Helena KAZIEKO, Lucyna KAZIEKO
Katedra Zastosowań Matematyki
Wydział Melioracji i Inżynierii Środowiska SGGW

O rozwiązaniu nieliniowych zagadnień konsolidacji gruntów

Wstęp

Zagadnienie konsolidacji gruntów o własnościach zależnych od nadwyżki ciśnienia wody w porach prowadzi do rozwiązania quasiliniowego równania typu parabolicznego ze zmiennymi współczynnikami. Nawet przy znajdowaniu przybliżonych rozwiązań analitycznych w większości zagadnień nieliniowych pojawiają się poważne trudności.

W pracach Samarskiego (1962a,b, 1963) oraz Tichonowa (1961) podane są schematy różnic skończonych dla liniowych i quasiliniowych równań typu parabolicznego postaci:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(d_i\,(x, t, u)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) \tag{1}$$

gdzie

$$d_i\,(x, t, u) \text{ i } f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_k}\right)$$

– zadane funkcje.

Problemy istnienia i jednoznaczności rozwiązań równań postaci (1) podane są w pracy Tichonowa i Samarskiego (1961). Otrzymane tam rezultaty określają warunki istnienia i gładkości, przy których spełnieniu dowodzi się twierdzenia o zbieżności dla rozwiązań numerycznych.

Wyznaczanie schematu różnic skończonych

Rozpatrujemy jednowymiarowe zagadnienie konsolidacji nasyconego wodą gruntu z uwzględnieniem zależności właściwości gruntu od nadwyżki ciśnienia porowego. Równanie opisujące ten proces wg Florin (1948) ma postać

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{(1+e)}{\gamma a\,(x, t, u)}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(k\,(x, t, u)\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f\,(x, t) \tag{2}$$

gdzie:
$u = u\,(x, t)$ – nadwyżka ciśnienia porowego,
t – czas,
x – współrzędna,
γ – ciężar właściwy wody,
e – średnia wartość wskaźnika porowatości gruntu,
$a = a\,(x, t, u)$ – współczynniki ściśliwości,
$k = k\,(x, t, u)$ – współczynnik filtracji,
$f\,(x, t)$ – funkcja odpowiadająca ciężarowi własnemu gruntu lub przyłożonemu zewnętrznemu obciążeniu.

Niech obszar określoności u zależy od czasu

$$0 \le x \le h(t), \quad 0 \le t \le T \tag{3}$$

zaś warunki brzegowe i początkowe będą następujące:

$$\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_1(t)\, u = u_1(t) \quad \text{dla } x = 0$$
$$\alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_2(t)\, u = u_2(t) \quad \text{dla } x = h(t) \tag{4}$$

W szczególności, w przypadku konsolidacji warstwy gruntu o stałej miąższości h_0, $h(t) = h_0$. Warunki brzegowe I i II rodzaju otrzymuje się z równania (4) przez odpowiedni dobór α_i i σ_i; $i = 1,2$. W przypadku konsolidacji warstwowego masywu złożonego z niejednorodnych gruntów będziemy przyjmować, że na granicy warstw $k(x, t, u)$ i $a(x, t, u)$ mają nieciągłości I rodzaju oraz, że spełnione są warunki:

$$u_i = u_{i+1}; \quad \left(\frac{k}{a} \frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \left(\frac{k}{a} \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i+1} \tag{5}$$

gdzie i – numer warstwy.

Doprowadzimy równanie (2) do postaci (1):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(1+e)\,k(x,t,u)}{\gamma\, a(x,t,u)} \frac{\partial u}{\partial x}\right] + $$
$$+ \frac{(1+e)\,k(x,t,u)}{\gamma\, a^2(x,t,u)} \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + f(x,t) \tag{6}$$

Oznaczamy:

$$d(x,t,u) = \frac{(1+e)\,k(x,t,u)}{\gamma\, a(x,t,u)}$$
$$\varphi\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \tag{7}$$
$$= \frac{(1+e)\,k(x,t,u)}{\gamma\,[a(x,t,u)]^2} \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + f(x,t)$$

Łatwo wykazać, że:

$$\frac{k(x,t,u)}{a(x,t,u)} > 1$$

Jest to bowiem uwarunkowane fizyczną istotą współczynników filtracji i ściśliwości, natomiast niezależność tych współczynników od nadwyżki ciśnienia porowego

$$\frac{\partial a}{\partial p} = \frac{\partial k}{\partial p} = 0, \qquad p = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{8}$$

zapewnia spełnienie założeń twierdzenia 14 Ładyżenskiej i Uralceva (1962), z którego wynika, że I zagadnienie brzegowe dla równania (6) ma jednoznaczne rozwiązanie $u(x, t)$ wraz ze swoimi pochodnymi $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial t}$.

W pracy Florin zauważono, że dla gruntów o małej ściśliwości, wielkość współczynnika filtracji zależy od gradientu ciśnienia.

W pracy Ładyżenskiej badane jest quasiliniowe równanie typu parabolicznego w obszarze zmienności x, stałego w czasie w jednorodnych warunkach brzegowych. Jednak wszystkie wyniki można przenieść na przypadek zmieniającego się w czasie obszaru (odpowiada to zagadnieniu etapowego wznoszenia budowli ziemnej) lub niejednorodnych warunków brzegowych (zmienne zewnętrzne obciążenie).

Pokrywamy obszar zmienności współrzędnych x i t prostokątną siatką z węzłami (x_i, t_j), czyli

$$x_i = il, \qquad t_j = j\tau;$$

gdzie:
l – krok wzdłuż osi OX,
τ – krok wzdłuż osi OT.

Dla uproszczenia będziemy zakładać, że $h(t)$ – górna granica warstwy gruntu jest łamaną, na którą trafiają brzegowe węzły siatki.

Dla każdego węzła (x_i, t_j) konstruujemy funkcję siatkową y_i^j, czyli $y = y(x, t)$. Wprowadzamy następujące oznaczenia (Samarskij 1962)

$$
\begin{aligned}
& y = y(x, t_{j+1}) = y^{j+1}; \\
& \check{y} = y(x, t_j) = y^j; \\
& y^{(\pm 1)} = y(x \pm l, t) \\
& y_{\bar{x}} = (y - y^{-1}) / l; \\
& y_x = (y^{(+1)} - y) / l; \\
& y_{\bar{t}} = (y - \check{y}) / \tau \\
& (by_{\bar{x}})_x = [b_{i+1}(y_{i+1} - y_i) - \\
& \qquad - b_i(y_i - y_{i-1})] / l^2 \\
& b = b(x, t, y^*); \\
& y^* = 0{,}5(y + y^{(-1)}); \\
& \lambda(y) = 0{,}5(y_{\bar{x}} + y_x)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

W klasie nieciągłych współczynników $\lambda(y) = b^{(+1)}y_x + by_{\bar{x}}$. Przy tym ze wzorów (7), φ należy przekształcić do postaci

$$\varphi = \varphi\left(x, t, u, 2d\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

Zgodnie z twierdzeniem 8 (Samarskij 1962b) dla równania różniczkowego (6) oraz dla warunku brzegowego i początkowego równania (4) można określić następujący schemat różnic skończonych:

$$
\begin{aligned}
& y_i = (by_{\bar{x}})_x + \psi(x, t, y, \lambda(y)) \\
& \alpha_1 y_x + \sigma_1 y = Y_1(t) \text{ dla } x = 0
\end{aligned}
\tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
& \alpha_2 y_{\bar{x}} + \sigma_2 y = Y_2(t) \text{ dla } x = \mathrm{h}(t) \\
& y(x, 0) = y_0(x)
\end{aligned}
\tag{11}
$$

przy tym $y(x_i, t_j)$ jest zbieżne jednostajnie do $u(x, t)$ dla $\tau < \tau_0$ i $l < l_0$, gdy spełnione są następujące warunki:

1) zagadnienie (2)–(4) ma jedyne ciągłe w obszarze (3) rozwiązanie $u(x, t)$;
2) $\frac{\partial u}{\partial t}$ i $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ spełniają warunek Lipschitza odpowiednio względem t i x;
3) funkcje $d\,(x, t, u)$ – patrz równanie (7), mają drugą, a $\varphi(x, t, u, p)$ pierwszą pochodną względem x, spełniające warunek Lipschitza względem x.

Spełnienie warunków 1) i 2) zapewnia twierdzenie 14 (Samarskij 1962a), a warunek (3) będzie spełniony, gdy na funkcje d i φ nałożymy odpowiednie żądania. Rzeczywiście, $d\,(x, t, u)$ i $\varphi(x, t, u, p)$ wyrażają się przez współczynniki filtracji i ściśliwości. Zależność tych ostatnich od naprężenia efektywnego, zależnego od nadwyżki ciśnienia wody w porach, określa się na podstawie danych eksperymentalnych i może być aproksymowana funkcjami dostatecznie dowolnej postaci.

Współczynniki $b(x, t, y^*)$ i $\psi(x, t, y, \lambda(y))$, schematu różnic skończonych równania (10) określone są odpowiednimi funkcjonałami (Samarskij 1962a), przyjmującymi w klasie funkcji gładkich (zagadnienie konsolidacji dla gruntu jednorodnego w obszarze (3) wartości dyskretne $d(x, t, y^*)$ i φ w węzłach (x_i, t_j) prostokątnej siatki.

Na przykład:

$$
\begin{aligned}
& b_i = \frac{2d_i d_{i-1}}{d_i + d_{i-1}}, \quad b_i = 0{,}5(d_i + d_{i-1}) \\
& \psi_i = \varphi_i, \quad \psi_i = 0{,}5(\varphi_{i+1} + \varphi_{i-1})
\end{aligned}
\tag{12}
$$

W zagadnieniu konsolidacji niejednorodnego warstwowego gruntu współczynniki filtracji i ściśliwości mają nieciągłości I rodzaju. W celu określenia funkcjonałów w klasie funkcji nieciągłych w pracy Samarskiego (1962a) podana jest metoda całkowo-interpolacyjna, z której wynikają następujące zależności:

$$b_i = \left[\frac{1}{l} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{d(x, t, y^*)} dx \right]^{-1}$$

$$\psi_i = \frac{1}{l} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \varphi(x, t, y, \lambda(y))\, dx \tag{13}$$

Numeryczne całkowanie w każdym kroku skończono-różnicowej siatki jest uciążliwe. Uwzględniając to i eksperymentalny charakter współczynników, należy zawsze brać takie formuły dla $a(x, t, u)$ i $k(x, t, u)$, aby funkcje $\frac{1}{a(x, t, y^*)}$ i $\varphi(x, t, y, \lambda(y))$ względem x miały oryginały, warunek ten nie jest trudny do spełnienia, spełniają go na przykład funkcje

$$a(x, t, u) = \gamma_1(\rho + q\,\sigma)^{\delta_1}$$

$$k(x, t, u) = \gamma_2(\rho + q\,\sigma)^{\delta_2} \tag{14}$$

gdzie:
$\sigma = \sigma(x, t, u)$ – funkcja liniowa ze względu na x,
$\gamma_1, \gamma_2, \rho, q$ – dowolne funkcje t i u,
δ_1, δ_2 – dowolne liczby.

Rozwiązanie równań różnicowych

Układ skończono-różnicowych równań (10) określonych w każdym punkcie x_i ($1 \le i \le N-1$, N – liczba kroków względem x, $N = \frac{h(t)}{b}$) oraz warunków brzegowych (11) funkcji y w punktach x_0 i x_N określają układ algebraicznych równań nieliniowych względem y_i^{j+1}:

Górny indeks w b, φ i y określa, w jakim momencie czasu należy wziąć te funkcje.

W celu rozwiązania układu (15) wykorzystamy metodę prostej iteracji, rozpatrując zamiast układu (15) odpowiadający mu układ równań liniowych względem y_i^{k+1}, czyli

$$\frac{y_i^{k+1}}{\tau} - \frac{b_{i+1}^k (x, t, y^*)\,[y_{i+1}^{k+1} - y_i^{k+1}]}{l^2} + \frac{-\,b_i^k (x, t, y^*)\,[y_i^{k+1} - y_{i-1}^{k+1}]}{l^2} = \frac{y_i^j}{\tau} + \psi^k (x, t, y, \lambda(y))$$

$$\alpha_1(y_1^{k+1} - y_0^{k+1}) + \sigma_1\, y_0^{k+1} = Y_1^{j+1}(t)$$

$$\alpha_2(y_N^{k+1} - y_{N-1}^{k+1}) + \sigma_2\, y_N^{k+1} = Y_2^{j+1}(t) \tag{16}$$

Jako pierwsze przybliżenie funkcji y^k przyjmujemy jej wartość w momencie czasu $t-\tau$:

$$y_i^1 = y_i^j$$

Proces iteracyjny przerywamy, gdy spełniony jest warunek:

$$\max_i |\, y_i^{k+1} - y_i^k \,| < \varepsilon \tag{17}$$

gdzie ε – zadana dokładność, przy czym $y_i^{j+1} = y_i^{k+1}$.

$$\frac{y_i^{j+1}}{\tau} - \frac{b_{i+1}^{j+1} (x, t, y^*)\,[y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}] - b_i^{j+1} (x, t, y^*)\,[y_i - y_{i-1}]}{l^2} - \varphi^{j+1} (x, t, y, \lambda(y)) = \frac{y_i^j}{\tau}$$

$$\alpha_1(y_1^{j+1} - y_0^{j+1}) + \sigma_1\, y_0^{j+1} = Y_1^{j+1}(t); \qquad \alpha_2(y_N^{j+1} - y_{N-1}^{j+1}) + \sigma_2\, y_N^{j+1} = Y_2^{j+1}(t) \tag{15}$$

Grupując współczynniki przy y_{i+1}^{k+1}, y_i^{k+1}, y_{i-1}^{k+1} w układzie równań (16) otrzymujemy trójdiagonalny układ $N+1$ równań:

$$A_i^k y_{i+1}^{k+1} - B_i^k y_i^{k+1} + C_i^{k+1} y_{i-1}^{k+1} = D_i^k \tag{17}$$

gdzie:

$$A_i^k = \frac{b_{i+1}^k (x, t, y^*)}{l^2}$$

$$C_i^k = \frac{b_i^k (x, t, y^*)}{l^2}$$

$$B_i^k = \frac{b_{i+1}^k (x, t, y^*) + b_i^k (x, t, y^*)}{l^2} - \frac{1}{\tau}$$

$$D_i^k = \frac{y_i^j}{\tau} + \psi^k (x, t, y, \lambda(y))$$

$$A_0 = \alpha_1, \ B_0 = \alpha_1 - \sigma_1, \ D_0 = Y_i^{j+1} (t)$$

$$1 \leq i \leq N-1$$

$$B_N = -(\alpha_2 + \sigma_2), \ C_N = -\alpha_2,$$

$$D_N = Y_2^{j+1} (t), \ C_0 = A_N = 0 \tag{18}$$

Układ (17) rozwiązuje się metodą eliminacji Gaussa i otrzymuje się prosty algorytm określający y_i^{k+1}:

$$\gamma_i = -\frac{C_i}{B_i + A_i \gamma_{i+1}}$$

$$\delta_i = \frac{A_i \delta_{i+1} - D_i}{B_i + A_i \gamma_{i+1}}, \quad 1 \leq i \leq N$$

$$\gamma_N = -\frac{C_N}{B_N}; \quad \delta_N = -\frac{D_N}{B_N}$$

$$y_{i+1} = \delta_{i+1} - \gamma_{i+1} y_i; \quad 0 \leq i \leq N$$

$$y_0 = \frac{\delta_1 A_0 - D_0}{B_0 + \gamma_1 A_0} \tag{19}$$

Na zakończenie rozpatrujemy problem związany z wyborem kroków τ i l. Dla każdego układu i każdego równania różniczkowego w pracach Samarskiego i Samarskiego, Tichonowa podane są oszacowania norm różnic dokładnego i przybliżonego rozwiązania względem τ i l oraz pewna stała wielkość M. Na tej podstawie, znając żądaną dokładność obliczeń i określając N dla danych wartość τ i l, można znaleźć odpowiadające danej dokładności wielkości kroków. Lecz te oszacowania mogą być duże lub mogą być określone za pomocą złożonych formuł z wieloma parametrami. Rzeczywiście, oszacowanie prędkości zbieżności w twierdzeniu (8,2) (Samarskij 1962b) dla naszego układu (10) jest wyraźnie ulepszone w pracy Samarskiego (1962b), jednak i tej, ostatniej nie ma sensu wykorzystywać przy wyborze kroków. Samo istnienie jednostajnej zbieżności daje możliwość określenia błędu rozwiązania przybliżonego w całym przedziale czasowym dla rozważanych obliczeń w obszarze przylegającym na przykład do początkowych wartości $y(x, 0)$. Zmniejszając kroki błąd ten łatwo jest zmniejszyć.

Metodyka omówiona w powyższej pracy będzie wykorzystana do rozwiązania zagadnienia konsolidacji jednorodnego gruntu (H. Kazieko, L. Kazieko 1994).

Literatura

FLORIN W. A. 1948: *Teoria upłotnienija zemlianych mass*. Strojizdat.

KAZIEKO H., KAZIEKO L. 1994: *O nieliniowym zagadnieniu konsolidacji ośrodka trójfazowego.* Przegl. Nauk. Wydz. MiIS, SGGW Z. 6.

ŁADYŻENSKAJA O. A., URALCEVA N. P. 1962: *Krajewaja zadacza dla linejnych i kwazilinejnych paraboliczeskich urawnenij.* Izw. A.N. SSSR, Ser. matem. 26.

SAMARSKIJ A. A. 1962a: *Odnorodnyje raznostnyje schemy dla nielinejnych urawnenij paraboliczeskogo tipa.* Ż. wyczisl. matem. i matem. fiz. 2; nr 1.
SAMARSKIJ A. A. 1962b: *O schodimosti i tocznosti odnorodnych raznostnych schem dla odnomernych i mnogomernych paraboliczeskich urawnenij.* Ż. wyczisl. matem. i matem. fiz. 2; nr 4.
SAMARSKIJ A. A. 1963: *Odnorodnyje raznostnyje schemy na nerawnomernych setkach dla urawnenij paraboliczeskogo tipa.* Ż. wyczisl. matem. i matem. fiz. 3; nr 2.
TICHONOW A. N., SAMARSKIJ A. A. 1961: *Ob odnorodnych raznostnych schemach.* Ż. wyczisl. matem. i matem. fiz. 1; nr 1.

Summary

A numerical solution of a non-linear equation of soil consolidation. A finite-difference solution of a non-linear one-dimensional of soil consolidation is studied for a time-varying region and arbitrary boundary conditions.

Soil characteristics depend on the excess pore pressure. The case of the consolidation of a lagered and unisotropic soil is taken into consideration.

Author's address:
H. Kazieko, L. Kazieko
Warsaw Agricultural University – SGGW
02-787 Warszawa
ul. Nowoursynowska 166
Poland