

PRÓBKOWANIE OSZCZĘDNE W OBRAZOWANIU METODĄ REZONANSU MAGNETYCZNEGO

Compressive sensing in magnetic resonance imaging

Fabian Bogusz, Tomasz Pięciak (Kraków)

Streszczenie

Próbkowanie oszczędne jest nowym paradygmatem teoretycznym, który rewolucjonizuje dziedzinę przetwarzania sygnałów, w szczególności w kontekście medycznych oraz innych wszechobecnych technicznych systemów w obecnym świecie cyfrowym. Metodologia próbkowania oszczędnego wykorzystuje własności rzadkości oraz niskiej koherencji danych oraz umożliwia rekonstrukcję sygnałów z danych próbkowanych nierównomiernie i przy uwzględnieniu znacznie mniejszej ilości próbek niż wymaga to tradycyjne twierdzenie Nyquista-Shannona o próbkowaniu. W niniejszej pracy zaprezentowano krótkie wprowadzenie do metody próbkowania oszczędnego w przystępnej formie oraz przedstawiono wykorzystanie tej techniki w obrazowaniu dyfuzji mózgu metodą rezonansu magnetycznego. Uzyskane rezultaty wskazują, iż technika próbkowania oszczędnego może zostać użyta do rekonstrukcji miar ilościowych w obrazowaniu tensora dyfuzji, takich jak anizotropia frakcjonalna czy średnia dyfuzyjność.

Abstract

Compressed sensing is a new theoretical paradigm that revolutionizes the signal processing area, especially in medical and other prevalent technical systems in the current digital world. The compressed sensing methodology uses the sparsity and incoherence properties of the signal. It enables the recovery of the data from non-uniformly far fewer samples than required by the traditional Nyquist-Shannon sampling theorem. In this paper, we present a brief preface to the compressed sensing principle in an accessible form and show a proof-of-concept of this technique in the diffusion magnetic resonance of the brain. The preliminary results show the compressed sensing methodology can be successfully used to restore quantitative diffusion tensor measures such as fractional anisotropy or mean diffusivity.

Wprowadzenie

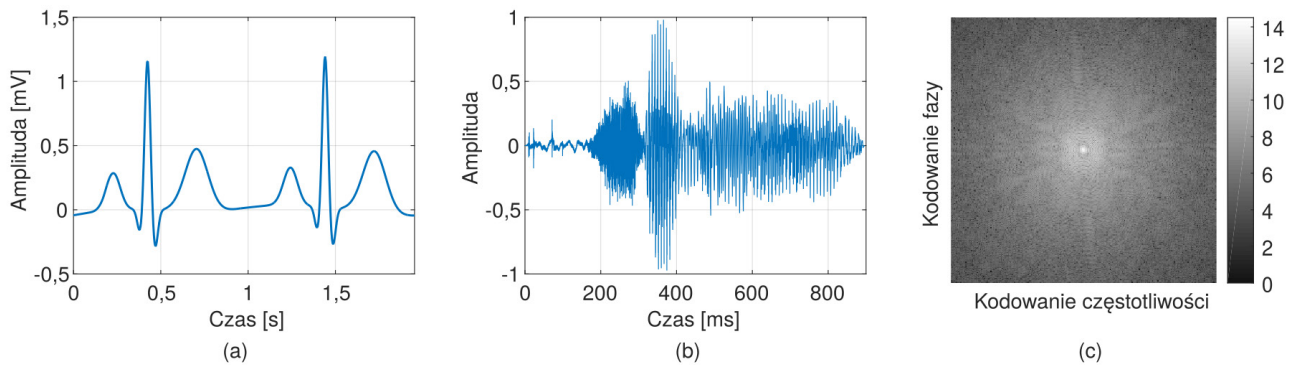
Cały otaczający nas świat jest pełen różnorodnych sygnałów. Każdy przedmiot, roślina, zwierzę, a nawet człowiek, ziemia, woda bądź powietrze może być ich źródłem. Jeżeli pewna wielkość fizyczna zostanie w odpowiedni sposób zmierzona w kolejnych chwilach czasu, to możemy wówczas mówić o pewnego rodzaju sygnale. Sygnałem mogą być więc wielkości opisujące siłę i kierunek wiatru, poziom drgań skorupy ziemskiej, odgłos skrzydeł motyla, mowy człowieka czy zjawiska elektryczne zachodzące w mięśniu sercowym. Na ryc. 1 przedstawiono trzy przykłady

sygnałów, odpowiednio sygnał elektrokardiograficzny, sygnał akustyczny oraz sygnał uzyskany metodą obrazowania rezonansem magnetycznym reprezentowany w postaci dwuwymiarowego obrazu.

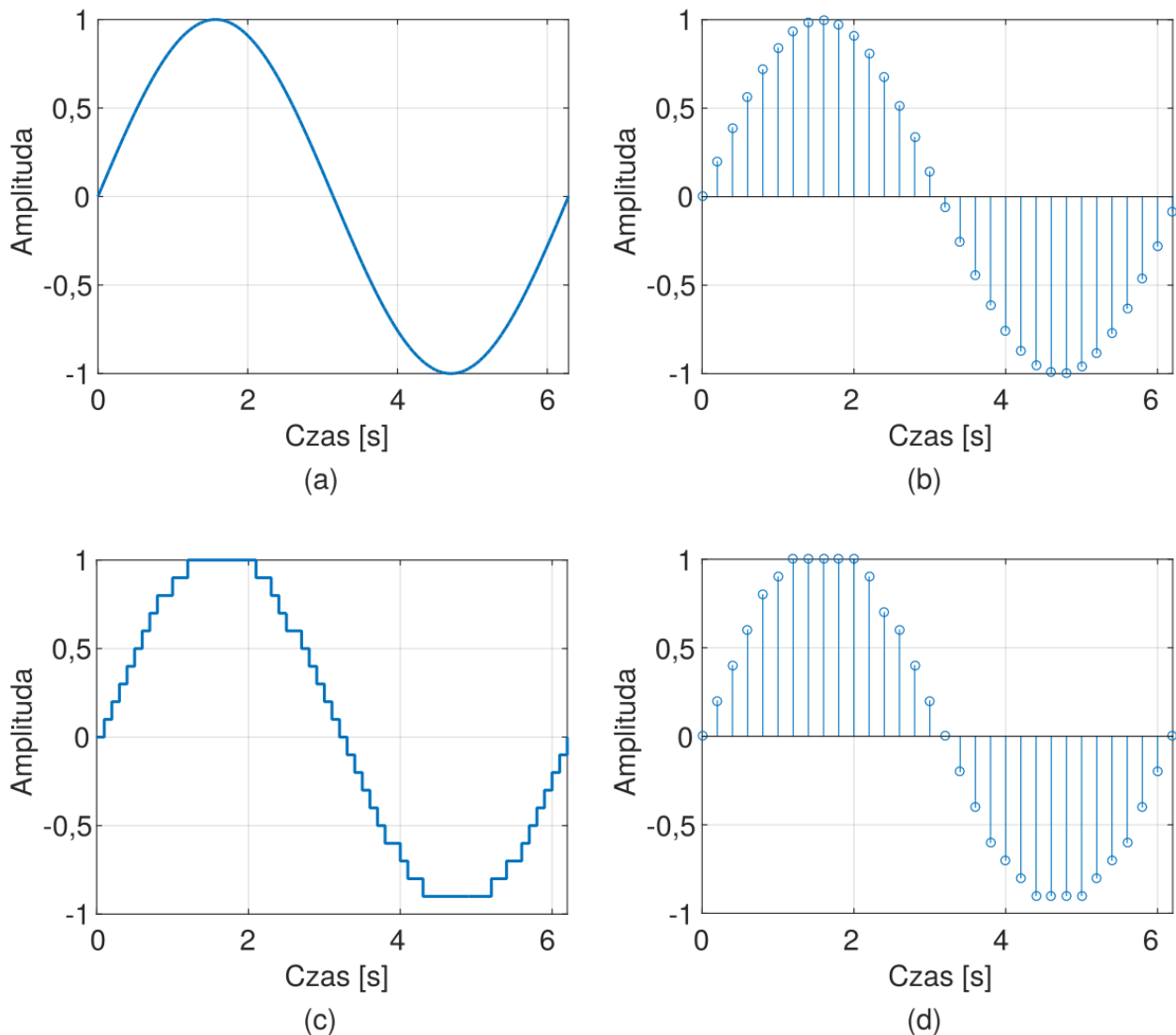
Każdy sygnał niesie informację o badanym zjawisku – o jego nasileniu, czasie trwania, o tym, czy jest zjawiskiem powtarzalnym, czy jedynie jednorazowym epizodem. Istnieją zjawiska generujące znaczne ilości energii, do których należą m.in. trzęsienia ziemi, huragany lub wybuchy supernowej. Aktywność elektryczna mózgu bądź pojedyncze fotony padające na matrycę aparatu fotograficznego w nocy cechują się z kolei niską wykrywalnością. Do każdego

rodzaju wielkości mierzalnej stosuje się odpowiednie sensory, które wzmacniają lub osłabiają rejestrowaną wielkość, tak aby analiza sygnału nie przysparzała problemów.

W znacznej większości mierzone sygnały są analogowe (Ryc. 2a). Oznacza to, iż wartość sygnału jest znana w każdej chwili czasu. Dla zobrazowania tego przykładem weźmy pod uwagę dźwięki wytwarzane



Ryc. 1. Przykłady sygnałów: (a) sygnał elektrokardiograficzny, (b) sygnał akustyczny oraz (c) sygnał uzyskany metodą obrazowania rezonansem magnetycznym.



Ryc. 2. Reprezentacja sygnału sinusoidalnego $s(t) = \sin(t)$: (a) sygnał analogowy, (b) sygnał poddany operacji próbkowania (sygnał dyskretny), (c) proces kwantyzacji sygnału oraz (d) ostateczny sygnał cyfrowy.

podczas koncertu orkiestry symfonicznej odbierane przez nasze uszy. Znamcy muzyki są w stanie stwierdzić, jaki dźwięk jest grany w każdej chwili czasowej. Jest to ogromna ilość informacji do przetworzenia przez nasz mózg. Jeśli chcielibyśmy nagrać koncert w takiej formie, w jakiej go słyszymy, potrzebowalibyśmy do tego nośnika danych o nieskończonej pojemności ze względu na konieczność zapisu sygnału akustycznego o nieskończonej ilości kolejnych wartości. Z tego powodu w celu reprezentacji koncertu na nośniku elektronicznym stosuje się zabieg próbkowania (Ryc. 2b). Wartość amplitudy dźwięku jest zapisywana co pewien określony czas, nazywany okresem próbkowania, w taki sposób, aby możliwe było ograniczenie informacji niesionej przez sygnał. Przy odpowiednim doborze odstępów czasowych pomiędzy rejestracją kolejnych próbek człowiek nie zauważy różnicy między oryginałem a elektroniczną kopią. Ten proces jest nazywany dyskretyzacją (lub próbkowaniem), a częstość rejestracji próbek – częstotliwością próbkowania sygnału.

W postaci cyfrowej nie jest jednak możliwe przedstawienie dowolnej wartości sygnału ze względu na ograniczenia urządzeń przetwarzających sygnał analogowy na cyfrowy, tzw. przetworników analogowo-cyfrowych, czy nieidealną reprezentację liczby w maszynie cyfrowej. Z tego względu stosuje się zabieg kwantyzacji sygnału dyskretnego (Ryc. 2c). Kwantyzacja sygnału oznacza, iż wartość rzeczywista sygnału jest zapisywana jako najbliższa wartość, którą można już przedstawić w pamięci urządzenia cyfrowego. Proces ten możemy porównać do zaokrąglania liczby. W ten sposób z sygnału analogowego poprzez proces dyskretyzacji i kwantyzacji otrzymywany jest sygnał cyfrowy, który z kolei można już zapisać na nośniku cyfrowym (Ryc. 2d).

Reprezentacja sygnału w innej dziedzinie

Reprezentacja zmiany danej wielkości fizycznej w czasie niekoniecznie musi mieć jedną formę. Sygnał w dziedzinie czasu może zostać przedstawiony w innej równoważnej dziedzinie, zachowując przy tym w pełni niesioną przez siebie informację [7]. Reprezentacja w innej dziedzinie, na przykład w dziedzinie częstotliwości, pozwala m.in. na analizę właściwości częstotliwościowych sygnału. Proces przekształcenia sygnału do innej dziedziny jest nazywany transformacją.

Jedną z najbardziej znanych transformacji jest przekształcenie Fouriera, nazwane tak na cześć Jeana-Baptiste Josepha Fouriera¹. Transformacja ta umożliwia przekształcenie sygnału w dziedzinie czasu do reprezentacji sygnału w dziedzinie częstotliwości. Reprezentacją częstotliwościową sygnału nazywany jest wynik przekształcenia Fouriera. W ten sposób można wyekstrahować informację m.in. o dominującej częstotliwości obecnej w sygnale, a więc odpowiedzieć na pytanie, jak często rejestrowane zjawisko powtarza się. Procedurę transformacji Fouriera można zobrazować następująco: sygnał w dziedzinie czasu jest przedstawiany (zazwyczaj) za pomocą nieskończonej sumy funkcji sinus i cosinus o różnych częstotliwościach i amplitudach. W dużym uproszczeniu można powiedzieć, iż wysoka wartość amplitudy w reprezentacji częstotliwościowej dla zadanej wartości częstotliwości oznacza, iż sygnał powtarza się z tą częstotliwością.

Innym typem transformacji jest przekształcenie falkowe. Podobnie jak w przypadku transformacji Fouriera analizowany sygnał jest przedstawiany w postaci sumy innych funkcji bazowych (sinus i cosinus w przypadku przekształcenia Fouriera). Funkcje bazowe transformacji falkowej różni od tych stosowanych w transformacji Fouriera to, że nie reprezentują pojedynczej częstotliwości, tak jak funkcje sinusoidalne, ale pewien ich zakres. Ta cecha powoduje, iż jednocześnie do informacji o pewnym zakresie częstotliwości posiada się również wiedzę o lokalizacji wystąpienia takiego zakresu częstotliwości w danym przedziale czasu. Dla zobrazowania problemu posłużymy się przykładem mowy ludzkiej. Wypowiadając dany wyraz, np. „pies”, możemy zauważyć, że każda głoska charakteryzuje się inną częstotliwością drgań aparatu mowy (m.in. dlatego różnią się od siebie). Zmiana zestawu częstotliwości zachodzi w miarę upływu wypowiedzania tego słowa w czasie. W takich przypadkach, kiedy zakres dominujących częstotliwości zmienia się w trakcie upływu czasu, transformacja falkowa może zostać z powodzeniem wykorzystana do analizy sygnałów.

Transformacje sygnału umożliwiają analizę własności sygnałów, ale mogą również posłużyć m.in. do kompresji danych – zmniejszenia objętości danych przy zachowaniu porównywalnej ilości informacji. W ten sposób można na przykład zapisać dużą liczbę utworów muzycznych za pomocą popularnego formatu MP3 (ang. *MPEG Audio Layer III*) lub

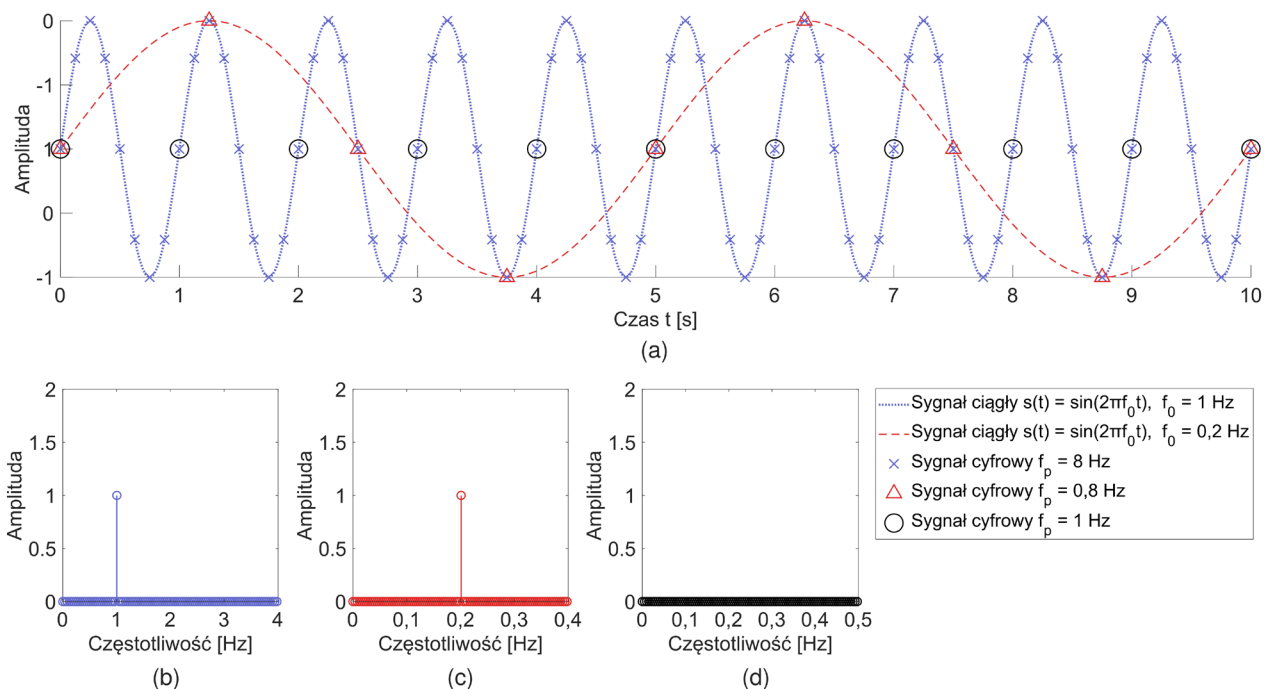
¹ Jean-Baptiste Joseph Fourier (ur. 1768, zm. 1830) – francuski matematyk i fizyk, znany z prac nad zagadnieniami wymiany ciepła oraz teorią funkcji rzeczywistych. Pokazał, w jaki sposób przewodnictwo cieplne ciał stałych może być analizowane za pomocą ciągów nieskończonych funkcji sinus i kosinus [3].

fotografii za pomocą formatu JPEG (ang. *Joint Photographic Experts Group*), bądź zmniejszyć czas potrzebny do transmisji danych na odległość.

Dyskretyzacja sygnału w ujęciu klasycznym podlega ściśle określonym regułom. Proces próbkowania musi spełniać tzw. twierdzenie o próbkowaniu, nazywane również twierdzeniem Nyquista-Shannona^{2,3}. Sygnały powinny być próbkowane w taki sposób, aby istniała możliwość ich wiernego odtworzenia z ciągu wartości. Jeśli kolejne wartości będą pobierane zbyt rzadko, wtedy pominiemy informację o składowych o wyższych częstotliwościach występujących w sygnale, a rekonstrukcja nie będzie przypominać sygnału sprzed procesu dyskretyzacji. Prawidłowe próbkowanie jest powiązane z informacją zawartą w widmie częstotliwościowym sygnału, czyli informacją o częstotliwościach obecnych w oryginalnym sygnale. Często taką informację znamy jeszcze przed procesem dyskretyzacji lub też ograniczamy widmo poprzez zastosowanie uprzedniej filtracji, czyli

znielowania obecności niektórych częstotliwości w widmie sygnału.

Twierdzenie o próbkowaniu mówi nam o tym, że częstotliwość próbkowania powinna być co najmniej dwa razy większa w stosunku do najwyższej częstotliwości występującej w widmie sygnału, tzw. częstotliwości Nyquista. Odwrotnością częstotliwości próbkowania (f_p) jest tzw. okres próbkowania ΔT ($\Delta T = 1/f_p$). Proces dyskretyzacji powoduje powstanie kopii widma sygnału umieszczonych w odległościach równych wielokrotności częstotliwości próbkowania [7]. Jeśli ta częstotliwość została dobrana prawidłowo, to kolejne kopie widma nie nakładają się na siebie. Innymi słowy poszczególne częstotliwości w widmie sygnału reprezentowane są w sposób jednoznaczny. Natomiast kiedy częstotliwość próbkowania jest zbyt niska, kolejne kopie widma zaczynają nachodzić na siebie. W tym przypadku nie ma możliwości rozróżnienia poszczególnych składowych widma od siebie. Powoduje to powstanie tzw. zjawiska aliasingu



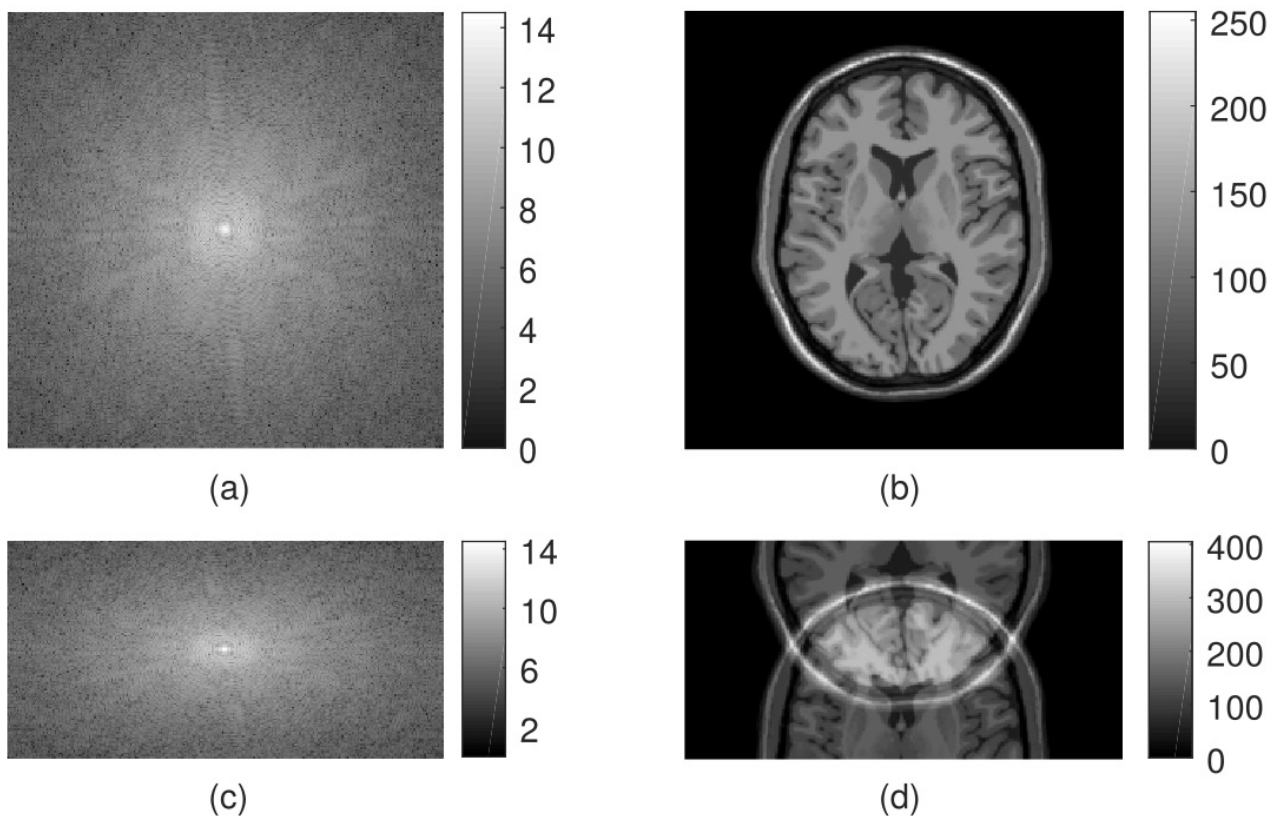
Ryc. 3. Próbkowanie i rekonstrukcja sygnału sinusoidalnego $s(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ oraz reprezentacja częstotliwościowa zrekonstruowanych sygnałów: (a, b) próbkowanie z częstotliwością $f_p = 8$ Hz pozwala poprawnie zrekonstruować sygnał sinusoidalny o zadanej częstotliwości $f_0 = 1$ Hz, (a, c) próbkowanie z częstotliwością $f_p = 0,8$ Hz doprowadza do zjawiska aliasingu (zrekonstruowany został sygnał o częstotliwości $f_0 = 0,2$ Hz), (a, d): próbkowanie z częstotliwością $f_p = 1$ Hz w tym szczególnym przypadku skutkuje sygnałem o amplitudzie równej zero.

² Harry Nyquist (ur. 1889, zm. 1976) – amerykański fizyk i inżynier, autor teoretycznych i praktycznych podwalin telekomunikacji. W roku 1928 opublikował pracę „Certain Topics in Telegraph Transmission Theory”, w której wykazał, że częstotliwość próbkowania sygnału analogowego musi być przynajmniej dwa razy większa niż najwyższa składowa częstotliwościowa w sygnale. Nyquist pracował nad wieloma innymi zagadnieniami, w tym nad matematycznym wyjaśnieniem szumu termalnego, nazywanego dzisiaj szumem Nyquista [3].

³ Claude Shannon (ur. 1916, zm. 2001) – amerykański matematyk i inżynier, autor podstaw teorii informacji, układów cyfrowych oraz matematycznego modelu komunikacji. Shannon zastąpił ze swojej pracy magisterskiej pt. „A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits”, w której zdefiniował podstawy układów cyfrowych używając algebry Boole'a [3].

w dziedzinie czasu (Ryc. 3) lub reprezentacji przestrzennej sygnału (Ryc. 4). Przyjrzyjmy się dla przykładu dwóm sygnałom sinusoidalnym przedstawionym na ryc. 3. Oryginalny sygnał cechuje się ściśle określoną częstotliwością (częstotliwość sinusoidy $f_0 = 1$ Hz; sygnał niebieski), a więc punkty w takiej samej fazie są oddalone od siebie o długość okresu

Kiedy sygnał zawiera wiele różnych składowych, te o częstotliwościach wyższych od częstotliwości Nyquista nie są wiernie odtwarzane, co w konsekwencji skutkuje znacznym zniekształceniem sygnału. Na ryc. 4a oraz 4b zestawiono odpowiednio sygnał uzyskany metodą obrazowania rezonansem magnetycznym próbkowany zgodnie z twierdzeniem Nyquista-



Ryc. 4. Zjawisko aliasingu dla sygnału uzyskanego metodą obrazowania rezonansem magnetycznym: (a) sygnał prawidłowo próbkowany w dziedzinie częstotliwości oraz (b) jego rekonstrukcja za pomocą dwuwymiarowego odwrotnego przekształcenia Fouriera, (c) sygnał w dziedzinie częstotliwości został zarejestrowany z pominięciem co drugiej próbki w kierunku kodowania fazy (oś pionowa), a następnie (d) poddany odwrotnemu przekształceniu Fouriera uwidoczniając zjawisko aliasingu w kierunku kodowania fazy.

sygnału. Jeżeli próbki będą pobierane zbyt rzadko, wówczas istnieje możliwość rekonstrukcji sinusoidy o niższej częstotliwości w stosunku do pierwotnego sygnału (zrekonstruowano sinusoidę o częstotliwości $f_0 = 0,2$ Hz; sygnał czerwony). Próbkowanie sygnału z częstotliwością 1 Hz w tym przypadku doprowadzi do pobrania próbek sygnału o wartościach zerowych. Jednakże w sytuacji, kiedy faza zarejestrowanej próbki byłaby niezerowa, na widmie pojawi się prążek dla częstotliwości równej zero, o amplitudzie zależnej od wartości sygnału w tym punkcie – zrekonstruowany zostanie sygnał stały o takiej wartości. To pokazuje, iż dobór częstotliwości próbkowania jest kluczowy podczas akwizycji danych. Do poprawnej rekonstrukcji sygnału z ryc. 3 powinniśmy więc zastosować próbkowanie większe od wartości $f_p = 2$ Hz.

-Shannona oraz sygnał poprawnie zrekonstruowany za pomocą odwrotnego przekształcenia Fouriera. Dla porównania na ryc. 4c i 4d przedstawiono sygnał podpróbkowany z pominięciem co drugiej próbki w kierunku kodowania fazy (twierdzenie o próbkowaniu nie jest zatem spełnione) oraz zrekonstruowany, przedstawiający zjawisko aliasingu w kierunku kodowania fazy.

Próbkowanie niejednorodne i rzadka reprezentacja sygnału

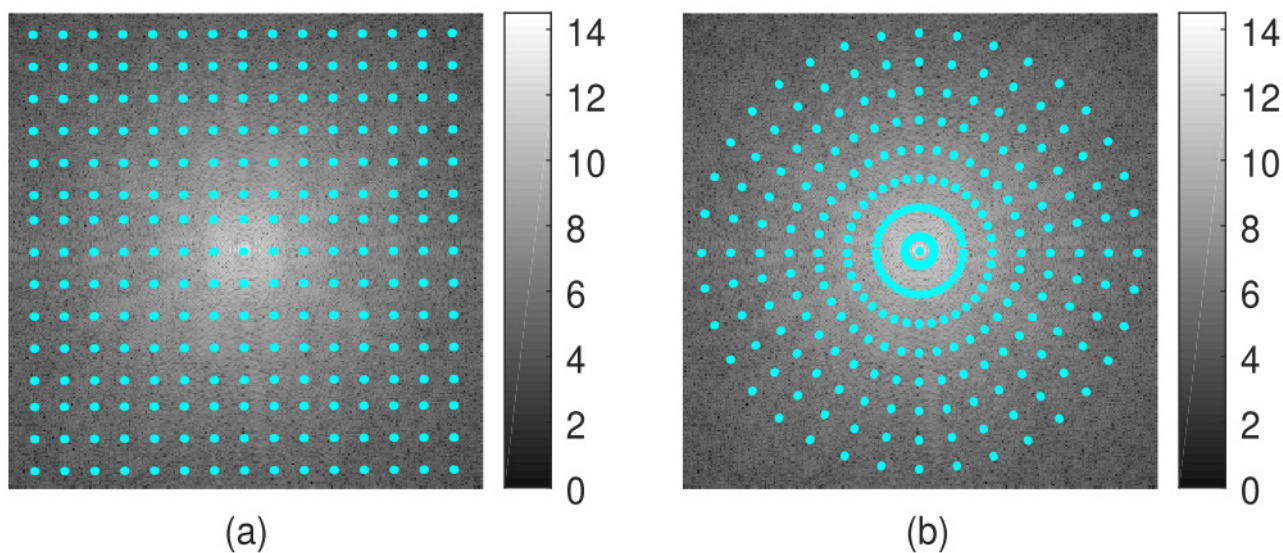
W tradycyjnym podejściu do dyskretyzacji sygnału próbki są pobierane w jednakowych odstępach czasowych, ściśle określonych przez twierdzenie o próbkowaniu. Jednakże w związku z ograniczeniami

tego podejścia opracowana została nowa technika, nazywana powszechnie próbkowaniem oszczędnym (ang. *compressed sensing*), która diametralnie różni się od metody konwencjonalnej. W przeciwieństwie do klasycznej dyskretyzacji kolejne wartości sygnału są pobierane w sposób niejednorodny, a liczba próbek jest znacznie mniejsza w stosunku do tradycyjnej metody [2, 6]. W ten sposób można zaoszczędzić pamięć nośnika cyfrowego bądź przyspieszyć akwizycję sygnałów, które wymagają długiego czasu pomiaru.

Próbkowanie oszczędne jest często porównywane do konwersji. Mniej znaczące dane są pomijane, przez co ich objętość ulega zmniejszeniu. Jednakże konwersja wymaga sygnału próbkowanego metodą klasyczną, który następnie jest brany „pod lupę” w celu

równoznaczny ze zwiększoną liczbą próbek reprezentujących komponenty sygnału o niskich częstotliwościach w stosunku do zmniejszonej liczby próbek reprezentujących wyższe częstotliwości (np. szum).

Ta nowatorska technika pozwala skrócić czas m.in. obrazowania metodą rezonansu magnetycznego [6]. Technologia w tej dziedzinie rozwinęła się już na tyle, że czas akwizycji jest zdeterminowany bezpieczeństwem pacjenta oraz samą fizyką pomiaru. Stosowanie próbkowania oszczędnego pozwala ominąć te ograniczenia i tym samym jeszcze bardziej przyspieszyć badanie i skrócić czas przebywania pacjenta w ciasnym i głośnym otoczeniu. Obecnie technika próbkowania oszczędnego jest intensywnie rozwijana w kontekście wielu różnorodnych zastosowań,



Ryc. 5. Przykłady próbkowania sygnału rezonansu magnetycznego (miejsca próbkowania sygnału oznaczono kropkami o kolorze cyjanowym): (a) próbkowanie jednorodne z zachowaniem twierdzenia o próbkowaniu oraz (b) próbkowanie niejednorodne. Dla przejrzystości rysunku pominięto część próbek, jednak schematy próbkowania pozostały bez zmian.

usunięcia informacji o bardzo niskim lub zerowym wkładzie do sygnału. W próbkowaniu oszczędnym ten etap jest już stosowany w czasie akwizycji. Na podstawie doświadczenia oraz informacji ogólnych o sygnale w pierwszej kolejności ustalony zostaje schemat próbkowania, czyli postępowanie, w jaki sposób będzie wykonywana dyskretyzacja. Następnie znając rozłożenie próbek w czasie (lub przestrzeni) dokonywana jest rekonstrukcja. Na ryc. 5 zestawiono standardowo stosowane próbkowanie z wykorzystaniem kartezjańskiej siatki w dziedzinie czasu oraz próbkowanie nierównomierne na siatce radialnej na przykładzie dwuwymiarowego sygnału uzyskanego w metodzie obrazowania rezonansem magnetycznym. Gęstość próbkowania nierównomiernego tego sygnału zmniejsza się wraz z oddalaniem się od punktu centralnego. Taki schemat próbkowania jest

w których dane cechują się dużą objętością, a czas akwizycji jest stosunkowo długi. W celu prawidłowego zastosowania techniki próbkowania oszczędnego musi zostać spełniony szereg wymagań, do których należy zaliczyć [6]:

1. rzadką reprezentację sygnału w pewnej dziedzinie,
2. niską koherencję między dziedziną, w której dokonywana jest akwizycja, a dziedziną, w której sygnał ma rzadką reprezentację,
3. nieliniowe metody rekonstrukcji.

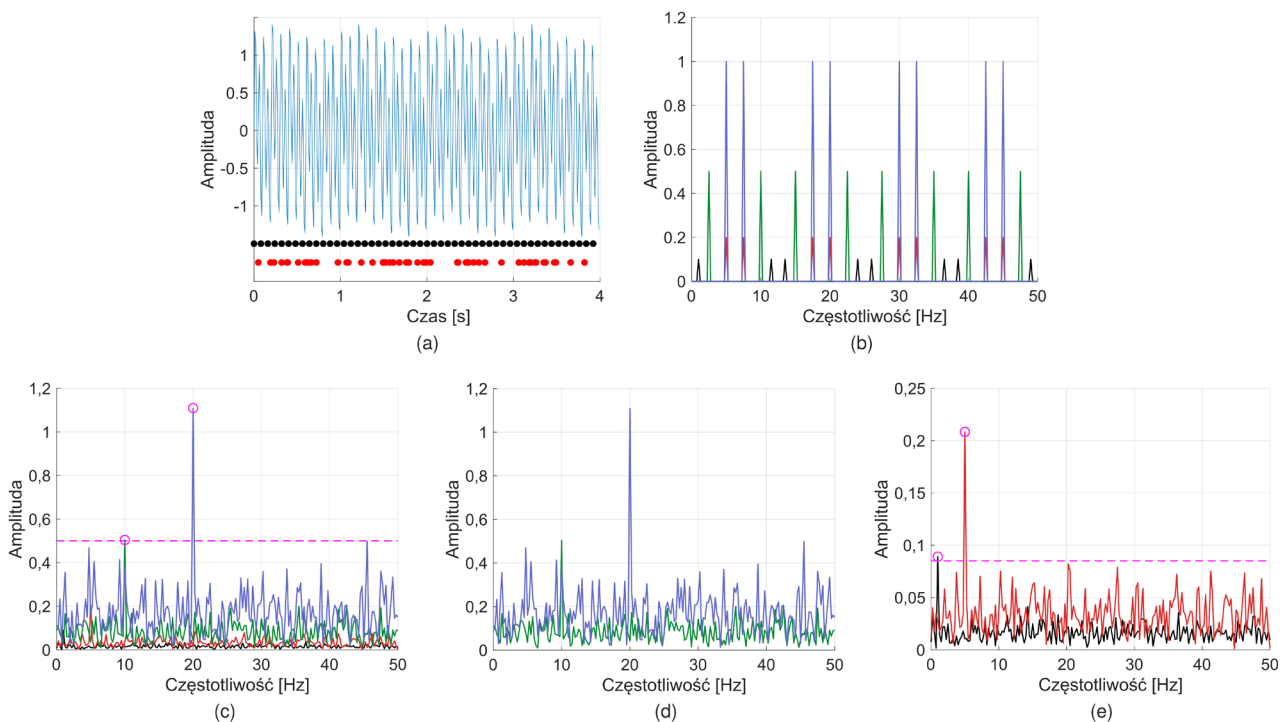
W następnej części artykułu poszczególne wymagania zostaną pokrótce omówione.

Jak już wcześniej wspomniano, sygnał może zostać reprezentowany w różny sposób w zależności od zastosowań. Dla liczby próbek mniejszej niż wymaga to twierdzenie o próbkowaniu, rekonstrukcja w tej

samej dziedzinie, w której próbki są pobierane, nie prowadzi do zadowalających rezultatów. Dlatego też do rekonstrukcji brakujących wartości stosowane jest przekształcenie sygnału do innej dziedziny, np. przy pomocy transformacji Fouriera bądź transformacji falkowej. Termin *rzadka reprezentacja sygnału* oznacza, iż liczba wartości sygnału znacznie większych od zera w tej dziedzinie jest niewielka i pominięcie części danych powoduje niewidoczne zniekształcenia sygnału. Podsumowując, w czasie akwizycji rejestrowana jest mniejsza liczba próbek niż wynika to z twierdzenia o próbkowaniu, a następnie sygnał jest przekształcany do dziedziny, w której posiada rzadką reprezentację (Ryc. 6a). Przekształcony sygnał

przez odwrotną transformację i powraca do pierwotnej dziedziny.

Drugim wymaganiem próbkowania oszczędnego jest niska koherencja między dziedziną, w której dokonywana jest akwizycja, a dziedziną, w której sygnał ma rzadką reprezentację [2, 6]. Oznacza to, że przekształcone artefakty, powstające podczas niedostatecznego próbkowania w ujęciu twierdzenia o próbkowaniu, w rzadkiej reprezentacji sygnału przypominają szum (Ryc. 6c). Koherencja mówi o rozproszeniu informacji o danym współczynniku rzadkiej reprezentacji między próbkami zarejestrowanego sygnału. Im niższa koherencja, w tym większej liczbie próbek obecna jest energia pochodząca od



Ryc. 6. Technika próbkowania oszczędnego na przykładzie sygnału sinusoidalnego będącego superpozycją czterech składowych sinusoidalnych odpowiednio o częstotliwościach 1 Hz, 5 Hz, 10 Hz oraz 20 Hz: (a) sygnał okresowy poddawany próbkowaniu jednorodnemu przy niespełnionym twierdzeniu o próbkowaniu (miejsca próbkowania oznaczone czarnymi punktami) oraz niejednorodnemu (czerwone punkty), (b) artefakty powstałe w wyniku rekonstrukcji sygnału na podstawie próbkowania jednorodnego (komponenty sygnału zostały powielone w reprezentacji częstotliwościowej), (c) sygnał zrekonstruowany na podstawie danych próbkowanych niejednorodnie oraz progowanie składowych o największych wartościach, (d) wpływ progowanych komponentów na reprezentację częstotliwościową oraz (e) odjęcie wpływu progowanych komponentów od reprezentacji częstotliwościowej i kolejne progowanie największych składowych z pozostałej reprezentacji.

również posiada artefakty związane z niedostateczną gęstością próbek, jednakże ze względu na stosunkowo niewielką liczbę składowych znacznie większych od zera istnieje możliwość ich wyekstrahowania spośród zakłóceń przy pomocy odpowiednich algorytmów. Składowe o niewielkich wartościach nie wnoszą istotnej informacji, dlatego ich pominięcie nie przynosi znacznej szkody w postaci utraty jakości sygnału. Po rekonstrukcji sygnał jest przekształcany

danego współczynnika. To powoduje, iż istnieje możliwość pominięcia odpowiedniej liczby próbek przy zachowaniu szcątkowej informacji o danym współczynniku, którą następnie można w pewnym stopniu zrekonstruować wykorzystując odpowiednie narzędzia. Gdy podpróbkowanie (niedostateczne próbkowanie w ujęciu twierdzenia o próbkowaniu) zachodzi w sposób jednorodny, zakłócenia z takiego sposobu akwizycji powodują brak jednoznacznego odróżnienia

składowych prawidłowych od artefaktów, co jest typowe dla zjawiska aliasingu (Ryc. 6b). Dlatego próbkowanie najczęściej odbywa się w sposób niejednorodny, a odstępy pomiędzy kolejnymi próbkami są dobierane losowo, co zapewnia najniższą możliwą koherencję. Takie podejście powoduje, że artefakty obecne w przetransformowanym sygnale mają również charakter pseudolosowy, z którymi można sobie poradzić podczas rekonstrukcji. Czasami próbkowanie w sposób losowy jest utrudnione ze względu na ograniczenia sprzętowe, dlatego projektowane są specjalne schematy akwizycji zależne od sygnału, a ich zadaniem jest minimalizacja koherencji.

Ostatnim filarem poprawnego próbkowania oszczędnego są nieliniowe metody rekonstrukcji [2, 6]. Celem rekonstrukcji jest uzyskanie większej liczby próbek niż posiadamy, w związku z czym nie ma możliwości zastosowania klasycznych liniowych metod (na przykład metody najmniejszych kwadratów), które z kolei wymagają większej ilości informacji. Ze względu na transformację sygnału do jego rzadkiej reprezentacji rekonstrukcja odbywa się w tej dziedzinie. Podpróbkowanie powoduje, że układ równań, który trzeba rozwiązać w celu rekonstrukcji sygnału, jest nieokreślony, czyli posiada więcej niewiadomych niż równań. Takie problemy mają nieskończoną liczbę rozwiązań, dlatego poszukiwania prawidłowego rozwiązania należy znacznie zawęzić. W czasie rekonstrukcji priorytetowo traktuje się takie rozwiązania, które są rzadkie, a więc liczba współczynników znacznie większych od zera jest stosunkowo mała w porównaniu do całkowitej liczby próbek. Algorytmy rekonstruujące spośród współczynników przekształconego sygnału szukają tych o największej amplitudzie (Ryc. 6c). Następnie obliczają wpływ danej składowej na widmo podpróbkowanego sygnału (Ryc. 6d) i go odejmują (Ryc. 6e). W ten sposób poszukiwana jest następna największa składowa i kolejne kroki są powtarzane. Celem takiej metody rekonstrukcji jest uzyskanie jak najmniejszej sumy całkowitej wszystkich współczynników transformaty, co oznacza, że reprezentacja sygnału jest możliwie najbardziej rzadka.

Podczas kolejnych kroków algorytmu, oprócz poszukiwania najrzadszej możliwej reprezentacji podpróbkowanego sygnału, istnieje również drugi warunek, który cały czas należy mieć na uwadze – zgodność rekonstrukcji z danymi pochodzącymi z akwizycji. Proces rekonstrukcji powoduje, iż kolejne aproksymacje różnią się od pierwotnego podpróbkowanego sygnału. W każdej kolejnej iteracji algorytmu w czasie wyznaczania wartości brakujących próbek sygnał ulega zniekształceniu. Dlatego

podczas obliczania kolejnych przybliżeń rozwiązania układu sprawdzany jest również warunek zgodności rekonstrukcji z danymi pochodzącymi z akwizycji. Jeśli różnica między rekonstrukcją a sygnałem oryginalnym jest względnie mała, jak również suma współczynników sygnału w rzadkiej reprezentacji jest niska, algorytm kończy swoje działanie. Istnieje wiele różnorodnych wariantów algorytmów wykorzystywanych do rekonstrukcji. Różnią się między sobą przede wszystkim szybkością działania, dokładnością rozwiązania oraz możliwością ich zastosowania do różnego rodzaju warunków, np. rodzaju zastosowanych transformacji, różnych metod obrazowania. Dlatego w zależności od problemu należy posłużyć się odpowiednim algorytmem.

Stosowanie metody próbkowania oszczędnego może w zauważalnym stopniu skrócić czas potrzebny do akwizycji sygnału, jak ma to miejsce między innymi w przypadku obrazowania metodą rezonansu magnetycznego. W czasie skanowania pacjent wykonuje mimowolne ruchy, takie jak oddychanie czy przepływ krwi w naczyniach krwionośnych. Ruchy te mają znaczny wpływ na jakość rejestrowanych danych. W szczególności w przypadku obrazowania dyfuzji cząsteczek wody, które mają stosunkowo niewielkie przemieszczenia, każde takie zakłócenie może znacząco zniekształcić wyniki ilościowe badania. Razem ze zwiększeniem komfortu pacjenta w czasie badania oraz krótszym czasem przebywania w tubie skanera, stosowanie próbkowania oszczędnego jest jak najbardziej uzasadnione.

Obrazowanie metodą rezonansu magnetycznego

Obrazowanie metodą jądrowego rezonansu magnetycznego, na podstawie którego pokażemy przykład zastosowania techniki próbkowania oszczędnego, jest możliwe dzięki magnetycznym właściwościom materii. Każdy atom składa się z powłoki elektronowej oraz jądra, które charakteryzują się spinem jądrowym. Pojęcie spinu można zobrazować poprzez analogię do małego magnesu - jeżeli jądro posiada nieparzystą liczbę protonów lub neutronów, wtedy można go przedstawić jako magnes. Jądro wodoru ^1H może przyjmować dwa stany energetyczne, obrazowane jako ustawienie magnesu wzdłuż linii pola magnetycznego bądź przeciwnie do niego. Po zastosowaniu silnego zewnętrznego stałego pola magnetycznego spiny, początkowo ułożone chaotycznie, zaczynają się porządkować. Jeżeli będziemy rozpatrywać obrazowany obiekt jako zbiór małych sześcianów, wtedy wypadkowa spinów w takiej objętości jest nazywana momentem magnetycznym (magnetyzacją). W przypadku działania tylko

zewnątrznego stałego pola, składowa podłużna (wzdłuż osi zewnętrznego pola magnetycznego) momentu magnetycznego jest maksymalna, natomiast składowa poprzeczna wynosi zero.

W kolejnym kroku stosowany jest krótki impuls elektromagnetyczny o częstotliwości zależnej od obrazowanych jąder oraz indukcji pola magnetycznego, aby wytrącić wypadkową magnetyzację z położenia równowagi, jednakże w ściśle określony sposób. Składowa podłużna momentu magnetycznego wówczas maleje, a składowa poprzeczna zaczyna rosnąć. Po ustaniu działania impulsu elektromagnetycznego poszczególne momenty magnetyczne wracają do położenia równowagi w podobny sposób, jak zachowuje się zabawka dla dzieci – bąk. Gdy bąk zostanie wprawiony w ruch obrotowy wokół własnej osi, a iglica, poprzez którą styka się z podłożem, zostanie unieruchomiona w miejscu, popchnięcie bąka powoduje jego poruszanie się tzw. ruchem precesyjnym. Jest to złożenie dwóch ruchów obrotowych – wokół własnej osi oraz osi pionowej przechodzącej przez punkt zetknięcia iglicy z podłożem. Kąt odchylenia od pionu zaczyna się zmniejszać, aż bąk (moment magnetyczny) znowu ułoży się pionowo (wzdłuż linii stałego pola magnetycznego). Szybkość ruchu obrotowego wokół osi pionowej jest charakterystyczna dla każdego jądra, dla ustalonej siły pola magnetycznego, a częstotliwość obrotu jest nazywana częstotliwością Larmora f_l daną wzorem:

$$f_l = \frac{\gamma}{2\pi} B_0$$

gdzie γ jest stałą żyromagnetyczną charakterystyczną dla każdego pierwiastka, B_0 jest wartością indukcji pola magnetycznego.

Precesujące momenty magnetyczne są źródłem zmiennego pola magnetycznego, co w związku z prawem Faradaya indukuje w cewce odbiorczej zmienny prąd o amplitudzie zależnej od początkowego namagnesowania oraz kąta wychylenia momentu magnetycznego. Czasy powrotu, tzw. czasy relaksacji, składowej podłużnej (czas T_1) i poprzecznej (czas T_2) do wartości początkowej są charakterystyczne dla badanej tkanki, np. istoty białej i szarej mózgu. W ten sposób mierząc prąd indukowany w cewce odbiorczej można ustalić czasy relaksacji w poszczególnych regionach badanego obiektu oraz zróżnicować tkanki. Dzięki temu można pokazać, co znajduje się wewnątrz ludzkiego organizmu w sposób nieinwazyjny, bez przerywania ciągłości powłok skórnych pacjenta.

Akwizycja sygnału, z którego następnie może zostać zrekonstruowana na przykład struktura anatomiczna mózgu, jest możliwa dzięki ściśle określonej częstotliwości fali elektromagnetycznej, która może

wytrącić momenty magnetyczne ze stanu równowagi. Ta częstotliwość jest taka sama, jak częstotliwość ruchu precesyjnego momentów magnetycznych po wytrąceniu z położenia równowagowego, czyli równa częstotliwości Larmora. Częstotliwość ta jest zależna nie tylko od jądra atomowego, ale też od indukcji pola magnetycznego, dlatego odpowiednio sterując polem magnetycznym można wybierać fragmenty obrazowanego obiektu.

Rejestrowany sygnał jest wynikiem zsumowania wszystkich ruchów precesyjnych momentów magnetycznych w obrazowanym obiekcie. Dlatego w zależności od pożądanej rozdzielczości obrazu wykonuje się nawet do kilkuset takich akwizycji. W przypadku niektórych typów obrazowań, np. obrazowania dyfuzji, całkowity czas skanowania jest stosunkowo długi. Aby przyspieszyć proces zaczęto stosować technikę próbkowania oszczędnego, w której pomijana jest znacząca ilość informacji. Przez zastosowanie odpowiednich przekształceń sygnału oraz algorytmów rekonstruujących „brakujące” próbki można w dostrzegalny sposób skrócić czas badania, przy minimalnym zniekształceniu obrazu.

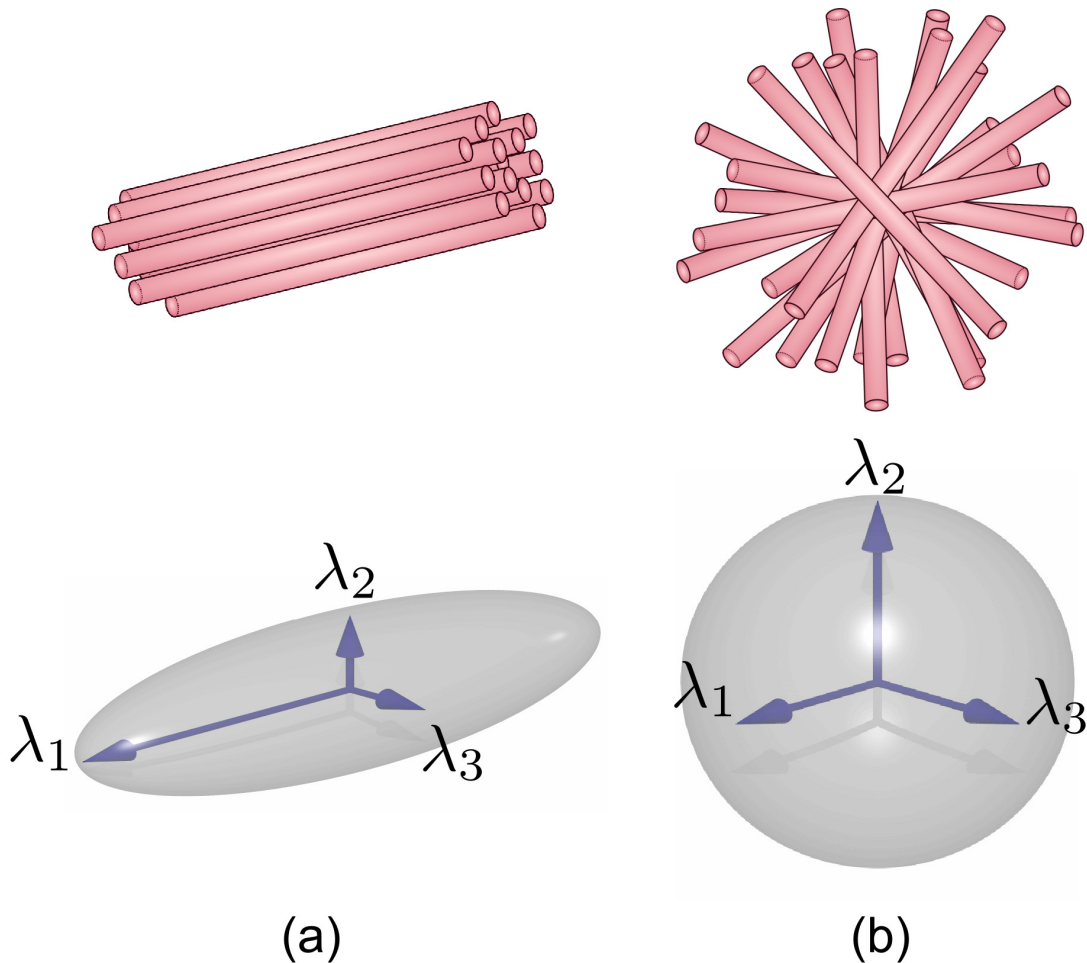
Sygnał w obrazowaniu metodą rezonansu magnetycznego jest zapisywany w tzw. przestrzeni k , co przedstawiono na ryc. 1c. Każdy punkt przestrzeni k niesie informację o obecności oraz wkładzie danej częstotliwości przestrzennej w obrazie. Analogicznie jak w przypadku częstotliwości czasowej, mówiącej o powtarzalności zjawiska w czasie, np. bicia serca, częstotliwość przestrzenna informuje o powtarzalności pewnego wzorca przestrzennego, np. obszaru o jednakowej jasności na obrazie, bądź gwałtownej zmianie wartości piksela z jasnej na ciemną (lub odwrotnie) w przypadku krawędzi. Zastosowanie odwrotnego przekształcenia Fouriera na danych zapisanych w przestrzeni k powoduje uzyskanie obrazu struktur badanego obiektu, np. mózgu oraz tkanek go otaczających.

Obrazowanie dyfuzji metodą rezonansu magnetycznego próbkowane oszczędnie

Innym sposobem wykorzystania zjawiska jądrowego rezonansu magnetycznego jest badanie dyfuzyjne umożliwiające określenie, w jaki sposób cząsteczki wody w danym obszarze ulegają przemieszczeniu. Dyfuzja cząsteczek wody jest zależna od obecności błon komórkowych, które ograniczają swobodny przepływ płynów. Obrazowanie dyfuzji przy wykorzystaniu metody rezonansu magnetycznego pozwala na wyznaczenie składowych tensora dyfuzji DT (ang. *Diffusion Tensor*), który informuje o tym,

w jakim stopniu oraz w jakim kierunku cząsteczki wody dyfundują [1, 4]. W przypadku obszarów o silnej kierunkowości (medium anizotropowe) dyfuzji tensor geometrycznie reprezentowany jest przez elipsoidę z wyraźnie dłuższą półosią równoległą do kierunku włókien badanego medium w porównaniu do pozostałych dwóch półosi (Ryc. 7a). Taka kierunkowość dyfuzji cząsteczek wody występuje m.in. w obszarach istoty białej mózgu oraz rdzenia kręgowego. Kiedy dyfuzja jest ograniczona przez struktury

w nowym położeniu cząsteczki. Na potrzeby obrazowania dyfuzji konieczne jest zastosowanie co najmniej sześciu gradientów dyfuzyjnych oraz jednego obrazu referencyjnego, przy zerowej wartości gradientu dyfuzyjnego. W przypadku nowoczesnych metod obrazowania dyfuzji liczba gradientów jest znacznie większa i może dochodzić nawet do kilkuset, dlatego czas badania ulega znacznemu wydłużeniu. W celu skrócenia czasu skanowania jedną z możliwości jest zastosowanie techniki próbkowania



Ryc. 7. Reprezentacja własności medium za pomocą tensora dyfuzji: (a) medium kierunkowe (anizotropowe) reprezentowane przez elipsoidę z wyraźnie dłuższą półosią λ_1 w stosunku do pozostałych półosi λ_2 i λ_3 oraz (b) medium izotropowe reprezentowane przez sferę (długości trzech półosi w przypadku idealnym są równe $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$).

o różnej kierunkowości (medium izotropowe), tensor przyjmuje kształt kulisty – dyfuzja zachodzi w jednakowym stopniu w każdym kierunku (Ryc. 7b).

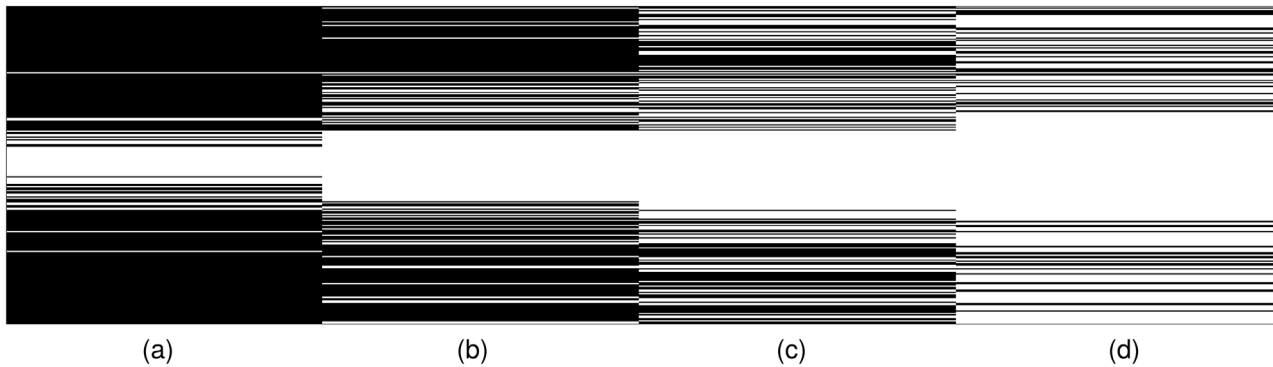
Z obrazowaniem dyfuzji są związane dodatkowe gradienty pola magnetycznego, które pozwalają na oszacowanie kierunku przemieszczenia się cząsteczek wody [5]. Jeżeli cząsteczka wody wprawiona w ruch precesyjny przemieści się w kierunku aplikacji gradientu, rejestrowany sygnał ulega osłabieniu ze względu na różnice w częstotliwości Larmora

oszczędnego.

Poniżej zaprezentowano pokrótce schemat wykorzystania techniki próbkowania oszczędnego w obrazowaniu dyfuzyjnym mózgu metodą rezonansu magnetycznego. Metoda rekonstrukcji danych dyfuzyjnych wykorzystuje wiele kanałów odbiorczych i składa się z trzech zasadniczych etapów.

W pierwszym z nich dane próbkowane niejednorodnie w przestrzeni k są przekształcane do dziedziny przestrzennej za pomocą wspomnianej już transfor-

macji Fouriera, po uprzednim wypełnieniu brakujących próbek zerami. Najwięcej próbek rejestruje się w obszarze o niskich częstotliwościach, gdyż tam znajduje się najwięcej informacji o skanowanym obiekcie. Gęstość próbkowania zmniejsza się w kierunku kodowania fazy w stronę obszarów o wyższych częstotliwościach w taki sposób, aby osiągnąć jak najmniejszą koherencję (Ryc. 8).



Ryc. 8. Przykłady niejednorodnego próbkowania sygnału rezonansu magnetycznego w kierunku kodowania fazy. Białe linie przedstawiają miejsca próbkowania sygnału w porównaniu z czarnymi obszarami oznaczającymi pominięte pomiary. Kolejne schematy próbkowania wykazują odpowiednio (a) 19,5%, (b) 39,5%, (c) 59,4% oraz (d) 79,7% pokrycia przestrzeni częstotliwości zarejestrowanymi danymi.

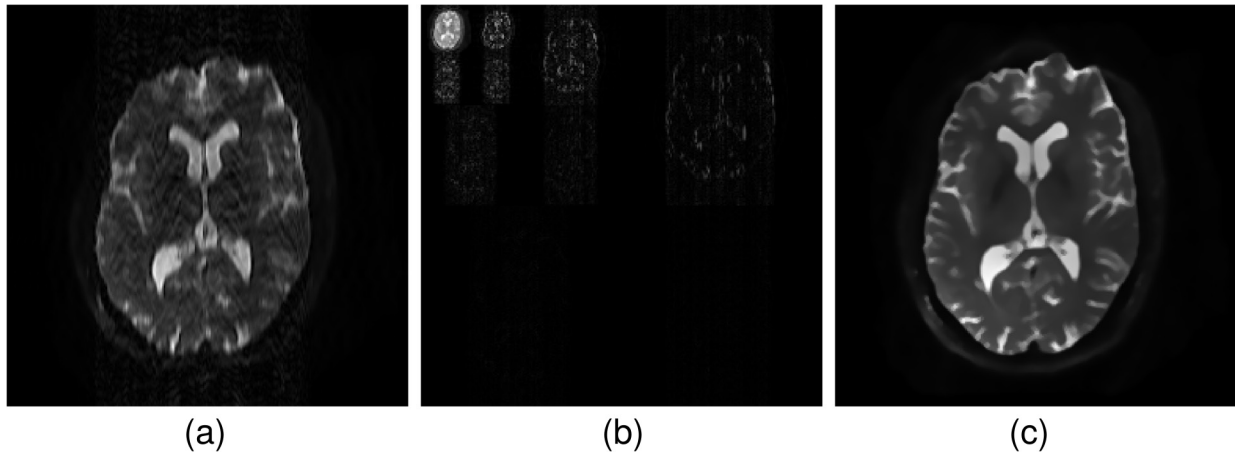
Drugi etap jest zasadniczą częścią wykorzystującą rekonstrukcję na podstawie danych próbkowanych oszczędnie. Poszczególne obrazy dyfuzyjne są przekształcane do dziedziny falkowej, w której posiada-

one przez proces próbkowania niejednorodnego.

W ostatnim etapie z tak zrekonstruowanych obrazów metodą najmniejszych kwadratów szacowane są parametry tensorów dyfuzji i obliczane miary informujące o stopniu oraz kierunkowości dyfuzji wody w tkankach. Najczęściej spotykanymi miarami są anizotropia frakcjonowana FA (ang. *fractional anisotropy*) oraz średnia dyfuzyjność MD (ang. *mean dif-*

fusivity), dane odpowiednio formułami [4, 5]:

$$FA = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)^2 + (\lambda_1 - \lambda_3)^2}}}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}$$



Ryc. 9. (a) Artefakty pseudolosowe powstałe w wyniku podpróbkowania sygnału rezonansu magnetycznego w sposób niejednorodny, (b) reprezentacja falkowa zrekonstruowanego obrazu, (c) zrekonstruowany finalny obraz.

ją rzadką reprezentację (Ryc. 9). Dzięki nieliniowej metodzie gradientów sprzężonych dokonywana jest rekonstrukcja najbardziej znaczących współczynników, przy zachowaniu jak największej zgodności z danymi pochodzącymi ze skanera. Po zakończeniu działania algorytmu optymalizacyjnego dokonywane jest odwrotne przekształcenie falkowe i otrzymywane są obrazy dyfuzyjne w minimalnym stopniu zniekształ-

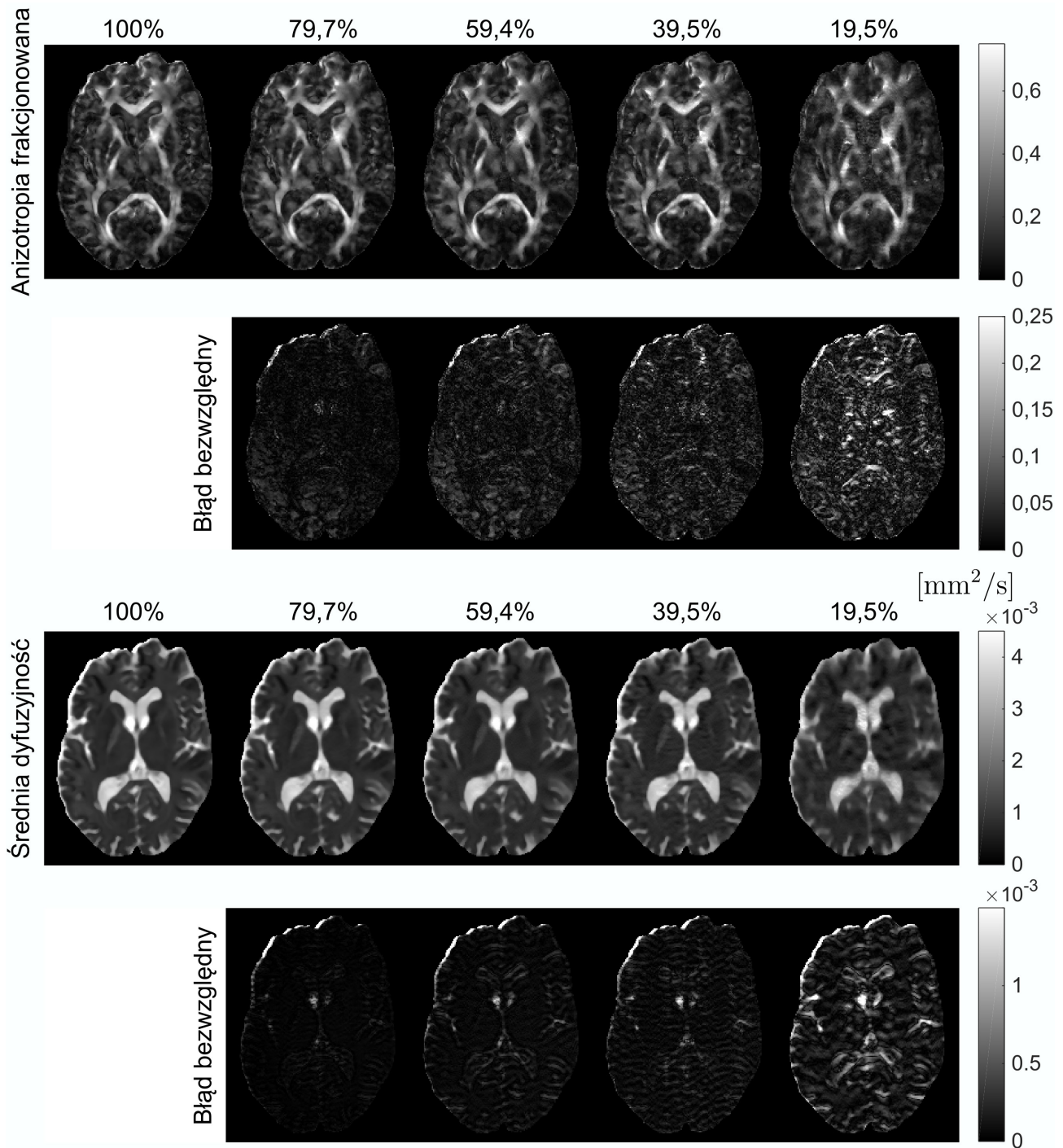
$$MD = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)}{3}$$

gdzie λ_1, λ_2 i λ_3 ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$) są wartościami własnymi tensora dyfuzji (reprezentowanymi przez długości osi elipsoidy na ryc. 7).

Na ryc. 10 zestawiono miary ilościowe uzyskane za pomocą techniki próbkowania oszczędnego w zależności od ilości zarejestrowanych danych (por. ryc. 8).

Jako złoty standard (metodę referencyjną) przyjęto parametry oszacowane na podstawie 100% danych próbkowanych zgodnie z twierdzeniem o próbkowaniu

miarami FA uzyskanymi za pomocą techniki próbkowania oszczędnego a złotym standardem przedstawiają najmniejsze błędy rekonstrukcji w obszarach



Ryc. 10. Rekonstrukcja miar ilościowych tensora dyfuzji (anizotropia frakcjonalna, średnia dyfuzyjność) przy użyciu 100% danych oraz danych odpowiednio podpróbkowanych w przestrzeni częstotliwości (79,7%, 59,4%, 39,5% oraz 19,5%) zgodnie ze schematami próbkowania przedstawionymi na rys. 9. Dla obydwu miar przedstawiono również błąd bezwzględny w stosunku do rekonstrukcji przy użyciu 100% danych próbkowanych zgodnie z twierdzeniem o próbkowaniu.

waniu. Z oceny wizualnej miar można zauważyć, że nawet przy użyciu jedynie 39,5% wszystkich próbek obrazy są w nieznaczny sposób zniekształcone, natomiast im większa ilość danych, tym oczywiście lepsza jakość rekonstrukcji. Mapy błędów pomiędzy

o największej kierunkowości dyfuzji, w miejscach, gdzie informacja o dyfuzji jest szczególnie pożądana. Warto zwrócić uwagę, że rekonstrukcja danych próbkowanych oszczędnie w przypadku miary mówiącej o kierunkowości dyfuzji poprawia jakość danych

o coraz większym stopniu zaszumienia. Informacja o szumie w trakcie procesu rekonstrukcji jest minimalizowana i w rezultacie niewiele wnosi, kiedy obrazowane są włókna nerwowe. Jednocześnie wyniki pokazują, że schematy próbkowania bardzo silnie wpływają na jakość rekonstrukcji i w przyszłości powinno dążyć się do ich optymalizacji.

Podsumowanie

Próbkowanie oszczędne jest obiecującą techniką pozwalającą na znaczne przyspieszenie akwizycji sygnału oraz oszczędność pamięci w stosunku do tradycyjnego podejścia. Dzięki uprzedniej znajomości cech mierzonego zjawiska można zaprojektować schemat próbkowania tak, aby zachować jak największą część informacji. Ważnym elementem prawidłowego zastosowania próbkowania oszczędnego jest wiedza o innej dziedzinie reprezentacji sygnału, w której to sygnał

posiada swoją rzadką reprezentację. W przypadku obrazowania metodą rezonansu magnetycznego najpopularniejszym podejściem jest zastosowanie transformacji falkowej, co pozwala na redukcję współczynników niosących istotną informację. Jednocześnie baza falkowa cechuje się niską koherencją z bazą, w której sygnał jest poddawany analizie przez radiologa. Ważny jest również dobór odpowiedniej metody rekonstrukcji sygnału, kiedy postawiony problem ma nieskończoną ilość rozwiązań.

Obecnie doświadczamy intensywnego rozwoju techniki próbkowania oszczędnego ze względu na jej potencjał w wielu różnych dziedzinach nauki. Ograniczenia, które kiedyś były problemami nie do pokonania, powoli stają się jedynie naturalnymi cechami mierzonego zjawiska, a próbkowanie oszczędne jest metodą, którą należy zastosować w przypadku ich napotkania.

Bibliografia

1. Basser P. J., Mattiello J., LeBihan D. (1994). MR diffusion tensor spectroscopy and imaging. *Biophysical journal*, 66(1): 259-267.
2. Candès E. J., Wakin M. B. (2008). An introduction to compressive sampling. *IEEE signal processing magazine*, 25(2): 21-30.
3. Encyklopedia Britannica, <https://www.britannica.com/> (dostęp: 07.05.2020)
4. Le Bihan D., Mangin J. F., Poupon C., Clark C. A., Pappata S., Molko N., Chabriat H. (2001). Diffusion tensor imaging: concepts and applications. *Journal of Magnetic Resonance Imaging*, 13(4): 534-546.
5. Ludovico M., Węglarz W.P. (2007). Physical foundations, models, and methods of diffusion magnetic resonance imaging of the brain: A review. *Concepts in Magnetic Resonance Part A: An Educational Journal* 30(5): 278-307.
6. Lustig M., Donoho D. L., Santos J. M., Pauly, J. M. (2008). Compressed sensing MRI. *IEEE signal processing magazine*, 25(2): 72-82.
7. Zieliński T.P. (2005). *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów: od teorii do zastosowań*. Wydawnictwa Komunikacji Łączności.