

POSZUKIWANIE MAKSYMALNEJ LICZBY TERMINÓW WYKONANIA CZYNNOŚCI W HARMONOGRAMACH SIECIOWYCH

Mieczysław Połoński

Streszczenie: W pracy wyprowadzono wzory i przedstawiono dyskusję wyznaczania maksymalnej liczby terminów wykonania pojedynczej czynności oraz wszystkich czynności łącznie zawartych w harmonogramie sieciowym. Rozważono możliwość realizacji czynności bez przerw, jak również z podziałem na dwa etapy. Wyprowadzone wzory zastosowano do analizy prostej, sześcioczynnościowej sieci zależności. Wykazano, że liczba możliwych układów czynności w całym harmonogramie zależy w największym stopniu od terminu zakończenia całego przedsięwzięcia, zapasu całkowitego czasu poszczególnych czynności i liczby wszystkich czynności w sieci zależności. Uzyskane wyniki mają podstawowe znaczenie przy poszukiwaniu algorytmu analizy środków, pozwalającego na połączenie okresu realizacji wszystkich czynności harmonogramu sieciowego z posiadanymi zasobami. Poprawna konstrukcja i analiza harmonogramów sieciowych pozwala z kolei na wiarygodne planowanie i kontrolę wykonania obiektów budowlanych przy zachowaniu różnych uwarunkowań technologiczno-organizacyjnych.

Słowa kluczowe: harmonogram, harmonogram sieciowy, analiza zasobów, PERT, sieć zależności, zarządzanie projektami

WSTĘP

Realizacja każdego obiektu inżynierskiego powinna być poprzedzona sporządzeniem wiarygodnego harmonogramu przebiegu planowanych prac. Z chwilą wprowadzenia harmonogramów sieciowych do praktyki inżynierskiej [Połoński 2001] szybko stwierdzono, że oprócz analizy czasu konieczne jest wprowadzenie powiązania terminów wykonania poszczególnych czynności z dostępnością zasobów, jakie są zużywane w trakcie wykonania planowanych prac. Pierwszym etapem wprowadzanej analizy środków było przypisanie zapotrzebowania na zasoby dla czynności w harmonogramie i ustalenie ich sumarycznego zapotrzebowania w kolejnych dniach realizacji obiektu na podstawie planowanych terminów realizacji poszczególnych czynności wynikających z analizy czasu. Umożliwiało to porównanie planowanego zapotrzebowania na

poszczególne zasoby z rozkładem ich dostępności, lecz nie zapewniało faktycznej dostępności wszystkich środków w planowanych terminach wykonania czynności. W związku z tym podjęto badania nad poszukiwaniem algorytmu analizy środków, pozwalającego na połączenie okresu realizacji wszystkich czynności harmonogramu sieciowego z posiadanymi zasobami przy zachowaniu różnych uwarunkowań technologiczno-organizacyjnych [Połowski 1995]. Jednak problem analizy zasobów jest zagadnieniem bardzo złożonym i jak dotychczas nikomu nie udało się opracować algorytmu optymalizującego rozwiązanie tego zagadnienia, a te które istnieją są na tyle ogólne i ograniczone tak dużą liczbą założeń, że nie znajdują zastosowania przy rozwiązywaniu wielu praktycznych problemów. W związku z tym opracowano szereg algorytmów heurystycznych, które nie zapewniają co prawda rozwiązania optymalnego ze względu na przyjęte kryterium, jednak pozwalają na modelowanie realizacji dowolnego przedsięwzięcia z uwzględnieniem wielu wymaganych ograniczeń przy zastosowaniu powszechnie dostępnych mikrokomputerów klasy PC. Oczywiście w takim przypadku natychmiast rodzi się pytanie o efektywność tych algorytmów.

Jednak, aby odpowiedzieć precyzyjnie na to pytanie, trzeba znaleźć wzorzec, do którego można porównać uzyskiwane z różnych algorytmów rozwiązania. Oczywiście, najlepszym punktem odniesienia byłoby rozwiązanie optymalne. Niestety najczęściej tego rozwiązania nie znamy. Jednak w przypadku bardzo prostych harmonogramów sieciowych istnieje stosunkowo łatwy, chociaż bardzo czasochłonny, sposób wyznaczenia rozwiązania optymalnego. Wystarczy przeanalizować wszystkie możliwe w danym harmonogramie rozwiązania i wybrać najlepsze z nich. Odrębne, bardzo ciekawe pytanie dotyczy liczby równorzędnych, optymalnych rozwiązań – czy istnieje tylko jedno takie rozwiązanie, czy istnieje ich więcej? Oczywiście, zaproponowane rozwiązanie jest mało „eleganckie” i ma bardzo ograniczone zastosowanie, jednak wydaje się, że na razie jest to jedyne możliwe. Istnieje ewentualnie drugie, uproszczone rozwiązanie. Można ten sam harmonogram, z tymi samymi danymi, dotyczącymi czasu i środków, rozwiązywać kilkoma różnymi algorytmami (programami obliczeniowymi), a uzyskane wyniki porównywać między sobą. W przypadku większych harmonogramów pozostaje to na razie jedyną możliwą drogą postępowania, jednak nie prowadzi do wyznaczenia rozwiązania optymalnego.

Próbując znaleźć rozwiązanie optymalne, należy zbudować algorytm, który przeanalizuje wszystkie możliwe, w danym harmonogramie przypadki. Jednak, aby było to możliwe, należy najpierw wyznaczyć liczbę wszystkich możliwych rozwiązań.

MATERIAŁ I METODY

W tym celu rozważmy na początku przypadek najprostszy: harmonogram złożony tylko z jednej czynności. Zakładając, że czas trwania czynności jest liczbą naturalną (najczęściej dni robocze), przyjmijmy następujące oznaczenia:

T – łączny, efektywny czas niezbędny do wykonania czynności,

L – maksymalna liczba dni, w ciągu których należy wykonać czynność.

Rozpatrując ogólniejszy przypadek przyjmijmy, że czynność może być realizowana etapami, tzn. w trakcie prac mogą wystąpić przerwy. Wprowadźmy dalsze oznaczenia:

i – numer kolejnego etapu,

n – liczba etapów, w ciągu których realizowana jest czynność; $i = 1, \dots, n$ (gdy czynność wykonywana jest w jednym etapie $i = 1$),

t_i – czas wykonania i -tego etapu czynności.

Naturalnie, łączny czas realizacji czynności musi pozostać stały, tzn.:

$$\sum_{i=1}^n t_i = T$$

Dalsze oznaczenia:

m – liczba przerw w trakcie wykonania czynności ($m = n - 1$),

j – numer kolejnej przerwy w trakcie wykonania czynności; $j = 0, \dots, n - 1$ (gdy czynność wykonywana jest w jednym etapie $j = 0$),

p_j – czas j -tej przerwy,

P – łączny czas przerw, zauważamy, że $m < T$, a łączny czas przerw (P) wynosi

$$P = \sum_{j=0}^{n-1} p_j,$$

τ – czas realizacji czynności razem z przerwami ($\tau = T + P$),

W_m – liczba wariantów, w jakich może być wykonana pojedyncza czynność przy założeniu m przerw w trakcie jej realizacji,

A_{iw} – numer dnia, w którym rozpoczyna się wykonanie w -tego wariantu i -tego etapu czynności.

Jeśli rozwiązanie ma dotyczyć rzeczywistych czynności, muszą być spełnione następujące warunki:

1. Czas pracy efektywnej nie może być dłuższy niż czas trwania czynności z przerwami, tzn. $T \leq \tau$.

2. Czas trwania czynności z przerwami nie może być dłuższy od maksymalnej liczby dni, w ciągu których należy wykonać czynność, tzn. $\tau \leq L$.

3. Efektywny czas trwania czynności musi być większy od zera, tzn. $T > 0$.

4. Czas realizacji każdego etapu czynności musi być większy od zera, tzn. $t_i > 0$ dla $i = 1, \dots, n$.

5. Czas trwania pojedynczego etapu nie może być dłuższy od efektywnego czasu trwania całej czynności, tzn. $t_i \leq T$ dla $i = 1, \dots, n$.

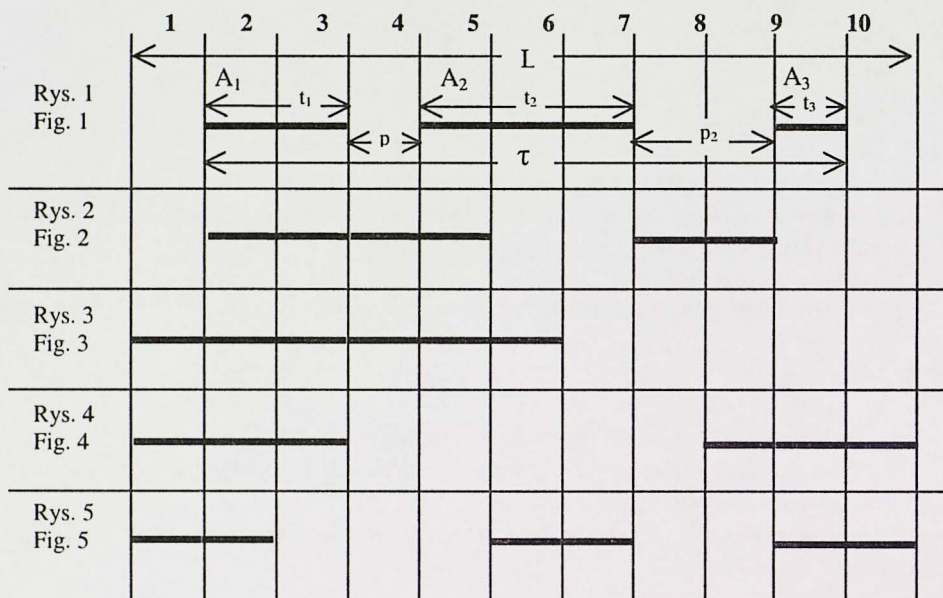
6. Łączny czas przerw nie może być większy od maksymalnej liczby dni przeznaczonych na wykonanie czynności pomniejszony o efektywny czas pracy, tzn. $P \leq (L - T)$.

Zakładając, że $T = 6$, $L = 11$, $m = 2$, na rysunkach 1–5 przedstawiono kilka przykładowych możliwych sposobów wykonania tej czynności.

Odnosząc powyższe rozważania do harmonogramów sieciowych bardzo łatwo wyznaczyć żądane do obliczeń parametry [Połowski 2001]. Czas efektywnej pracy (T) oraz liczbę etapów wykonania czynności (n) narzuca projektant harmonogramu (przy czym najczęściej n waha się w granicach 1–3), a maksymalną liczbę dni, w czasie których należy wykonać czynność, można obliczyć jako:

$$L = T + Z_c$$

gdzie Z_c oznacza zapas całkowity czasu tej czynności obliczony na podstawie analizy czasu. Pozostaje pytanie o maksymalną, możliwą liczbę warunków realizacji tej czynności.



Rys. 1–5. Przykładowe terminy wykonania czynności w postaci harmonogramu Gantta
Fig. 1–5. Examples of task start and end dates in the Gantt view layout

Oznaczając W_m liczbę wariantów, w jakich może być wykonana pojedyncza czynność przy założeniu m przerw w trakcie jej realizacji, rozpatrzmy kolejno następujące przypadki.

I. Realizacja czynności bez przerw ($m = 0$)

$$W_0 = (L - T + 1)$$

a więc na przykład czynność o czasie 3, która musi być wykonana w jednym etapie, w ciągu maksymalnie 6 okresów, może być zrealizowana w czterech wariantach:

$$W_0 = (6 - 3 + 1) = 4.$$

Łatwo zauważyć, że warianty te przedstawiają się w następujący sposób:

$A_{11} = 1$, dni realizacji czynności to 1, 2, 3,

$A_{12} = 2$, dni realizacji czynności to 2, 3, 4,

$A_{13} = 3$, dni realizacji czynności to 3, 4, 5,

$A_{14} = 4$, dni realizacji czynności to 4, 5, 6.

II. Realizacja czynności z jedną obowiązkową przerwą ($m = 1$)

Zakładając, że poszukujemy liczby W_1' wariantów realizacji czynności z jedną obowiązkową przerwą, ale bez rozróżniania jej długości, wynosi ona:

$$W_1' = (T - 1)(L - T)$$

gdyż czynność można podzielić na $T - 1$ sposobów, a liczba terminów, w których może się ona rozpocząć, aby zakończyć nie później niż L -tego dnia, wynosi $L - (T + P) + 1 = L - T$. To znaczy, że na przykład czynność o parametrach $L = 8$, $T = 6$, $P = 1$ może być wykonana na $W_1' = (6 - 1)(8 - 6) = 10$ sposobów.

Dopuszczenie różnych długości przerw ($P \geq 1$; $P_{\max} = L - T$) komplikuje obliczenia. Można jednak zauważyć, że czynność można rozpoczynać kolejno od pierwszego dnia do ostatniego wynoszącego $(L - T)$. Maksymalna długość przerwy, w zależności od dnia rozpoczęcia, wynosi $P, P - 1, P - 2, \dots, 1$. Ponadto czynność można dzielić na $(T - 1)$ sposobów. Wynika z tego, że maksymalna liczba wariantów w tym wypadku wynosi:

$$\begin{aligned} W_1 &= (L - T)(T - 1) + (L - T - 1)(T - 1) + \dots + 1(T - 1) = \\ &= (T - 1)((L - T) + (L - T - 1) + \dots + 1) = (T - 1)(1 + 2 + 3 + \dots + (L - T)) \end{aligned}$$

Na przykład dla czynności długości $T = 5$, która musi być wykonana w ciągu $L = 8$ dni, maksymalna długość przerwy (czyli łączny czas przerw w ogólniejszym przypadku) $P = L - T = 8 - 5 = 3$, wówczas:

$$W_1 = (1 + 2 + 3)(5 - 1) = 24$$

Na rysunku 6 zestawiono w postaci harmonogramu liniowego wszystkie 24 możliwe sposoby wykonania tej czynności.

Ostatecznie łączna maksymalna liczba wariantów wykonania jednej czynności bez podziału oraz z podziałem na dwa etapy wynosi:

$$W_{01} = W_0 + W_1 = (L - T + 1) + (1 + 2 + 3 + \dots + (L - T))(T - 1)$$

Korzystając ze wzoru na sumę ciągu arytmetycznego, wyrażenie można przekształcić następująco:

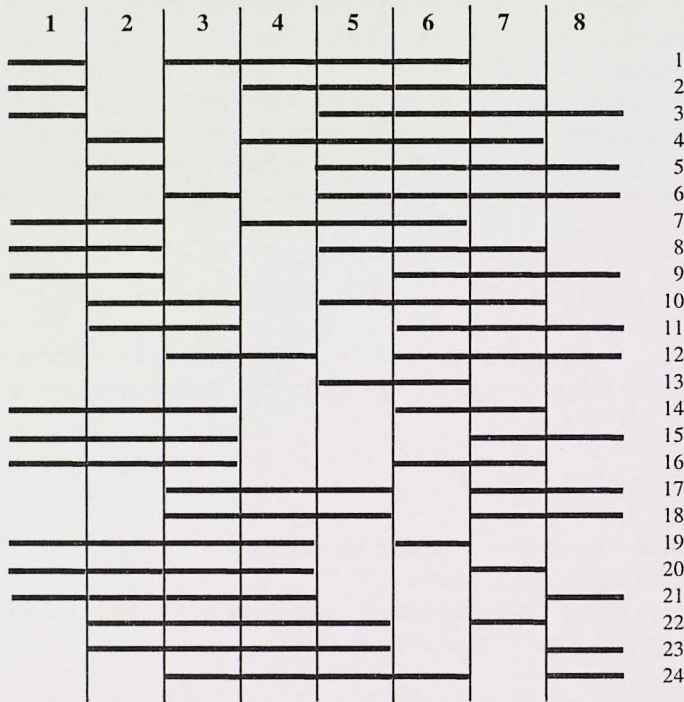
$$W_{01} = (L - T + 1) + \frac{(L - T)(L - T + 1)}{2}(T - 1) = (L - T + 1) \left(1 + \frac{(L - T)(T - 1)}{2} \right)$$

Kontynuując rozważania dla przykładowej czynności o parametrach $T = 5$, $L = 8$, łączna liczba możliwych wariantów jej wykonania wynosi:

$$W_{01} = (8 - 5 + 1) \left(1 + \frac{(8 - 5)(5 - 1)}{2} \right) = 4 \cdot 7 = 28$$

Znając liczbę wariantów wykonania pojedynczej czynności, można wyznaczyć maksymalną liczbę wariantów wykonania harmonogramu sieciowego (HW_m) złożonego z K czynności rzeczywistych (o czasie trwania $T > 0$) i m przerw w trakcie wykonywania czynności:

$$HW_m = \prod_{k=1}^K W_k$$



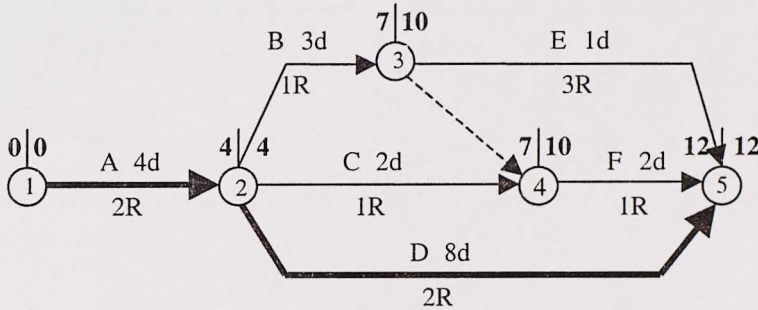
Rys. 6. Zestawienie wszystkich możliwych terminów wykonania czynności
Fig. 6. Juxtaposition of all possible task start and end dates

WYNIKI I DISKUSJA

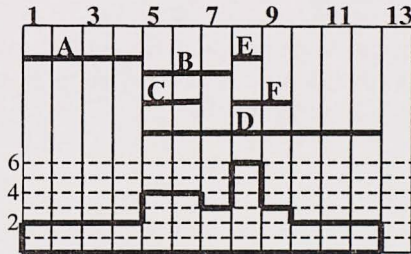
Na rysunku 7 przedstawiono przykład bardzo prostej sieci o sześciu czynnościach rzeczywistych i jednej czynności zerowej.

Czas trwania poszczególnych czynności w dniach podano nad strzałką, a liczbę jednego środka potrzebnego każdego dnia do jej wykonania – pod strzałką. Znając najwcześniejsze i najpóźniejsze terminy zaistnienia zdarzeń, można obliczyć najwcześniejsze i najpóźniejsze terminy dla czynności. Terminy najwcześniejsze i najpóźniejsze wyznaczają skrajne położenie każdej czynności. Przedstawiono je w tabeli 1 oraz w postaci harmonogramów liniowych na rysunku 8 i 9. Pod układem czynności podano

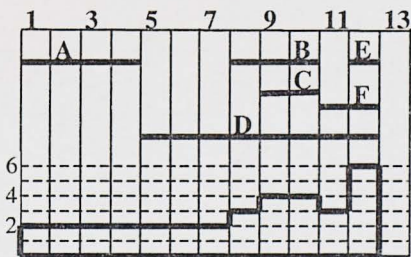
wykres sumarycznego zapotrzebowania na analizowany środek w kolejnych dniach wykonania przedsięwzięcia, wynikający z planowanych terminów realizacji poszczególnych czynności oraz ich zapotrzebowania na środek (podany na rys. 7). Jak wynika z obliczeń, ścieżka krytyczna przebiega przez zdarzenia 1, 2, 5, tzn. że na ścieżce krytycznej leżą czynności A i D. Te czynności będą możliwe do wykonania tylko w jednym wariantcie.



Rys. 7. Schemat harmonogramu sieciowego
Fig. 7. Diagram of network schedule



Rys. 8. Układ czynności i wykres sumowy środków według terminów najwcześniejszych analizy czasu
Fig. 8. The earliest task start and end dates and chart of summary resources according to task dates



Rys. 9. Układ czynności i wykres sumowy środków według terminów najpóźniejszych analizy czasu
Fig. 9. The latest task start and end dates and chart of summary resources according to task dates

Tabela 1. Numery zdarzeń (ZP , ZN), czas czynności (T), wczesne i późne terminy wykonania czynności (NWP , NPK), zapas czasu czynności (ZC) oraz liczba wariantów wykonania czynności (W_0 , W_1 , W_{01})

Table 1. The events number (ZP , ZN), duration (T), task start and end (NWP , NPK), time slack of task (ZC) and number of variant of task realization (W_0 , W_1 , W_{01})

Z P	Z N	T	N W P	N W K	N P P	N P K	Z C	$L = T + ZC$	$L - T + 1$	$L - T$	$T - 1$	W_0	W_1	W_{01}
1	2	4	0	4	0	4	0	4	1	0	3	1	0	1
2	3	3	4	7	7	10	3	6	4	3	2	4	12	16
2	4	2	4	6	8	10	4	6	5	4	1	5	10	15
2	5	8	4	12	4	12	0	8	1	0	7	1	0	1
3	5	1	7	8	11	12	4	5	5	4	0	5	0	5
4	5	2	7	9	10	12	3	5	4	3	1	4	6	10

Łącznie:

Sum: 400 12 000

W tabeli 1 przedstawiono obliczenia wariantów realizacji każdej czynności: bez podziału (W_0), z jednym podziałem (W_1) oraz łącznie (W_{01}). Jak widać, łączna liczba wariantów realizacji wszystkich czynności w harmonogramie bez podziału (HW_0) wynosi 400, a z jednym podziałem (HW_{01}) 12 000.

Załóżmy jednak, że modelowane przedsięwzięcie może być opóźnione o jeden lub dwa dni. Obliczenia wyglądałyby wówczas następująco: przy opóźnieniu o 1 dzień, jak w tabeli 2, przy opóźnieniu o 2 dni, jak w tabeli 3.

Tabela 2. Numery zdarzeń (ZP , ZN), czas czynności (T), wczesne i późne terminy wykonania czynności (NWP , NPK), zapas czasu czynności (ZC) oraz liczba wariantów wykonania czynności (W_0 , W_1 , W_{01}) przy opóźnieniu wykonania przedsięwzięcia o 1

Table 2. The events number (ZP , ZN), duration (T), task start and end (NWP , NPK), time slack of task (ZC) and number of variant of task realization (W_0 , W_1 , W_{01}) for deadline delayed to 1

Z P	Z N	T	N W P	N W K	N P P	N P K	Z C	$L = T + ZC$	$L - T + 1$	$L - T$	$T - 1$	W_0	W_1	W_{01}
1	2	4	0	4	1	5	1	5	2	1	3	2	3	5
2	3	3	4	7	8	11	4	7	5	4	2	5	20	25
2	4	2	4	6	9	11	5	7	6	5	1	6	15	21
2	5	8	4	12	5	13	1	9	2	1	7	2	7	9
3	5	1	7	8	12	13	5	6	6	5	0	6	0	6
4	5	2	7	9	11	13	4	6	5	4	1	5	10	15

Łącznie:

Sum: 3600 2 126 250

Tabela 3. Numery zdarzeń (ZP , ZN), czas czynności (T), wczesne i późne terminy wykonania czynności (NWP , NPK), zapas czasu czynności (ZC) oraz liczba wariantów wykonania czynności (W_0 , W_1 , W_{01}) przy opóźnieniu wykonania przedsięwzięcia o 2

Table 3. The events number (ZP , ZN), duration (T), task start and end (NWP , NPK), time slack of task (ZC) and number of variant of task realization (W_0 , W_1 , W_{01}) for deadline delayed to 2

Z P	Z N	T	N W P	N W K	N P P	N P K	Z C	$L = T + ZC$	$L - T + 1$	$L - T$	$T - 1$	W_0	W_1	W_{01}
1	2	4	0	4	2	6	2	6	3	2	3	3	9	12
2	3	3	4	7	9	12	5	8	6	5	2	6	30	36
2	4	2	4	6	10	12	6	8	7	6	1	7	21	28
2	5	8	4	12	6	14	2	10	3	2	7	3	21	24
3	5	1	7	8	13	14	6	7	7	6	0	7	0	7
4	5	2	7	9	12	14	5	7	6	5	1	6	15	21
Łącznie: Sum:												15876	42674688	

PODSUMOWANIE

Jak wynika z przeprowadzonej analizy, liczba możliwych wariantów zależy w dużej mierze od liczby czynności w sieci zależności oraz gwałtownie rośnie wraz ze wzrostem zapasów całkowitych czasu tych czynności. W analizowanym przykładzie rozważano przypadek harmonogramu o sześciu czynnościach. Harmonogramy używane w praktyce inżynierskiej liczą najczęściej około 100 do 300 czynności, czasami przekraczają 1000. Terminy realizacji całości robót w dniach roboczych to często 150–500 dni, zapasy całkowite czasu poszczególnych czynności wynoszą od kilku do kilkudziesięciu dni.

Wynika z tego, że próba znalezienia rozwiązania optymalnego analizy środków drogą przeszukiwania wszystkich możliwych rozwiązań może być stosowana jedynie w odniesieniu do bardzo prostych harmonogramów sieciowych i będzie wymagała bardzo wydajnego komputera. Na szczęście, z praktycznego punktu widzenia najczęściej poszukiwane jest rozwiązanie bez podziału czynności na etapy, co jak wynika z przeprowadzonych obliczeń, znacznie ogranicza liczbę możliwych wariantów układu czynności.

PIŚMIENNICTWO

- Czechowski T., 1968. Elementarny wykład rachunku prawdopodobieństwa. PWN, Warszawa.
- Leitner R., Żakowski W., 1972. Matematyka. Część II. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- Połośki M., 1995. Planowanie realizacji inwestycji melioracyjnych SGGW funkcji czasu SGGW środków na podstawie harmonogramów sieciowych. Wydawnictwo SGGW, Warszawa.
- Połośki M., 2001. Harmonogramy sieciowe w robotach inżynierskich. Wydawnictwo SGGW, Warszawa.

SEARCHING OF MAXIMUM NUMBER OF THE REALIZATION DATES OF TASK IN THE NETWORK SCHEDULE

Abstract: The aim of study was to estimate and discuss the maximum number of the realization dates of task and of all tasks contained in a network schedule time – limit. In this paper was considered task realization without any breaks as well as with division into two stages. Worked out formula was used to analyse very simple network schedule created from six tasks. In the second part of article it was proved that the number of possible task structures in the whole schedule depends mostly on the deadline realization time of enterprise, whole time slack in each task and on the number of all tasks in chart schedule. Obtained results have basic meaning while looking for an algorithm of resource analysis which enables to connect for all task start and end dates with available sources. Properly constructions and analysis of network schedule is necessary to create an effective project plan while keeping various technologic and organization conditions.

Key words: schedule, network schedule, resource analysis, PERT, chart schedule, project management

*M. Połowski, Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie, Katedra Geoinżynierii,
ul. Nowoursynowska 166, 02-787 Warszawa
e-mail: polonski@alpha.sggw.waw.pl*