

HENRYK PŁUDOWSKI

Akademia Rolnicza w Lublinie

MODEL POTĘGOWEJ FUNKCJI PRODUKCJI W ZASTOSOWANIU DO BADANIA EFEKTYWNOŚCI NAWOŻENIA MINERALNEGO

Wraz ze wzrostem zużycia nawozów mineralnych, jaki występuje w ostatnich latach, wzrasta społeczne zapotrzebowanie na badania dotyczące efektywności nawożenia mineralnego. Temu zapotrzebowaniu wychodzą naprzeciw liczne badania, których wyniki zostały opublikowane na łamach czasopism naukowych i popularnonaukowych. Szczególnie dużo miejsca poświęcono badaniom efektywności nawożenia metodą funkcji produkcji, przy czym wyeksponowany został potęgowy model funkcji, czyli funkcja Cobb-Douglasa. Nie negując przydatności tej funkcji w innych badaniach naukowych, wydaje się, że posiada ona ograniczone znaczenie w badaniach nad efektywnością nawożenia mineralnego.

Posługiwanie się funkcją Cobb-Douglasa, jak wynika z badań Brzozy i Kurek (1, 2, 5, 6, 7, 8, 9), było uzasadniane między innymi tym, że wyrażona tą funkcją zależność między nawożeniem mineralnym a plonem wykazywała ściślejszy związek w porównaniu z funkcją liniową i paraboliczną, przy czym ścisłość tego związku była określana współczynnikiem korelacji pomiędzy logarytmami zmiennych. W tym miejscu między innymi tkwi przyczyna, że omawiana funkcja była faworyzowana jako metoda badawcza.

Nas nie interesuje ścisłość związku między logarytmami zmiennych, lecz między ich rzeczywistymi wielkościami. Chodzi przede wszystkim o to, aby zastosować taki model funkcji, który w największym stopniu wyjaśni zmienność uzyskiwanych plonów przez zmienność stosowanego nawożenia mineralnego. Stopień wyjaśnienia zmienności logarytmu plonu przez logarytm nawożenia nie jest równoznaczny ze ścisłością związku między rzeczywistymi wielkościami tych zmiennych. Po wyeliminowaniu oceny funkcji poprzez ścisłość związku między logarytmami zmiennych w wielu przypadkach okazuje się, że funkcja potęgowa staje się modelem mało uzasadnionym w badaniu efektywności nawożenia mineralnego.

Nie spotkano dotychczas krytycznej oceny funkcji potęgowej jako

metody analizy efektywności nawożenia i jest ona często stosowana, mimo tego, że przebieg omawianej funkcji mało odpowiada rzeczywistemu kształtowi zależności między rozpatrywanymi zmiennymi. Marginesowo (w przypisie) wyrażony pogląd przez Podkominera (13), iż wyeksponowana w literaturze funkcja Cobb-Douglasa jest najmniej zgodna z rzeczywistą relacją nawożenia — plon, należy uznać za spostrzeżenia trafne i pokrywające się z wynikami badań autora (12).

Celem niniejszego artykułu jest bliższe wyjaśnienie wyżej zasygnalizowanych zagadnień i porównanie potęgowego modelu z innymi modelami funkcji.

Przykłady liczbowe

Porównawczą analizę różnych modeli przeprowadzono na danych z 55 gospodarstw państwowych woj. lubelskiego w latach 1968—1972. Jako zmienne przyjęto plon przeliczeniowy w jednostkach zbożowych (JZ) z gruntów ornych (GO) i nawożenie mineralne w q NPK/ha GO zastosowane pod zbiory danego roku (analiza statyczna). Przy obliczeniu plonu przeliczeniowego uwzględniono produkty główne i uboczne (słoma, liście). Ponadto wykorzystano dane z SHR Ułhówek (pow. Tomaszów Lub.) — plony 4 zbóż w latach 1958—1972 i nawożenie mineralne w q czystego składnika na 1 ha GO zastosowane pod zbiory danego roku (analiza dynamiczna).

Opracowane dane stanowią wyłącznie przykłady liczbowe, na których zostaną przedstawione interesujące nas zagadnienia. Nie traktujemy więc niniejszego artykułu jako analizy efektywności nawożenia mineralnego w gospodarstwach państwowych woj. lubelskiego oraz w SHR Ułhówek i nie omawiamy bliżej charakterystyki danych, jak i warunków przyrodniczo-glebowych tych gospodarstw. Zagadnieniom tym zostały poświęcone oddzielne opracowania (11, 12).

Obliczenia były wykonane w Zakładzie Metod Numerycznych Instytutu Matematyki UMCS w Lublinie przez mgr M. Chibowską, której pragnę wyrazić wdzięczność za udzieloną mi pomoc.

Ścisłość związku między zmiennymi jako kryterium wyboru modelu funkcji

Jednym z podstawowych kryteriów wyboru odpowiedniego modelu funkcji jest ścisłość związku wyrażona współczynnikiem lub indeksem

korelacji*. Przez podniesienie tych charakterystyk statycznych do kwadratu uzyskujemy współczynniki lub indeksy determinacji, które pomnożone przez 100% określają, w ilu procentach zmienna zależna zostaje wyjaśniona przez zmienną niezależną występującą w jednoczynnikowym modelu funkcji. Chodzi przy tym o przyjęcie takiego modelu funkcji, który w możliwie największym stopniu wyjaśnia zmienność uzyskiwanych plonów przez nawożenie mineralne. Każdy model funkcji posiada więc swój współczynnik lub indeks korelacji, oceniający dany model pod względem ścisłości związku.

W dotychczasowych badaniach efektywności nawożenia mineralnego stosowane były najczęściej następujące modele funkcji:

$$Y' = a + bx \text{ (regresja prostoliniowa),}$$

$$Y' = a + bx + cx^2 \text{ (regresja paraboliczna),}$$

$$(\ln Y)' = \ln a + b \ln x \text{ (regresja logarytmiczna),}$$

$$Y' = ax^b \text{ (regresja potęgowa),}$$

gdzie Y' — plon oceniony funkcją, x — nawożenie mineralne, a , b , c — parametry (współczynniki) danej funkcji.

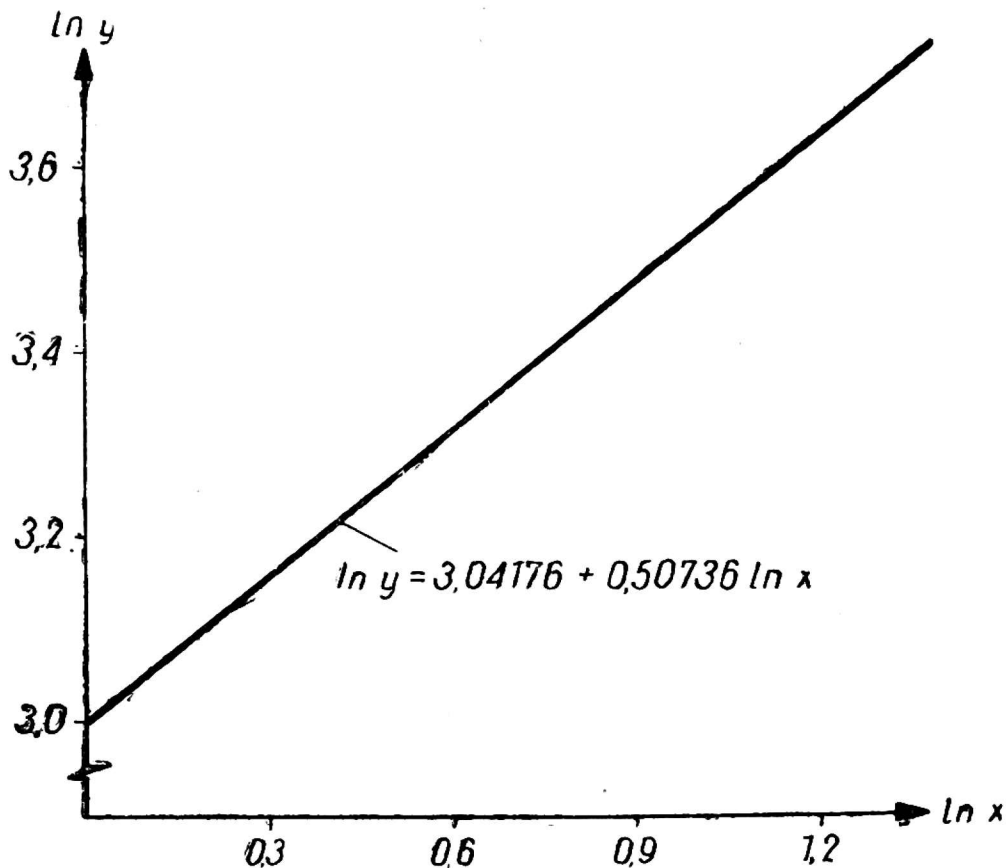
Współczynniki regresji prostoliniowej i parabolicznej są wielkościami mianowanymi i wyrażają zmiany plonu na skutek wzrostu nawożenia o jednostkę, natomiast współczynnik „ b ” w regresji potęgowej posiada charakter względny. Wskazuje on, o ile procent wzrasta plon, gdy nawożenie mineralne wzrośnie o 1% — jest więc współczynnikiem elastyczności.

Oszacowane plony (Y') przez regresję logarytmiczną i potęgową są ocenami równoznacznymi. Obydwie formy funkcji są tożsame, z tym tylko, że jedna napisana w postaci potęgowej, druga zaś w postaci logarytmicznej. Postać logarytmiczna jest regresją roboczą, gdyż przy pomocy logarytmów naturalnych (\ln) dokonujemy estymacji parametrów funkcji potęgowej.

Mimo że funkcja logarytmiczna i potęgowa są formami tożsamymi z punktu widzenia oceny plonu, to jednak ich charakterystyki statystyczne nie są równoważne. Współczynnik korelacji logarytmicznej nie wyraża ścisłości oceny plonu, a tylko wyłącznie ścisłość związku pomiędzy logarytmami zmiennych. Funkcja logarytmiczna jest funkcją prostoliniową, jak na rys. 1 i jej współczynnik korelacji dotyczy wyłącznie tej prostej.

Nas nie interesuje prosta przedstawiona na rys. 1 i mniej interesująca jest ścisłość związku między logarytmami zmiennych. Funkcja potęgowa jest krzywoliniową i chcemy wiedzieć jaka jest ścisłość oceny plonu przez tę postać funkcji, czyli chcemy znać indeks korelacji potęgowej. Współczynnik korelacji logarytmicznej nie równa się indeksowi korelacji po-

* „Współczynnik” dotyczy korelacji prostoliniowej, a „indeks” korelacji krzywoliniowej — za Marszałkowicz (10).



Rys. 1. Prosta logarytmiczna wyrażająca zależność między logarytmami plonu przeliczeniowego w JZ (y) i nawożenia mineralnego (x) w gospodarstwach państwowych woj. lubelskiego w roku 1972

tęgowej. Nie można zatem porównywać współczynników korelacji logarytmicznej ze współczynnikami lub indeksami korelacji tych modeli funkcji, które zostały estymowane w oparciu o rzeczywiste wartości zmiennych i nie można w oparciu o takie porównanie dokonywać wyboru modelu funkcji. Na to zagadnienie nie zwrócono dotychczas uwagi i między innymi z tego względu funkcja potęgowa była faworyzowana jako metoda analizy efektywności nawożenia mineralnego.

Można udowodnić (3), że w regresji prostoliniowej i parabolicznej ścisłość związku między zmienną zależną a zmienną niezależną jest taka sama, jak między rzeczywistymi obserwacjami zmiennej zależnej a jej ocenami wynikającymi z funkcji, czyli $r_{yx} = r_{yy}$, lub $i_{yx} = i_{yy}$. Nie można postawić znaku równości między współczynnikami korelacji logarytmicznej i indeksami korelacji potęgowej, a zatem współczynnik korelacji logarytmicznej nie odnosi się do funkcji potęgowej.

Przy przejściu od funkcji w postaci logarytmicznej do funkcji w postaci potęgowej następuje odlogarytmowanie zmiennych i współczynnika „a”; nie można natomiast odlogarytmować współczynnika korelacji. Chcąc ustalić indeks korelacji potęgowej, należy dokonać analizy odchyień rze-

czywiście uzyskiwanych plonów od plonów oszacowanych funkcją potęgową i z poniższego wzoru obliczyć interesujący nas indeks:

$$i_{yx} = \sqrt{1 - \frac{\sum (y - \bar{Y}')^2}{\sum (y - \bar{y})^2}},$$

gdzie y — rzeczywiste wielkości plonu, \bar{y} — średnie arytmetyczne plonu rzeczywistego, Y' — ocena plonu przy pomocy funkcji potęgowej. W ten sposób można obliczyć współczynnik korelacji dla każdej funkcji, zarówno jedno-, jak i wieloczynnikowej, ponieważ współczynnik korelacji wielokrotnej $R_{1..23..} = R_{yY}$. Dla funkcji potęgowej nie ma innej możliwości obliczenia indeksu korelacji, jak tylko przy pomocy powyższego wzoru.

Przyczyny, które powodują, że charakterystyki statystyczne postaci logarytmicznej nie odnoszą się do postaci potęgowej są proste i zrozumiałe. Inna jest bowiem zmienność logarytmów plonu i nawożenia niż rzeczywistych obserwacji badanych cech. Ponadto wszystkie odchylenia od regresji in plus poniżej jednostki plonu posiadają ujemną wartość logarytmu naturalnego, a tym samym estymacja parametrów funkcji klasyczną metodą najmniejszych kwadratów dotyczy tylko funkcji w postaci logarytmicznej.

W tab. 1 przedstawiono parametry funkcji potęgowych oraz współczynniki korelacji logarytmicznej i indeksy korelacji potęgowej, które

Tabela 1

Parametry funkcji potęgowej oraz korelacja logarytmiczna, potęgowa, prostoliniowa i paraboliczna w 55 gospodarstwach państwowych woj. lubelskiego w latach 1968—1972

Lata zbio- ru	ln a	a	b	K o r e l a c j a			
				loga- rytmicz- na	potę- gowa	prosto- liniowa	parabo- liczna
1968	3,12690	22,80	0,46480	0,567	0,529	0,508	0,585
1969	2,94700	19,05	0,57140	0,673	0,650	0,661	0,662
1970	2,97586	19,61	0,54598	0,622	0,627	0,635	0,635
1971	2,73554	15,42	0,83777	0,541	0,509	0,542	0,544
1972	3,04176	20,94	0,50736	0,676	0,641	0,638	0,648

* Stosunek sum występujący pod pierwiastkiem jest współczynnikiem zbieżności (zgodności), często stosowanym przy określaniu ścisłości związku wyrażonego funkcją. Waszkiewicz np. w odniesieniu do funkcji potęgowej stosuje wyłącznie taki wzór na obliczanie współczynnika zgodności, bez wspomnienia (i słusznie) o współczynniku obliczanym na log zmiennych (14, s. 224). Propozycja autora nie jest więc zupełnie nowa.

porównano ze współczynnikami korelacji prostoliniowej i z indeksami korelacji parabolicznej. Z tabeli tej wyraźnie wynika, że współczynniki korelacji logarytmicznej nie równają się indeksom korelacji potęgowej. Między nimi mogą występować różnice in plus i in minus, jednakże częściej spotykamy się z przypadkami, że różnice te są na niekorzyść funkcji potęgowej. W naszym przypadku tylko w 1970 r. wystąpiła wyższa korelacja potęgowa niż logarytmiczna, ale mimo to była niższa od korelacji prostoliniowej. W pozostałych 4 latach korelacja potęgowa była znacznie niższa od logarytmicznej. W tych latach korelacja logarytmiczna przewyższała korelację prostoliniową i oceniając funkcję potęgową przy pomocy współczynnika korelacji logarytmicznej, należałoby stwierdzić, że funkcja ta ściślej wyraża zależność między plonem a nawożeniem, tym samym winna być zastosowana przy analizie efektywności nawożenia. Przeczą jednak temu indeksy korelacji potęgowej, gdyż były one w 3 latach niższe od korelacji prostoliniowej, a w pozostałych 2 latach nie występowały między nimi statystycznie istotne różnice.

W latach 1969 i 1972 korelacja logarytmiczna przewyższała korelację paraboliczną, podczas gdy korelacja potęgowa we wszystkich 5 latach była niższa od parabolicznej. Nie spotkano dotychczas takiego przypadku, aby korelacja potęgowa przewyższała korelację paraboliczną. Taki przypadek jest mało prawdopodobny, co wiąże się ze specyficznym kształtem krzywej potęgowej, o czym będzie mowa nieco dalej.

Przy aproksymowaniu funkcji wielomianowej drugiego stopnia $Y' = a + bx + cx^2$, mimo istotnego indeksu korelacji, oczekujemy zawsze, aby obydwa współczynniki funkcji („b” i „c”) były statystycznie istotne. Występowanie istotnego współczynnika „c” ma wówczas miejsce, kiedy indeks determinacji parabolicznej istotnie różni się od współczynnika determinacji prostej, czyli kiedy różnica $i^2_{yx} - r^2_{yx}$ jest statystycznie istotna przy założonym poziomie prawdopodobieństwa. Chodzi przy tym o udowodnienie efektu krzywoliniowego (3), czyli stwierdzenie czy wprowadzenie do modelu funkcji zmiennej niezależnej w kwadracie w istotny sposób przyczynia się do lepszego wyjaśnienia zmienności uzyskiwanych plonów.

Z podanych w tab. 1 współczynników korelacji wynika, że wystąpiła największa różnica między indeksem korelacji parabolicznej a współczynnikiem korelacji prostoliniowej w 1968 r. i tylko w tym roku współczynnik regresji „c” był istotny przy poziomie $\alpha = 0,01$. Również w 1972 r. występowała znaczna różnica między korelacją paraboliczną a prostoliniową, ale nie tak duża, aby można było stwierdzić istotność współczynnika „c” przy wysokim poziomie istotności, a tylko przy $\alpha = 0,3$. W pozostałych latach nie można było w ogóle stwierdzić istotnej zależności krzywoliniowej między rozpatrywanymi zmiennymi.

Przy posługiwaniu się regresją logarytmiczną mamy do czynienia nie z dwoma współczynnikami funkcji, lecz z jednym („b”). Przy jednym współczynniku łatwiej jest uzyskać jego ocenę statystycznie istotną, ale nie oznacza to, że potęgowy model funkcji przewyższa funkcję wielomianową drugiego stopnia. Również przy stosowaniu funkcji potęgowej należałoby określić, czy stopień wyjaśnienia zmienności plonu istotnie różni się od stopnia wyjaśnienia tej zmienności przez regresję prostoliniową.

Z danych SHR Ułhówek (plon zbóż — nawożenie mineralne) wynikało, że rozkład współrzędnych badanych cech zbliżony był do krzywej w kształcie pochyłonego S. W rezultacie obliczeń uzyskano następujące funkcje o statystycznie istotnych parametrach:

$$Y' = 12,30 + 5,612x^2 - 1,072x^3; i_{yx} = 0,923$$

$$Y' = 10,03 + 7,26x; r_{yx} = 0,906$$

$$(\ln Y)' = 2,82633 + 0,58760 \ln x; r_{\ln y \ln x} = 0,907$$

$$Y' = 16,88 x^{0,5876}; i_{yx} = 0,914$$

Z podanych obok funkcji indeksów i współczynników wynika, że i w tym przypadku korelacja logarytmiczna nie równała się potęgowej, choć ta ostatnia była nieco wyższa, ale nie przewyższała korelacji krzywoliniowej, odnoszącej się do funkcji trzeciego stopnia. Różnice między wszystkimi współczynnikami i indeksami korelacji nie były wprawdzie statystycznie istotne przy tak małej ilości obserwacji (15 lat), ale kształt poszczególnych funkcji znacznie się różnił, co będzie wykazane w następnej części artykułu.

Wyrażona w SHR Ułhówek zależność między plonem zbóż a nawożeniem mineralnym niepełnym trójmianem nie była przypadkowa. Z rozmieszczenia współrzędnych zaobserwowano, iż należałoby zastosować funkcję wielomianową trzeciego stopnia. Obliczone współczynniki takiej funkcji ($Y' = 10,73 + 2,634x + 4,334x^2 - 0,888x^3$) były zupełnie nieistotne, podczas gdy indeks korelacji bardzo wysoki (0,923) i istotny. Wobec tego usunięto z modelu funkcji człon bx i otrzymano funkcję $Y' = a + cx^2 + dx^3$ o istotnych parametrach i takim samym indeksie korelacji. Wynika stąd, że istotność poszczególnych współczynników regresji jest również ważnym kryterium wyboru odpowiedniego modelu funkcji.

Dotychczas porównywane były współczynniki i indeksy korelacji pomiędzy dwoma zmiennymi. Jednak wszystkie uwagi odnoszą się również do funkcji wieloczynnikowej, w której obok nawożenia mineralnego występują inne zmienne niezależne. Podobnie jak korelacja pojedyncza, tak i wielokrotna korelacja logarytmiczna nie równa się potęgowej. Potwierdzają to podane w tab. 2 współczynniki i indeksy korelacji wielokrotnej logarytmicznej i potęgowej pomiędzy plonem przeliczeniowym

a nawożeniem mineralnym i wskaźnikiem bonitacji gleb*. Jednocześnie w tabeli tej porównano je ze współczynnikami korelacji wielokrotnej przy założeniu prostoliniowym.

Tabela 2

Współczynniki korelacji wielokrotnej logarytmicznej, potęgowej i prostoliniowej między plonami przeliczeniowymi a nawożeniem mineralnym (x_1) i jakością gleb (x_2) w 55 gospodarstwach państwowych woj. lubelskiego w latach 1968—1972

Lata zbioru	$R_{\ln y \cdot \ln x_1 \ln x_2}$	I_{yY}	$R_{y \cdot x_1 x_2}$
1968	0,698	0,654	0,693
1969	0,781	0,754	0,771
1970	0,801	0,812	0,807
1971	0,822	0,819	0,820
1972	0,819	0,799	0,802

Z tab. 2 wynika, że w 4 latach współczynniki korelacji wielokrotnej logarytmicznej były wyższe od analogicznych indeksów korelacji potęgowej. Tylko w jednym roku (1970) indeks korelacji potęgowej był wyższy od współczynnika korelacji logarytmicznej. W tym też roku niższy był współczynnik korelacji wielokrotnej prostoliniowej od indeksu korelacji potęgowej, ale różnica była mało istotna. W pozostałych 4 latach współczynniki korelacji wielokrotnej prostoliniowej były wyższe od indeksów korelacji potęgowej, ale niższe od wielokrotnej korelacji logarytmicznej. Opieranie się w tym przypadku na współczynnikach korelacji logarytmicznej, pomijając indeksy korelacji potęgowej, prowadzi wprost do faworyzowania funkcji potęgowej.

Mogą występować przypadki, jak to miało miejsce w 1970 r., że wieloczynnikowa funkcja potęgowa charakteryzuje się wyższą korelacją potęgową w porównaniu z innymi modelami funkcji. Wprowadzane do modelu funkcji inne zmienne niezależne, poza nawożeniem mineralnym, mogą powodować, że ścisłość związku między plonem a wieloma zmiennymi będzie wyższa, ale trudno zgodzić się, aby cząstkowa regresja plonu względem nawożenia mineralnego mogła być wyrażona krzywą potęgową.

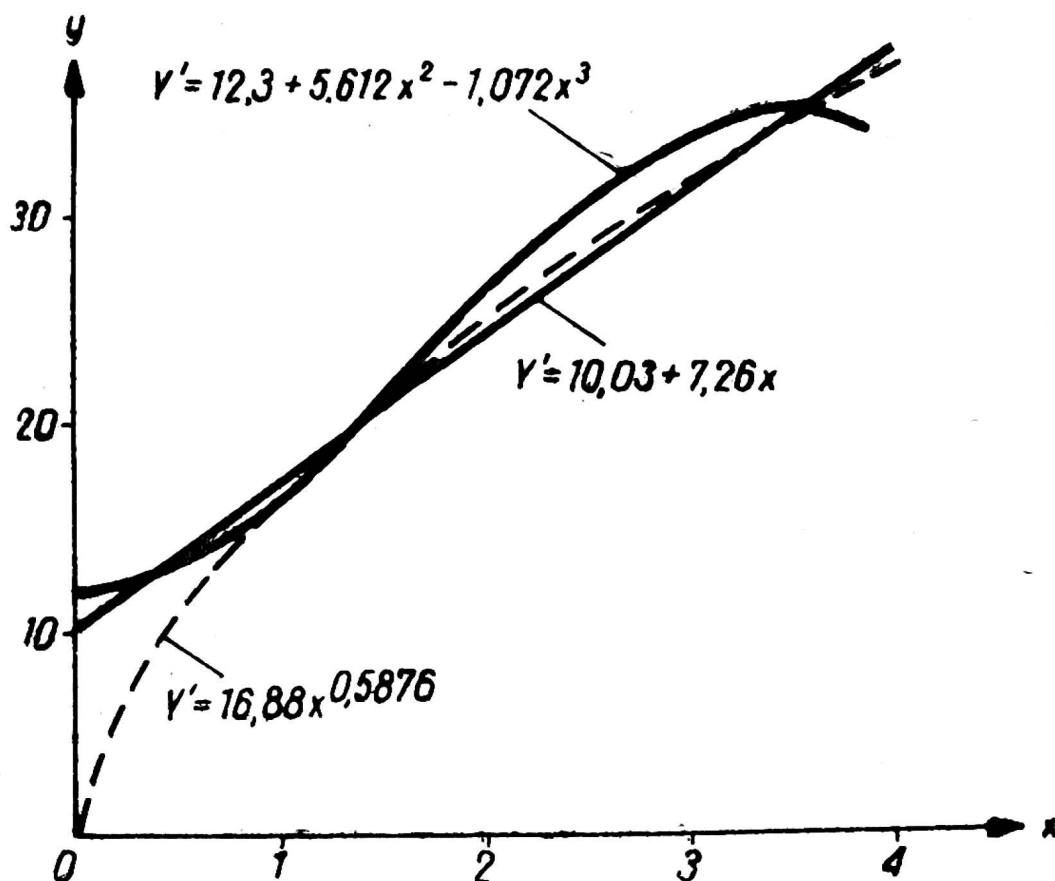
Charakterystyka przebiegu porównywanych funkcji

Przy aproksymowaniu modelu funkcji ważnym zagadnieniem jest również odpowiedni kształt krzywej opisującej związek między intere-

* Wskaźniki bonitacji obliczono według współczynników stosowanych w PGR: kl. I — 3; II — 2,6; IIIa — 2,3; IIIb — 2,1 IVa — 1,8; IVb — 1,6; V 1,3; VI — 1.

sującymi nas zmiennymi, przy czym krzywa taka winna mieć metodyczne i merytoryczne uzasadnienie. Wydaje się, że funkcja potęgowa nie spełnia tych warunków i posiada właściwości sprzeczne z rzeczywistą relacją nawożenie — plon.

Porównania krzywej potęgowej z krzywą kształtu pochylonego S i prostą dokonano na przykładzie SHR Ułhówek, a krzywej potęgowej z krzywą paraboliczną w oparciu o dane z 55 gospodarstw w 1968 r., gdyż tylko w tym roku wystąpiła istotna zależność krzywoliniowa kształtu parabolicznego.



Rys. 2. Zależność między nawożeniem mineralnym (x) a plonem zbóż (y) w SHR Ułhówek wyrażona funkcjami: wielomianową trzeciego stopnia, potęgową i prostoliniową

Na rys. 2 przedstawiono trzy interesujące nas modele funkcji, przy czym przypominamy, że zmienną zależną (y) jest plon 4 zbóż, a zmienną niezależną (x) — nawożenie mineralne w q NPK/ha GO.

Przebieg porównywanych na rys. 2 funkcji był wyraźnie zróżnicowany, przy czym należy zauważyć, że funkcja wielomianowa trzeciego stopnia najbardziej odpowiada teoretycznej krzywej nawozowej. W porównaniu z nią początkowy odcinek funkcji potęgowej był diametralnie różny, ponieważ dolne krzywizny obydwu funkcji były do siebie odwrócone. Ten pierwszy odcinek krzywej potęgowej — od początku układu osi współrzędnych do przecięcia się wszystkich trzech porównywanych

funkcji — nie odpowiada rzeczywistej relacji nawożenia — plon. Na omawianym odcinku krzywej potęgowej, zarówno plon oszacowany funkcją, jak i krańcowa efektywność nawożenia mineralnego nie mogą być brane pod uwagę, gdyż uzyskiwane wyniki są zbyt odbiegające od rzeczywistości.

W funkcji wielomianowej trzeciego stopnia punkt przecięcia się krzywej z osią rzędnych odpowiada wyrazowi wolnemu „a”, który jest teoretycznie oszacowanym plonem, jaki w danych warunkach można uzyskać bez nawożenia mineralnego. Tego plonu nie można oszacować przy pomocy funkcji potęgowej, ponieważ jej matematycznym założeniem jest, że bez nawożenia mineralnego plon równa się zero, co oczywiście stanowi sprzeczność z rzeczywistością. Z tych względów funkcja ta nie powinna być stosowana przy analizie efektywności niskich dawek nawozowych.

W funkcji potęgowej współczynnik „a” oznacza plon, jaki można uzyskać przy zastosowaniu jednostki nawożenia na jednostkę powierzchni. Zależy on więc od tego, w jakich jednostkach zostało wyrażone nawożenie mineralne. W naszych przykładach występowały wysokie współczynniki „a”, ponieważ nawożenie było wyrażone w q NPK/ha GO. Dla SHR Ułhówek np. omawiany współczynnik wynosił 16,88, a przy wyrażeniu nawożenia w kg NPK/ha GO współczynnik ten wyrażał się liczbą 1,13. Dzieje się tak dlatego, że w funkcji logarytmicznej $\ln Y = \ln a + b \ln x$, gdy nawożenie (x) równa się 1, to $b \ln x = 0$, a $\ln Y = \ln a$, czyli $Y = a$. Podobnie w funkcji wieloczynnikowej ($\ln Y = \ln a + b_1 \ln x_1 + b_2 \ln x_2 + \dots + b_n \ln x_n$) współczynnik „a” oznacza plon jaki można uzyskać, kiedy każdy z czynników równa się jedności. Nie można zatem w funkcji potęgowej traktować współczynnika „a” jako ocenę plonu uzyskiwanego bez nawożenia mineralnego (1) lub jako „efekt działania nie uwzględnionych bezpośrednio czynników plonotwórczych” (2).

W funkcji prostoliniowej, w prównaniu z funkcją trzeciego stopnia, wyraz wolny „a” stanowi w pewnym zakresie szacunek plonu uzyskiwanego bez nawożenia mineralnego, ale tylko w tych przypadkach, kiedy można udowodnić występowanie krzywej nawozowej w kształcie S. W przeciwnych bowiem przypadkach wielkość tego wyrazu będzie uzależniona od tego, wokół jakiego odcinka krzywej rozmieszczone zostaną współrzędne badanych cech.

Pierwszy odcinek prostej — od osi rzędnych do pierwszego przecięcia się wszystkich trzech porównywanych funkcji — jest bardziej zbliżony do krzywej trzeciego stopnia niż analogiczny odcinek krzywej potęgowej. Na tym odcinku z całą pewnością funkcja prostoliniowa lepiej odzwierciedla zależność między nawożeniem mineralnym a plonem niż funkcja potęgowa.

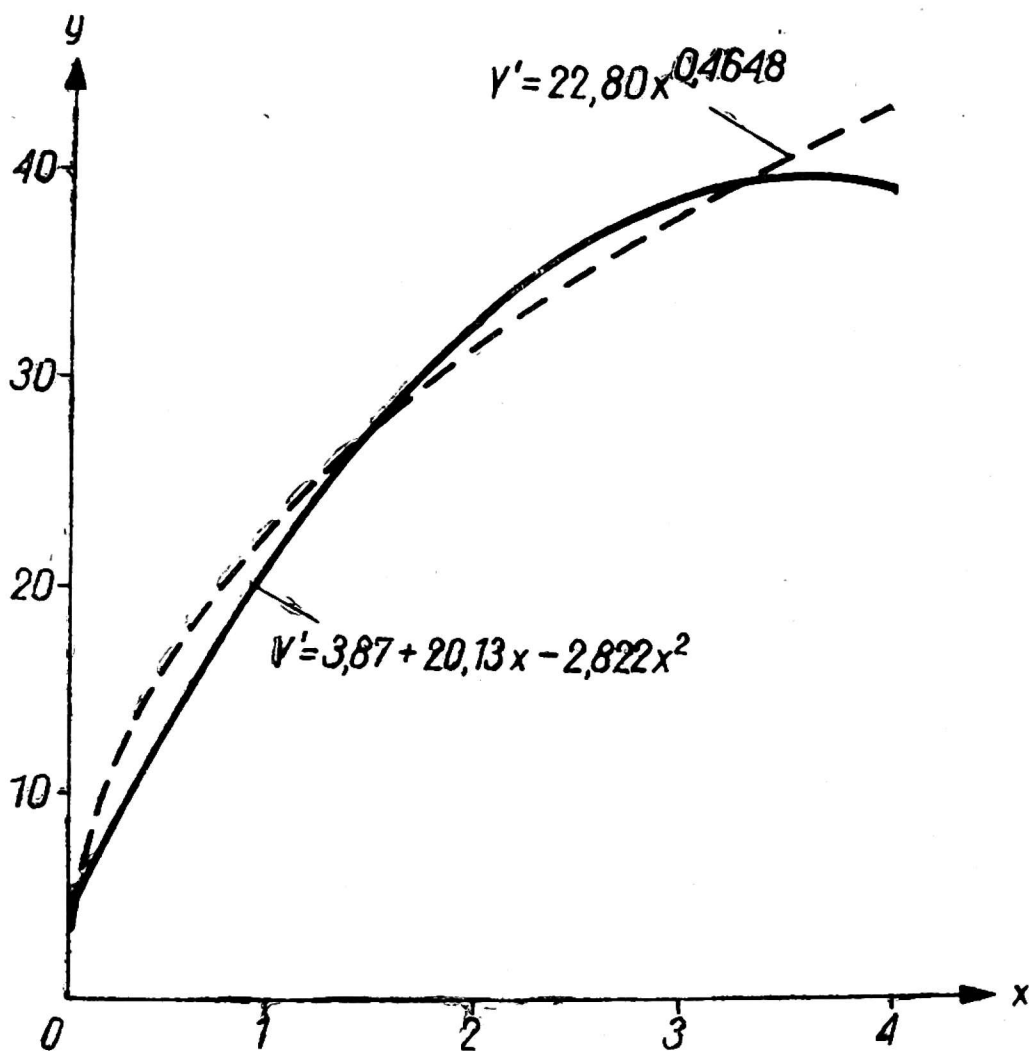
Środkowy odcinek przebiegu porównywanych funkcji — od pierwsze-

go przecięcia się na rys. 2 do następnego — był również znacznie zróżnicowany. Zarówno krzywa potęgowa, jak i prosta wyraźnie odbiegały od krzywej trzeciego stopnia. Analizowany odcinek jest bardzo ważny, gdyż na nim występują najbardziej interesujące nas zmiany krańcowej efektywności nawożenia mineralnego i na tym odcinku możemy poszukiwać optymalnego poziomu zastosowania nawozów z ekonomicznego i przyrodniczego punktu widzenia. Z tego względu na analizowanym odcinku nie jest wskazane stosowanie funkcji potęgowej i prostoliniowej, ponieważ nie posiadają one właściwości analityczno-optymalizacyjnych.

Dalszy przebieg porównywanych funkcji, od punktu drugiego przecięcia się ich, w którym to punkcie wystąpił najwyższy plon zbóż oszacowany funkcją trzeciego stopnia, był wyraźnie zróżnicowany. Zgodnie z funkcją prostoliniową i potęgową plon winien w dalszym ciągu wzrastać, co nie miało miejsca w rzeczywistości. Również trudno zgodzić się z dalszym przebiegiem funkcji trzeciego stopnia, ponieważ z całą pewnością dalszy jej odcinek nie odpowiada rzeczywistości i nie występuje tak duży spadek plonu, jaki wykazuje ta funkcja. Ma jednak ona tę zaletę, że pozwala na optymalizowanie poziomu nawożenia i stosowanie racjonalnych dawek nawozowych. Zadaniem rolnika jest stosowanie takiego układu pozostałych czynników plonotwórczych, aby nawożenie mineralne występowało w dalszym ciągu jako czynnik w minimum i aby następowało przesuwanie się punktu ekstermalnego (Liebiga) w kierunku dla nas pożądanym. Taka analiza i podobne wnioski są niemożliwe przy stosowaniu funkcji potęgowej i prostoliniowej. Można więc wnioskować, że funkcja potęgowa, jako metoda analizy efektywności nawożenia mineralnego, nie powinna być stosowana przy niskim i wysokim poziomie zużycia nawozów mineralnych.

Gdy pominiemy dolny odcinek krzywej trzeciego stopnia, to łatwo zauważyć, że kształt pozostałego odcinka zbliżony będzie do paraboli. Stanowi to uzasadnienie dla stosowania funkcji parabolicznej wówczas, kiedy nie dysponujemy danymi odzwierciedlającymi dolny odcinek krzywej trzeciego stopnia. Gdy np. w SHR Ułhówek pominiemy dane z pierwszych 4 lat, to w pozostałych 11 latach można posłużyć się jedynie funkcją paraboliczną (11).

Porównanie krzywej potęgowej z paraboliczną przedstawiono na rys. 3, z którego wynika, że pierwszy odcinek przebiegu obydwu krzywych był wyraźnie różny. Krzywa potęgowa musi zawsze nawiązywać do początku układu osi współrzędnych i stromo zdąża do rozkładu badanych współrzędnych, po czym przebiega łagodną krzywizną, mało odbiegającą od prostej. Krzywa paraboliczna natomiast w całości podporządkowana jest rozkładowi współrzędnych i może przecinać osie współrzędnych w różnych miejscach. Jest więc modelem bardziej elastycznym, dającym



Rys. 3. Zależność między nawożeniem mineralnym (x) a plonem przeliczeniowym w JZ (y) w 55 gosp. państwowych woj. lubelskiego w r. 1968 wyrażona funkcją paraboliczną i potęgową

się lepiej dopasowywać do badanej zmienności, a tym samym powinna występować wyższa ścisłość związku w porównaniu z funkcją potęgową. Ponadto funkcja paraboliczna, podobnie jak trzeciego stopnia, posiada właściwości analityczno-optymalizacyjne i pod tym względem przewyższa funkcję potęgową i prostoliniową.

Krańcowa efektywność nawożenia mineralnego a model funkcji produkcji

Analiza krańcowej efektywności nawożenia mineralnego jest zawsze związana z modelem funkcji, gdyż przyrost plonu na skutek wzrostu nawożenia o jednostkę wyraża się pierwszą pochodną danej funkcji. W przypadku potęgowego modelu funkcji $Y' = ax^b$, pierwsza pochodna wyraża się wzorem:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = b \frac{Y'}{x},$$

gdzie Δy — przyrost plonu, Δx — przyrost nawożenia o jednostkę, b — współczynnik elastyczności, Y' — plon oceniony funkcją potęgową, x — nawożenie mineralne.

Założeniem funkcji potęgowej jest stała (średnia) elastyczność plonu względem nawożenia mineralnego, co stanowi mało uzasadnioną cechę tej funkcji. Zgodnie z tym założeniem jej pierwsza pochodna, czyli efektywność krańcowa, jest wprost proporcjonalna do współczynnika elastyczności i plonu ocenionego funkcją, a odwrotnie proporcjonalna do nawożenia.

Stosunek $\frac{Y'}{x}$ posiada charakter wskaźnika przeciętnej efektywności nawożenia. Wskaźnik ten wraz ze wzrostem nawożenia mineralnego systematycznie maleje — początkowo bardzo szybko, a w miarę oddalania się od zerowego poziomu nawożenia — coraz wolniej. Ponieważ współczynnik elastyczności jest stały, to zmniejszanie się krańcowej efektywności następuje w takim stopniu, w jakim maleje efektywność przeciętna. Wskaźnik przeciętnej efektywności nawożenia mineralnego — praktycznie rzecz biorąc — nigdy nie równa się zero, tym samym i krańcowa efektywność wyrażona pochodną funkcji potęgowej nie może być mniejsza od zera, co nie jest zgodne z rzeczywistością.

Tabela 3

Krańcowa efektywność nawożenia mineralnego w kg lub setnych częściach JZ obliczona z pochodnych różnych modeli funkcji

NPK q/ha	SHR Ułhówek			55 gospodarstw w 1968r.	
	f. 3 stopnia	f. prostoliniowa	f. potęgowa	f. paraboliczna	f. potęgowa
0,5	4,82	7,26	13,23	17,31	15,75
1,0	8,03	7,26	9,92	14,49	10,60
1,5	9,63	7,26	8,39	11,66	8,53
2,0	9,62	7,26	7,46	8,84	7,13
2,5	8,01	7,26	6,80	6,02	6,48
3,0	4,79	7,26	6,30	3,20	5,87
3,5	-0,04	7,26	5,92	0,37	5,41
4,0	—	7,26	5,60	-2,45	5,05

W tab. 3 przedstawiono analizę krańcowej efektywności nawożenia mineralnego, dokonaną w oparciu o funkcję wykreślone na rys. 2 i 3. Z tabeli tej wynika, że krańcowa efektywność wyrażona pochodną funkcji trzeciego stopnia początkowo wzrastała, następnie po osiągnięciu swojego maksimum malała do zera, a po przekroczeniu 3,49 q NPK na 1 ha GO przybierała wartości ujemne. Krańcowa efektywność obliczona

z pochodnej funkcji kwadratowej systematycznie malała do zera, a po przekroczeniu 3,57 q NPK/ha GO przybierała wartości ujemne. Natomiast efektywność krańcowa wyrażona pochodną funkcji potęgowej początkowo malała szybko (na mało prawdopodobnym odcinku krzywej), a w miarę wzrostu poziomu nawożenia jej spadki były coraz mniejsze. Zgodnie z asymptotycznym charakterem tej funkcji krańcowa efektywność nawożenia mineralnego nie może przybierać wartości ujemnych, ani równać się zero. W przypadku zastosowania funkcji prostoliniowej, efektywność nawożenia wyraża się współczynnikiem regresji prostej i posiada charakter efektywności przeciętnej.

Wydaje się, że przyjmowanie stałej elastyczności plonu względem nawożenia mineralnego jest mniej prawdopodobne niż wyrażenie efektywności współczynnikiem regresji prostej, szczególnie wtedy, kiedy nie można udowodnić istotnej zależności krzywoliniowej. Przy obliczaniu krańcowej efektywności nawożenia mineralnego proporcjonalnie do stałej (średniej) elastyczności model funkcji nie odgrywa większej roli. Można przekonać się o tym, przyjmując stały współczynnik elastyczności z funkcji potęgowej i plony oszacowane funkcjami: trzeciego stopnia (Y'_1), paraboliczną (Y'_2), prostoliniową (Y'_3) i potęgową (Y'_4). Tak obliczone wskaźniki „krańcowej efektywności” nawożenia zamieszczono w tab. 4.

Tabela 4

„Krańcowa efektywność” nawożenia mineralnego w kg obliczona proporcjonalnie do stałej elastyczności plonu względem nawożenia przy plonie oszacowanym funkcjami: trzeciego stopnia (Y'_1), paraboliczną (Y'_2), prostoliniową (Y'_3) i potęgową (Y'_4)

NPK q/ha	SHR Ułhówek			55 gospodarstw w 1968 r.	
	b $\frac{Y'_1}{x}$	b $\frac{Y'_3}{x}$	b $\frac{Y'_4}{x}$	b $\frac{Y'_2}{x}$	b $\frac{Y'_4}{x}$
0,5	15,95	16,05	13,23	12,21	15,75
1,0	9,90	10,16	9,92	9,38	10,60
1,5	8,35	8,20	8,39	8,56	8,53
2,0	7,69	7,21	7,46	7,61	7,13
2,5	7,20	6,62	6,80	6,78	6,48
3,0	6,63	6,23	6,30	6,01	5,89
3,5	5,89	5,95	5,92	5,27	5,41
4,0	4,92	5,74	5,60	4,55	5,05

Z tab. 4 wyraźnie wynika, pomijając pierwsze odcinki przebiegu funkcji (do 1 q NPK/ha GO), że wszystkie wskaźniki obliczone proporcjonalnie do średniej elastyczności są zbliżone do siebie i przy takim obliczaniu wskaźniki krańcowej efektywności nawożenia mineralnego są mało uza-

leżnione od modelu funkcji. Wszystkie wskaźniki występują ze znakiem plus, mimo że funkcje wielomianowe drugiego i trzeciego stopnia wykazywały już spadek plonu.

Uwagi końcowe

Przeprowadzona analiza porównawcza funkcji potęgowej z wielomianową drugiego i trzeciego stopnia oraz z funkcją prostoliniową wykazała, że funkcja potęgowa, jako metoda badania efektywności nawożenia mineralnego, nie ma pełnego uzasadnienia z metodycznego i merytorycznego punktu widzenia.

Ze względu na właściwości matematyczno-analityczne tej funkcji może być ona łatwo przeceniana jako metoda. Dzieje się to szczególnie wtedy, kiedy charakterystyki statystyczne postaci logarytmicznej odnosi się do postaci potęgowej, a także wtedy, kiedy podkreśla się implikatywny (mnożnikowy) charakter funkcji z pominięciem addytywnego (sumującego) charakteru postaci logarytmicznej. Estymowanie funkcji potęgowej klasyczną metodą najmniejszych kwadratów (na logarytmach zmiennych) podlega tym samym prawidłowościom, jakie występują przy estymacji funkcji prostoliniowej. Podobnie, jak przy estymowaniu parametrów funkcji wieloczynnikowej prostoliniowej, tak i przy postaci logarytmicznej występująca korelacja pomiędzy zmiennymi niezależnymi (interkorelacja) utrudnia prawidłową ocenę parametrów funkcji i nie zawsze jesteśmy w stanie określić cząstkowego wpływu danej zmiennej na plon.

LITERATURA

1. Brzoza A., Kurek E.: Efektywność i współzależność czynników żywności. Zagadnienia Ekonomiki Rolnej 3, 1972.
2. Brzoza A., Kurek E.: Statyczna analiza porównawcza względnej efektywności nawożenia w przekroju terytorialnym. Zagadnienia Ekonomiki Rolnej 1, 1974.
3. Elandt R.: Statystyka matematyczna w zastosowaniu do doświadczałnictwa rolniczego. PWN, Warszawa 1964.
4. Heady E. O., Dillon J. L.: Funkcje produkcji rolniczej. Zbiór prac: Metody matematyczne w ekonomice i planowaniu rolnictwa, PWRiL, Warszawa 1965.
5. Kurek E.: Poziom nawożenia mineralnego a intensywność i produktywność w gospodarstwach indywidualnych. Zagadnienia Ekonomiki Rolnej 6, 1971.
6. Kurek E.: Statystyczna analiza korelacji i regresji podstawowych czynników kształtujących plony zbóż. Studia i Materiały z. 336, 1972.
7. Kurek E.: Wpływ nawożenia mineralnego i jakości gleby na plony poszczególnych zbóż oraz na plony siana łąkowego. Zagadnienia Ekonomiki Rolnej 1, 1973.

8. Kurek E.: Nawożenie podstawowych roślin i jego efektywność w gospodarstwach prowadzących rachunkowość rolną w latach 1956/57 — 1971/72. *Studia i Materiały* z. 380, 1973.
9. Kurek E.: Efektywność nawożenia mineralnego w latach 1971 i 1972 w poszczególnych powiatach i województwach. *Studia i Materiały* z. 395, 1973.
10. Marszałkiewicz T.: *Metody statystyczne w badaniach ekonomiczno-rolniczych*. PWN, Warszawa 1972.
11. Płudowski H.: Efektywność wysokiego poziomu nawożenia mineralnego w przedsiębiorstwie rolniczym. *Postępy Nauk Rolniczych* 2, 1974.
12. Płudowski H.: *Badanie efektywności nawożenia metodą funkcji produkcji*. Dział Wydawnictw i Małej Poligrafii IUNG, Puławy 1975.
13. Podkominer L.: Przyczynek do probabilistycznej teorii krzywej nawozowej. *Zagadnienia Ekonomiki Rolnej* 1, 1971.
14. Praca zbiorowa pod red. St. Bartosiewicza: *Metody ekonomiczne*. PWE, Warszawa 1974.
15. Zelas A.: Zastosowanie funkcji produkcji do badania efektywności nawożenia. *Zagadnienia Ekonomiki Rolnej* 3, 1964.