymuje się w konsekwencji klasyczne równania ruchu.

Następnym problemem jest przedstawienie aproksymacji mechaniki łań bardziej złożonymi modelami, z dodatkowymi stopniami swobody, takimi jak ośrodki wieloskładnikowe czy strukturalne.

Ostatnim proponowanym problemem jest ujęcie przedstawionej problematyki w konwencji probabilistycznej.

VARIATIONAL METHODS OF MODEL CREATING FOR PLANT MEDIA

SUMMARY

Presented ten papers are integral part of introduction to model construction of the media for which space structure representation is possible. This consideration are presented in A.L. Marciniak paper entitled: *Preliminary description of the stalk structure media*.

In the first paper sum operators are presented, which are acting for geometrical objects, e.g. vectors or tensors and allow to observe its changes in various structure nodes. Second paper describe basic operators used in rational mechanics which is applied to analyse of plant media or ground.

Following papers treated about basic variational calculations concerned to building of the acting functional for description of the media dynamic property. Variation of the co-ordinates is expanded to Taylor series, and more than one term are used in next considerations. In this papers variations of Lagrange and Euler's co-ordinates are described and expressed by displacement and rotation objects. Covariant increments of Euler co-ordinates and Lagrange material function are defined. Expression of the variation of the action functional is equivalent to quasi-simple media definition.

Lagrange material function contain local and two non-local parts i.e. time and space, which all are expressed by curvature objects. From final form of action functional the weak integral conservation rules are obtained. As a consequence of consideration of finite values of the transformation parameters, a number of 61 non-linear combinations of movement parameters is obtained instead of 3 standard parameters (displacement, rotation, time). After some usually used in mechanics simplifications the classical movement equations are obtained.

The next problem is expression of the plant mechanics by some more sophisticated models with additional degrees of freedom as multicomponent and multipolar media.

The last paper is dedicated to probabilistic description of the presented problems.
Key words: sum operators, metrical objects, Lagrange material function, base vectors, movements parameters, multicomponent media, global structure media, variation of action functional, local structure media.

