

PROJEKTOWANIE MORFOLOGII MINIMALNIE SZTYWNYCH SZACHOWNICOWYCH

Zenon Rychter

Wydział Architektury, Politechnika Białostocka, ul. O. Sosnowskiego 11, 15-893 Białystok
E-mail: rychter@pb.edu.pl

MORPHOLOGY DESIGN OF MINIMALLY RIGID CHESSBOARD FRAMES

Abstract

The paper deals with the morphology design of planar minimally rigid chessboard-like rectangular frames. Morphologies are defined by divisions of a chessboard into rigid and non-rigid cells, and by patterns of both types of cells. A minimally rigid frame has the lowest possible number of rigid cells, properly distributed. Such frames offer economy by minimizing the number of structural elements and joints. The frames can easily be folded. A simple method is developed for the construction of morphologies securing minimal rigidity of frames. The method is recurrent – based on repeated extension of a rigid rectangle by one layer of cells. Numerous applications of the method are provided, illustrating diverse morphologies. The method can be of use to furniture designers, interior designers, and architects by enabling fast design of varied morphologies of minimalist, economical frames, easy to fold and deploy.

Streszczenie

Przedmiotem pracy jest projektowanie morfologii płaskich szkieletów o strukturze prostokątnej szachownicy i minimalnej sztywności. Morfologię definiuje podział komórek szachownicy na komórki sztywne i nieszttywne oraz konfiguracja obu rodzajów komórek. Szkielet minimalnie sztywny ma najmniejszą dopuszczalną liczbę komórek sztywnych, prawidłowo rozłożonych. Szkielet taki jest oszczędny – zawiera minimum elementów i połączeń. Szkielety można łatwo składać. W pracy przedstawiono prostą metodę konstrukcji morfologii gwarantujących minimalną sztywność szkieletu. Metoda jest rekurencyjna – polega na powtarzalnym poszerzaniu minimalnie sztywnego prostokąta o jedną warstwę komórek. Podano liczne przykłady konstrukcji różnorodnych morfologii proponowaną metodą. Wyniki pracy mogą być wykorzystane przez projektantów mebli, projektantów wnętrz i architektów do szybkiego, wielowariantowego projektowania morfologii minimalistycznych, oszczędnych szkieletów, łatwych w montażu i demontażu.

Keywords: furniture design; interior design; architectural design; structural morphology; minimally rigid frames; foldable frames

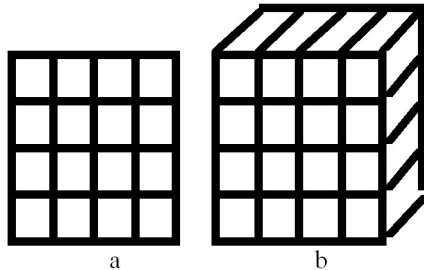
Słowa kluczowe: projektowanie mebli; projektowanie wnętrz; projektowanie architektoniczne; morfologia konstrukcji; szkielety minimalnie sztywne; szkielety składane

WPROWADZENIE

Przedmiotem pracy są prostokątne, w szczególności kwadratowe, szkielety zbudowane z identycznych prostokątnych (lub kwadratowych) komórek, ułożonych w warstwach poziomych i pionowych. Liczba warstw jest dowolna. Proporcje komórek i całego szkieletu są dowolne. Rycina 1 przedstawia szkielet rozmiaru 4x4, o czterech warstwach poziomych i czterech warstwach pionowych.

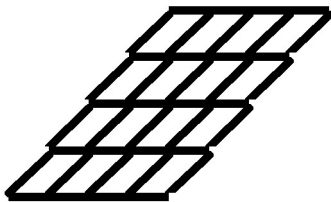
Linie szkieletu mogą być w rzeczywistości cienkimi prętami (ryc. 1a), tworząc ramę lub – po dodaniu prętów ukośnych (krzyżulców) – kratę. Linie te mogą też oznaczać cienkie płyty, tworząc układ boksów (ryc. 1b). Konstrukcja może być meblem, elementem wnętrza, elementem małej architektury, konstrukcją budowli prętowej lub płytowej. Wymiary szkieletu są dowolne. Dowolny jest też materiał lub materiały, z któ-

rych zbudowany jest szkielet, o ile jest to materiał konstrukcyjny, zdolny do przenoszenia obciążeń bez różnych deformacji. Rozpatrujemy szkielety swobodne, niepodparte, którym otoczenie nie pomaga w uzyskaniu sztywności.



Ryc. 1. Szkielet 4x4 komórkowy: (a) prętowy, (b) płytowy. Rys. autor

Szkielet, którego pręty łączą się ze sobą w węzłach przegubowo, jest całkowicie pozbawiony sztywności, jest mechanizmem nienadającym się na konstrukcję zdolną do przenoszenia obciążeń. Na przykład kwadratowe komórki deformują się bez oporu w romby, warstwy komórek ślizgają się po sobie, zmienia się kształt całego szkieletu (ryc. 2). Poszczególne pręty nie pracują, nie naprężają się, nie deformują się – nie są ani ściskane, ani rozciągane, ani zginane.



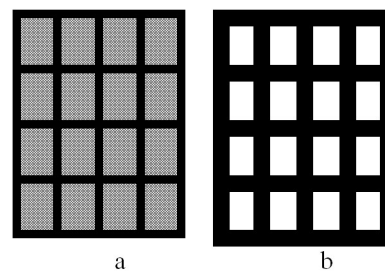
Ryc. 2. Deformacja niesztywnego szkieletu o węzłach przegubowych. Rys. autor

Zastąpienie węzłów przegubowych (kratowych), umożliwiających wzajemne obroty prętów, węzłami sztywnymi, ramowymi, eliminującymi obroty wzajemne w węzłach, tworzy konstrukcję teoretycznie zdolną do przenoszenia obciążeń, ale mało sztywną w przypadku cienkich prętów. Sztywne połączenia uniemożliwią co prawda zmiany kątów w węzłach, ale deformacja podobna do deformacji kratownicy z ryciny 2 jest nadal możliwa. Wskutek łatwego zginania cienkich prętów szkieletu kwadratowe komórki mogą przyjąć formę rombów o wygiętych krawędziach, skutkując ślizganiem się po sobie sąsiednich warstw i dużą deformacją całości.

Szkielety odkształcające się jak na rycinie 2 lub podobnie wykazują brak sztywności geometrycznej.

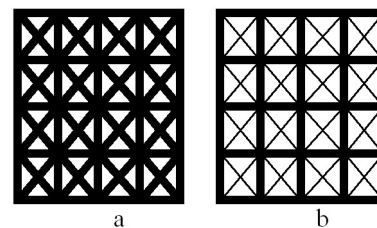
Ich słabość bierze się ze słabości komórek, łatwo odkształcalnych w romby. Zastępując komórki niesztywne sztywnymi, uzyskujemy sztywny szkielet. W praktyce można spotkać wiele odmian szkieletów o sztywnych komórkach.

Rycina 3 przedstawia szkielet z wiotkich prętów, którego komórki wypełnione są sztywnymi tarczami (np. sklejka w szkielecie drewnianym). Połączenia w węzłach mogą być przegubowe lub sztywne – bez istotnego wpływu na sztywność całej konstrukcji. Drugi sztywny szkielet na tym rysunku jest ramą o sztywnych połączeniach węzłowych i bardzo grubych prętach pracujących na zginanie.



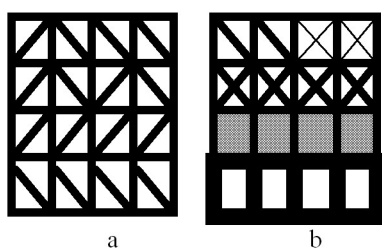
Ryc. 3. Szkielet sztywny: (a) tarczowy, (b) ramowy. Rys. autor

Rycina 4 przedstawia sztywne kratownice z parą krzyżulców w każdej komórce (skratowanie X). Skratowanie mogą stanowić sztywne pręty lub wiotkie ciągną. Węzły mogą być przegubowe lub sztywne.



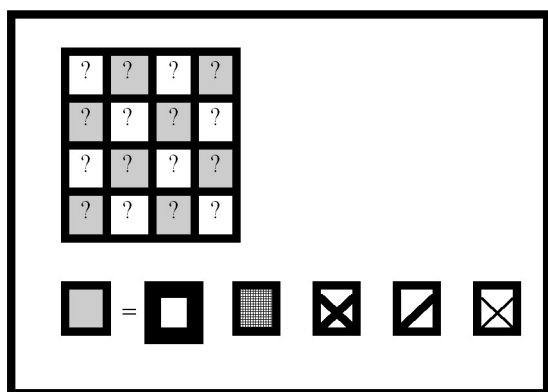
Ryc. 4. Szkielet sztywny kratowy: (a) skratowanie X prętowe, (b) skratowanie X wiotkie. Rys. autor

Rycina 5a pokazuje szkielet z jednym prętowym krzyżulcem w komórce; jest to wystarczające do usztywnienia komórki i szkieletu. Kierunek krzyżulca w różnych komórkach może być różny, dając różnorodność form, korzystną dla projektanta. Na rycinie 5b przedstawiono sztywny szkielet hybrydowy, o sztywnych komórkach różnej konstrukcji. Rozwiązanie hybrydowe także prowadzi do wielości form sztywnego szkieletu.



Ryc. 5. Szkielet sztywny:
 (a) kratownica z jednym krzyżulcem w komórce,
 (b) mieszane usztywnienia komórek. Rys. autor

Przedstawione szkielety są jakościowo ekstremalnie sztywne – sztywne są ich wszystkie komórki, co w sposób oczywisty gwarantuje sztywność całego układu. Decyzje projektanta ograniczone są do wyboru typu/typów komórek sztywnych; w przypadku kratownic z jednym krzyżulcem (ryc. 5a) należy określić kierunki krzyżulców w poszczególnych komórkach. Badaną w tej pracy alternatywą dla szkieletów ekstremalnie sztywnych jakościowo są szkielety jakościowo, geometrycznie minimalnie sztywne (ryc. 6).



Rys. 6. Problem morfologii szkieletu minimalnie sztywnego: jaki układ komórek sztywnych (szarych) w minimalnej liczbie zapewnia sztywność całości? Rys. autor

Szkielet minimalnie geometrycznie sztywny ma minimalną liczbę komórek sztywnych, tak rozmieszczonych wśród komórek niesztywnych, by komórki niesztywne nie mogły deformować się w romby; brak deformacji komórek gwarantuje sztywność całości. Podział komórek na sztywne (szare na ryc.6) i niesztywne

(białe na ryc. 6) tworzy dwukolorową szachownicę lub mozaikę. Interesuje nas morfologia (struktura) takich szachownic – minimalna liczba komórek szarych i ich konfiguracje zapewniające sztywność szkieletu. Innymi słowy poszukujemy morfologii minimalnych.

Rozpatrywanie szachownicowych konstrukcji szkieletowych minimalnie sztywnych w kategoriach morfologii komórek sztywnych/niesztywnych zaproponował autor tej pracy w odniesieniu do kratownic prostokątnych złożonych z dowolnej liczby warstw dwukomórkowych¹. Morfologie takich kratownic można opisać dwiema prostymi regułami: (1) jedna, dowolna warstwa dwukomórkowa ma obie komórki sztywne; (2) w każdej pozostałej warstwie dwukomórkowej jest jedna komórka sztywna, zajmująca dowolną z dwóch możliwych pozycji.

Przedmiotem tej pracy są morfologie prostokątnych szkieletów szachownicowych minimalnie sztywnych o dowolnej liczbie warstw i dowolnej liczbie komórek w warstwie. Zagadnienie tak postawione nie zostało dotychczas rozwiązane. Istotne, pośrednie wskazówki o naturze badanych morfologii zawierają prace dotyczące minimalnie sztywnych płaskich kratownic^{2,3} i grafów⁴. Prace te operują pojęciami węzłów i prętów łączących węzły, a nie pojęciami dotyczącymi morfologii mozaiki komórek sztywnych i niesztywnych.

Klasyczna reguła Maxwella⁵ określa liczbę prętów minimalnie sztywnej kratownicy o danej liczbie węzłów: jest to podwojona liczba węzłów (gdyż każdy węzeł ma na płaszczyźnie dwa możliwe ruchy – przesunięcia w dwóch kierunkach) minus trzy (gdyż swobodna, niepodparta kratownica jako sztywna całość ma w płaszczyźnie trzy ruchy – dwa przesunięcia i obrót). Wskazana liczba prętów jest konieczna do powiązania węzłów w sztywne ciało. Z reguły Maxwella dotyczącej kratownic, po zastąpieniu liczby węzłów i prętów liczbą komórek sztywnych i niesztywnych prostokąta wynika, że minimalnie sztywna morfologia szachownicy prostokątnej wymaga liczby komórek sztywnych równej sumie rozmiarów poziomego i pionowego (liczonych w komórkach) minus jeden. Zasadę tę nazwiemy komórkową regułą Maxwella. Zatem szachownica na rycinie 6, o rozmiarze 4x4, w wariacie minimalnie sztywnym winna mieć $4+4-1=7$ komórek sztywnych (szarych). Jest to mniej niż połowa, $7/16=44\%$ ogólnej liczby komórek szkieletu, równej $4*4=16$. Większość komórek szkieletu, $9/16=56\%$, to komórki niesztywne

¹ Z. Rychter, A. Musiuk, *Topological sensitivity to diagonal member flips of two-layered statically determinate trusses under worst loading*, „International Journal of Solids and Structures” 2007, 44, 4942-4957.

² J.C. Maxwell, *On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames*, „Philosophical Magazine” 1864, 27, 294–299.

³ L. Henneberg, *Die graphische Statik der starren Systeme*, Leipzig 1911.

⁴ G. Laman, *On graphs and rigidity of plane skeletal structures*, „J. Engrg. Math.” 1970, 4, 331–340.

⁵ J.C. Maxwell, op. cit.

(białe). W szkieletach większych procentowy udział komórek sztywnych w całym szkielecie jest dużo mniejszy: szachownica rozmiaru 10x10, licząca $10 \cdot 10 = 100$ komórek, winna zgodnie z komórkową regułą Maxwella zawierać tylko $10 + 10 - 1 = 19$ komórek sztywnych, a więc tylko $19/100 = 19\%$, czyli mniej niż jedną piątą. Poprawne, zapewniające sztywność rozmieszczenie 19 komórek w 100 możliwych miejscach to poważne wyzwanie przy manualnym, eksperymentalnym sprawdzaniu sztywności konstrukcji, z uwagi na dużą liczbę możliwości. Komórkowa reguła Maxwella mówi tylko, ile ma być komórek sztywnych, ale nie podpowiada, jak te komórki rozmieszczać, nie wskazuje procedury budowy szkieletu o sztywnej morfologii.

Kratownice minimalnie sztywne - podobne do tej na rycinie 5a, ale z mniejszą liczbą krzyżulców, równą liczbie komórek sztywnych zgodnie z komórkową regułą Maxwella - można skonstruować klasyczną metodą Henneberga⁶. Typowy krok metody polega na przyłączeniu do istniejącej kraty minimalnie sztywnej nowego węzła za pomocą dwóch nowych prętów, nieleżących na jednej prostej. Początkowa kratka minimalnie sztywna to pojedynczy pręt. Stosując wielokrotnie krok Henneberga można zbudować różnorodne kratownice minimalnie sztywne, dowolnej wielkości. Metoda Henneberga jest konstruktywna. Operuje ona węzłami i prętami, a nie morfologią szachownicy złożonej z komórek sztywnych i nieszywnych, co czyni kłopotliwym jej zastosowanie do szkieletów usztywnionych inaczej niż pojedynczymi krzyżulcami w komórkach - tarczami, ramami, krzyżulcami X (sztywnymi i wiotkimi) lub usztywnionych hybrydowo. Proponowane w tej pracy podejście morfologiczne, operowanie komórkami sztywnymi i nieszywnymi, jest prostsze pojęciowo i wizualnie oraz bardziej abstrakcyjne, czyli ogólniejsze - dopuszczające dowolną realizację konstrukcji komórek sztywnych. Jest to krok w stronę postulowanych przez Wacława Zalewskiego⁷ metod jakościowych jako bardziej użytecznych w projektowaniu koncepcyjnym od tradycyjnych metod ilościowych.

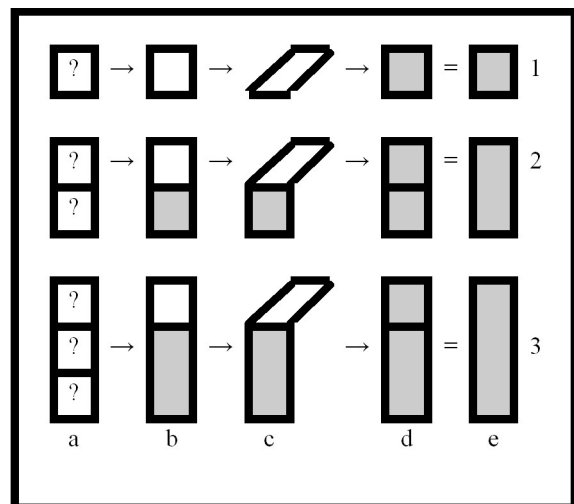
Kolejne części niniejszej pracy przedstawiają proponowaną rekurencyjną procedurę budowania, konstruowania morfologii minimalnie sztywnych szkieletów szachownicowych. Wywód jest indukcyjny, od szczegółu, przypadków najprostszyc, szkieletów małych, do ogółu, uniwersalnej procedury projektowej. Procedura ta zostaje następnie zastosowana do budowy szeregu minimalnie sztywnych szkieletów o róż-

nicowanych, interesujących funkcjonalnie i wizualnie morfologiach.

1. PROCEDURA KONSTRUOWANIA MORFOLOGII MINIMALNIE SZTYWNYCH

1.1. Pierwsze kroki procedury konstrukcyjnej

Zacznijmy od konstrukcji morfologii szkieletów najprostszyc, jednowarstwowych, złożonych z jednej, dwóch i trzech komórek (ryc. 7).



Ryc. 7. Konstrukcja minimalnej morfologii sztywnej szkieletu jednowarstwowego: (1) jednokomórkowy, (2) dwukomórkowy, (3) trójkomórkowy; (a) badany szkielet, (b) podział na warstwę nieszywną i sztywny prefabrykat, (c) deformacja, (d) szukana morfologia, (e) powiększony sztywny prefabrykat. Rys. autor

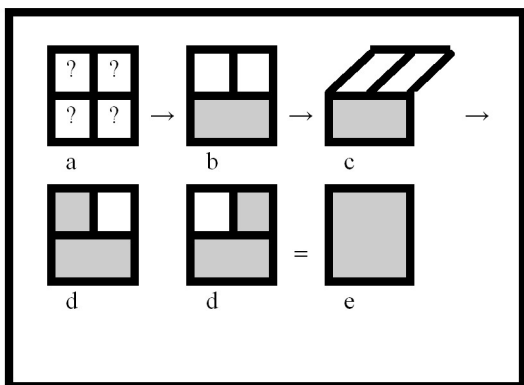
Najprostszyc, jednokomórkowy szkielet (ryc. 7.1), musi być komórką sztywną (szarą) - w przeciwnym razie deformuje się w romb. Szkielet dwukomórkowy (ryc. 7.2), można utworzyć, dodając do komórki sztywnej komórkę nieszywną (ryc. 7.2b). Ta druga komórka także musi być zamieniona na sztywną, by nie deformowała się w romb (ryc. 7.2c). W szkielecie dwukomórkowym obie komórki muszą być więc sztywne; rycina 7.2d przedstawia tę morfologię. Rycina 7.2e symbolizuje sztywny szkielet (szary), prefabrykat dwukomórkowy, bez pokazywania jego wewnętrznej struktury (morfologii). Szkielet trójkomórkowy (ryc. 7.3), powstaje przez dodanie nieszywniej komórki do sztywnego prefabrykatu dwukomórkowego (ryc. 7.3b). Dodana komórka oczywiście deformuje się, więc musi zostać usztyw-

⁶ L. Henneberg, op. cit.

⁷ A. Allen, W. Zalewski, *Form and forces. Designing efficient expressive structures*, Wiley, Hoboken NJ, 2010, s. 622.

niona, tworząc morfologię na rycinie 7.3d, symbolizowaną skrótowo przez prefabrykat trójkomórkowy na rycinie 7.3e. Uogólniając, szkielet jednowarstwowy o dowolnej liczbie komórek musi mieć wszystkie komórki sztywne (szare). Dowodzi tego powyższa konstrukcja rekurencyjna, polegająca na dodawaniu do już zbudowanego szkieletu sztywnego nowej komórki nieszywanej, sprawdzeniu, czy możliwa jest deformacja i eliminacja tej deformacji przez wprowadzenie komórki sztywnej. W ten sposób powstaje sekwencja coraz większych szkieletów sztywnych, w których zagnieźdzone są mniejsze szkielety sztywne. Najmniejszy szkielet sztywny to pojedyncza komórka sztywna. Rycina 7 przedstawia sztywny szkielet pionowy. Sztywne szkielety poziome otrzymujemy przez obrót sztywnego szkieletu pionowego. Jest to zasada oczywiście słuszna dla szkieletów dowolnych rozmiarów i budowy.

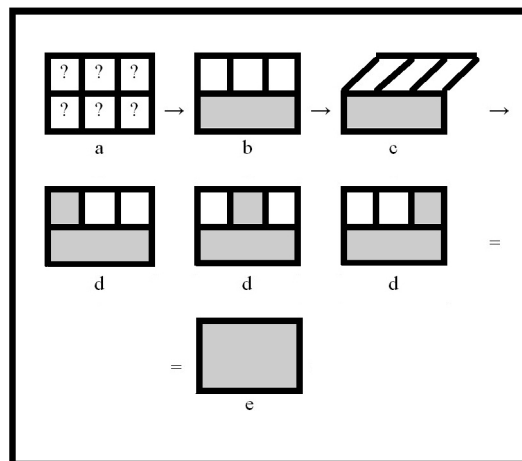
Najmniejszy szkielet dwuwarstwowy, w obu kierunkach, ma rozmiar 2x2. Budowę tego szkieletu proponowaną metodą rekurencyjną przedstawia rycina 8.



Ryc. 8. Konstrukcja minimalnej morfologii sztywnej szkieletu 2x2 komórkowego: (a) badany szkielet, (b) podział na warstwę nieszywaną i sztywny prefabrykat, (c) deformacja, (d) szukane morfologie, (e) powiększony sztywny prefabrykat. Rys. autor

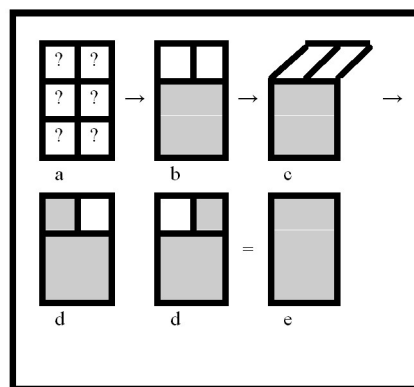
Szkielet 2x2 powstaje (ryc. 8b) przez dodanie do sztywnego prefabrykatu jednowarstwowego 1x2, skonstruowanego wcześniej (ryc. 7.2), nieszywanej warstwy dwukomórkowej 1x2. Obie komórki tej warstwy deformują się synchronicznie w romby (ryc. 7c), wystarczy więc usztywnienie jednej z tych komórek, by uzyskać, dwie morfologie sztywne 2x2 (ryc. 8d). Dodatkowe dwie morfologie 2x2 otrzymamy jako odbicia zwierciadlane (ryc. 8d) względem osi poziomej. W sumie sztywny prefabrykat 2x2 (ryc. 8e) reprezentuje cztery morfologie, różniące się położeniem jedynej w tych morfologiach komórki nieszywanej (białej).

Szkielet 2x3 (ryc. 9) utworzymy ze sztywnego prefabrykatu 1x3, skonstruowanego wcześniej na ryc. 7.3, z dodaną warstwą nieszywaną 1x3. Deformację tej warstwy można wyeliminować, usztywniając jedną, dowolną komórkę w tej warstwie, co daje trzy morfologie 2x3 (ryc. 9d). Inne morfologie 2x3 to odbicia zwierciadlane (ryc. 9d) względem osi poziomej.



Ryc. 9. Konstrukcja minimalnej morfologii sztywnej szkieletu 2x3 komórkowego: (a) badany szkielet, (b) podział na warstwę nieszywaną i sztywny prefabrykat, (c) deformacja, (d) szukane morfologie, (e) powiększony sztywny prefabrykat. Rys. autor

Szkielet 3x2 (ryc.10) jest złożeniem sztywnego prefabrykatu 2x2, skonstruowanego wcześniej na ryc. 8, i nieszywanej warstwy 1x2. Deformację tej warstwy eliminuje wstawienie jednej komórki sztywnej, w jednej z dwóch możliwych pozycji, co daje dwie morfologie 3x2 (ryc. 10d). Faktycznie jest tu osiem morfologii, gdyż skonstruowany wcześniej prefabrykat 2x2 ma cztery realizacje.

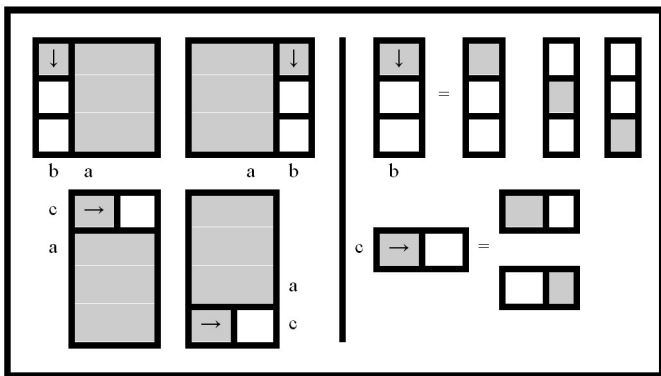


Ryc. 10. Konstrukcja minimalnej morfologii sztywnej szkieletu 3x2 komórkowego: (a) badany szkielet, (b) podział na warstwę nieszywaną i sztywny prefabrykat, (c) deformacja, (d) szukane morfologie, (e) powiększony sztywny prefabrykat. Rys. autor

Szkielety 3x2 i 2x3 to różne orientacje jednego prostokąta. Ich morfologie, skonstruowane na ryc. 10 i 8, wzajemnie się uzupełniają, należy je traktować jak jeden zbiór.

1.2. Procedura ogólna I – rozbudowa szkieletu minimalnie sztywnego

Doświadczenia zebrane powyżej, podczas konstruowania morfologii coraz większych szkieletów minimalnie sztywnych, można uogólnić do postaci uniwersalnego kroku konstrukcyjnego procedury rekurencyjnej, powtarzalnej (ryc. 11).



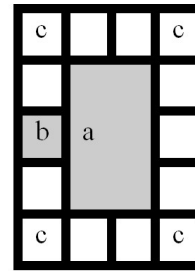
Ryc. 11. Typowy krok rozbudowy szkieletu o morfologii minimalnie sztywnej: (a) powiększany sztywny prefabrykat prostokątny, (b) dodana warstwa pionowa z lewej/prawej z ruchomą komórką sztywną, (c) dodana warstwa pozioma u góry/dółu z ruchomą komórką sztywną. Rys. autor

Dysponując sztywnym prostokątem dowolnego rozmiaru (ryc. 11a), dodajemy do niego z lewej strony lub prawej strony (ryc. 11b) albo powyżej, albo poniżej (ryc. 11c) warstwę zawierającą tylko jedną komórkę sztywną, dowolnie ulokowaną w dodanej warstwie. Tworzy to większy sztywny prostokąt. Kroki powiększania mogą być wykonane w dowolnej liczbie i dowolnej sekwencji decyzji projektowych. W każdym kroku projektant może wybrać kierunek poszerzenia i położenie dodawanej komórki sztywnej. Daje to możliwość zaprojektowania bardzo różnorodnych morfologii.

1.3. Procedura ogólna II – wypełnianie szkieletu nieszywnego

Procedura podobna do powyższej może być użyta do usztywniania zadanego szkieletu prostokątnego, którego wszystkie komórki są początkowo nieszywne (ryc. 12).

Powtarzalny krok procedury polega na dodaniu jednej sztywnej komórki (b) w dowolnym miejscu na obwodzie już usztywnionego prostokąta (a), ale poza czterema komórkami narożnymi (c). Nowy sztywny



Ryc. 12. Typowy krok wypełniania nieszywnego szkieletu komórkami sztywnymi: (a) prostokąt już usztywniony, (b) dodatkowa komórka sztywna na obwodzie prostokąta (a) z wyłączeniem naroży (c). Rys. autor

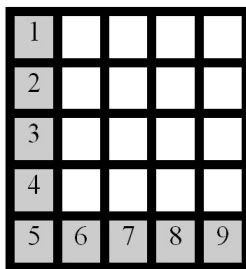
prostokąt zawiera prostokąt (a) oraz warstwę z komórką (b). Procedura kończy się, gdy powiększany sztywny prostokąt obejmuje cały wyjściowy szkielet nieszywny. Procedura zaczyna się od przekształcenia w sztywną dowolnej komórki wyjściowego szkieletu. W szkielecie 4x5 (ryc. 12) trzeba zgodnie z komórkową regułą Maxwella wstawić $4+5-1=8$ komórek sztywnych – tyle kroków liczy więc procedura usztywniania szkieletu. W pierwszym kroku mamy $4*5=20$ możliwych lokalizacji początkowej komórki sztywnej. W każdym z następujących siedmiu kroków jest kilka możliwych pozycji wstawianej komórki sztywnej. Iloczyn możliwych położeń dodawanej komórki sztywnej w ośmiu krokach jest liczbą możliwych do skonstruowania tą metodą morfologii szkieletu 4x5. Jest to niemały zbiór, a jego bogactwo, połączone z prostotą procedury projektowej, to istotne zalety dla projektanta.

2. PRZYKŁADY KONSTRUKCJI MORFOLOGII MINIMALNIE SZTYWNYCH

Poniższe przykłady dotyczą szkieletu 5x5 warstwowego, liczącego $5*5=25$ komórek. Zgodnie z komórkową regułą Maxwella szkielet minimalnie sztywny wymaga $5+5-1=9$ komórek sztywnych. Procedura (II) wypełniania nieszywnego szkieletu obejmuje 9 decyzji projektowych, tj. miejsc wstawienia 9 komórek sztywnych. W kroku początkowym należy wybrać jedną z 25 możliwych lokalizacji pierwszej komórki sztywnej. Wokół tej komórki w kolejnych krokach rośnie wewnątrz całego szkieletu coraz większy sztywny prostokąt. Procedura (I) budowy od zera sztywnego szkieletu zaczyna się od zarodka w postaci jednej sztywnej komórki, który w następnych krokach rozrasta się o warstwy z pojedynczą komórką sztywną. Pierwszy krok nie wymaga tu żadnej decyzji projektowej. Kroków decyzyjnych jest 8. Poniższe przykłady ilustrują obie procedury, I i II, jednocześnie. Komórki sztywne na rycinach 13-20 zostały ponumerowane w kolejności ich dodawania, od 1 do 9. Pod rysunkami podano sekwencje rozmiarów rosna-

cych sztywnych prostokątów. Strzałkami wskazano kierunki ruchów rozszerzających sztywne prostokąty w kolejnych krokach. Morfologie na rycinach 13-19 są na tyle regularne, że konfiguracje komórek sztywnych tworzą wyraziste kształty. Morfologia na rycinie 20 jest chaotyczna.

Najprostszy kształt to litera L (ryc. 13).

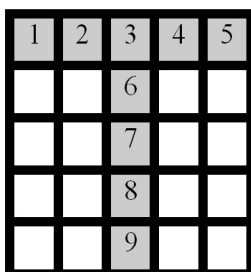


Ryc. 13. Kształt L.

Sekwencja rozmiarów sztywnych prostokątów/ruchów:
 $1 \times 1 \rightarrow 2 \times 1 \downarrow 3 \times 1 \downarrow 4 \times 1 \downarrow 5 \times 1 \rightarrow 5 \times 2 \rightarrow 5 \times 3 \rightarrow 5 \times 4 \rightarrow 5 \times 5$. Rys. autor

Wszystkie komórki sztywne znajdują się tu na obwodzie szkieletu, na dwóch sąsiednich bokach, tworząc mocne obramowanie usztywniające duży, kwadratowy obszar komórek niesztywnych, pustych. Kształt L w prosty sposób ilustruje komórkową regułę Maxwella: liczba komórek sztywnych prostokątnego szkieletu minimalnie sztywnego to suma długości wiersza i kolumny minus jeden, $5+5-1=9$. Kształt L należy do rodziny morfologii, w których sztywne są jeden wiersz i jedna kolumna szkieletu. Omawiany szkielet ma symetrię zwierciadlaną względem osi diagonalnej.

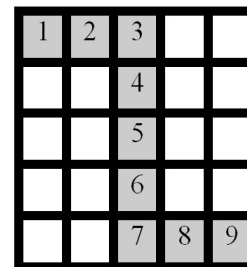
Kształt T (ryc. 14) ma także sztywny jeden wiersz (krawędziowy) i jedną kolumnę (wewnętrzną). Na obwodzie jest 6 komórek sztywnych, o 3 mniej niż w przypadku kształtu L. Komórki niesztywne, puste rozbite są na dwa prostokąty. Kształt ma symetrię zwierciadlaną względem osi pionowej.



Ryc. 14. Kształt T.

Sekwencja rozmiarów sztywnych prostokątów/ruchów:
 $1 \times 1 \rightarrow 1 \times 2 \rightarrow 1 \times 3 \rightarrow 1 \times 4 \rightarrow 1 \times 5 \downarrow 2 \times 5 \downarrow 3 \times 5 \downarrow 4 \times 5 \downarrow 5 \times 5$. Rys. autor

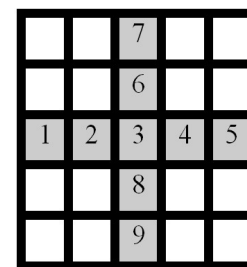
Kształt Z (ryc. 15) ma także 6 komórek sztywnych na obwodzie. Kształt cechuje symetria obrotowa – obrót o kąt półpełny wokół komórki centralnej (numer 5).



Ryc. 15. Kształt Z.

Sekwencja rozmiarów sztywnych prostokątów/ruchów:
 $1 \times 1 \rightarrow 1 \times 2 \rightarrow 1 \times 3 \downarrow 2 \times 3 \downarrow 3 \times 3 \downarrow 4 \times 3 \downarrow 5 \times 3 \rightarrow 5 \times 4 \rightarrow 5 \times 5$. Rys. autor

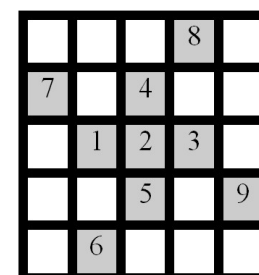
Krzyż o czterech równych ramionach (ryc. 16) to kolejny układ z jednym wierszem i jedną kolumną sztywną. Na obwodzie szkieletu są tylko cztery komórki sztywne. Komórki niesztywne są rozbite na cztery kwadraty narożne. Układ ma wszystkie cztery symetrie zwierciadlane kwadratu.



Ryc. 16. Kształt: krzyż.

Sekwencja rozmiarów sztywnych prostokątów/ruchów:
 $1 \times 1 \rightarrow 1 \times 2 \rightarrow 1 \times 3 \rightarrow 1 \times 4 \rightarrow 1 \times 5 \uparrow 2 \times 5 \uparrow 3 \times 5 \downarrow 4 \times 5 \downarrow 5 \times 5$. Rys. autor

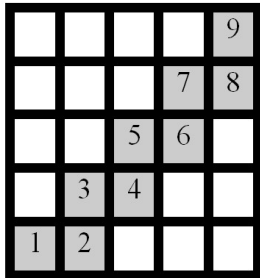
Wiatrak czteroramienny (ryc. 17) jest mniej symetryczny, bardziej pofragmentowany niż krzyż. Układ ma symetrię obrotową - obrót o kąt prosty wokół punktu centralnego (nr 2). Komórki sztywne możliwie równomiernie wypełniają cały szkielet.



Ryc. 17. Kształt: wiatrak czteroramienny.

Sekwencja rozmiarów sztywnych prostokątów/ruchów:
 $1 \times 1 \rightarrow 1 \times 2 \rightarrow 1 \times 3 \uparrow 2 \times 3 \downarrow 3 \times 3 \downarrow 4 \times 3 \leftarrow 4 \times 4 \uparrow 5 \times 4 \rightarrow 5 \times 5$. Rys. autor

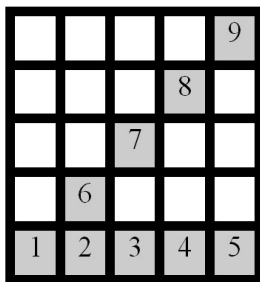
Schody podwójne (ryc. 18) wypełniają dwie sąsiednie przekątne szkieletu. Komórki nieszttywne tworzą dwa duże trójkąty narożne.



Ryc. 18. Kształt: schody podwójne.

Sekwencja rozmiarów sztywnych prostokątów/ruchów:
 $1 \times 1 \rightarrow 1 \times 2 \uparrow 2 \times 2 \rightarrow 2 \times 3 \uparrow 3 \times 3 \rightarrow 3 \times 4 \uparrow 4 \times 4 \rightarrow 4 \times 5 \uparrow 5 \times 5$. Rys. autor

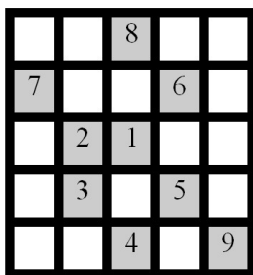
Schody pojedyncze (ryc. 19) zajmują jedną przekątną szkieletu, opierając się na sztywnej podstawie poziomej. Inne interpretacje tego kształtu to kątownik, klin, i cyfra 7 (odwrócona).



Ryc. 19. Kształt: schody pojedyncze.

Sekwencja rozmiarów sztywnych prostokątów/ruchów:
 $1 \times 1 \rightarrow 1 \times 2 \rightarrow 1 \times 3 \rightarrow 1 \times 4 \rightarrow 1 \times 5 \uparrow 2 \times 5 \uparrow 3 \times 5 \uparrow 4 \times 5 \uparrow 5 \times 5$. Rys. autor

Ostatnia przykładowa morfologia (ryc. 20) jest rozproszona, chaotyczna, niesymetryczna, pofragmentowana. Komórki sztywne są rozrzucone nieprzewidywalnie, równomiernie po całym szkielecie.



Ryc. 20. Morfologia chaotyczna, rozproszona.

Sekwencja rozmiarów sztywnych prostokątów/ruchów:
 $1 \times 1 \leftarrow 1 \times 2 \downarrow 2 \times 2 \downarrow 3 \times 2 \rightarrow 3 \times 3 \uparrow 4 \times 3 \leftarrow 4 \times 4 \uparrow 5 \times 4 \rightarrow 5 \times 5$. Rys. autor

Przedstawione przykłady pokazują, jak różnorodne mogą być morfologie minimalnie sztywnych szkieletów szachownicowych: kształtne, bezkształtne, liniowe, rozproszone, symetryczne, chaotyczne. Analogiczne morfologie można uzyskać w szkieletach większych od powyższych, kwadratowych lub prostokątnych. Swoboda tworzenia jest bardzo duża, a liczba możliwości szybko wzrasta ze wzrostem rozmiarów szkieletu. Co ważne, projektowanie morfologii minimalnie sztywnych szkieletów proponowaną metodą jest bardzo proste.

PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono prostą i efektywną metodę wizualnego projektowania morfologii minimalnie sztywnych prostokątnych szkieletów szachownicowych. Szkielety czerpią sztywność ze swej wewnętrznej budowy, czyli rozkładu komórek sztywnych, morfologii, a nie dzięki podparciu. Mogą to więc być konstrukcje przenośne, przestawne, o zmiennym lub nieprzewidywalnym sposobie połączenia z otoczeniem. Liczba komórek sztywnych, których budowa może być dowolna, jest minimalna dla zapewnienia sztywności szkieletu. W konstrukcjach o proporcjach zbliżonych do kwadratu, o znacznej całkowitej liczbie komórek, komórek sztywnych w szachownicy jest niewiele. Powstaje wtedy dużo bardzo zróżnicowanych morfologii regularnych i chaotycznych. Niewielka liczba usztywnień umożliwia łatwy montaż/demontaż takich szkieletów. Szkielety o połączeniach przegubowych mogą być łatwo składowane/rozkładane. Mogą to być ustroje prętowe lub płytowe, z dowolnego materiału konstrukcyjnego. Rozważane konstrukcje mogą być meblami, elementami wyposażenia wnętrz, małej architektury lub konstrukcji budowlanych, gdyż ich wielkość nie ma znaczenia.

LITERATURA

1. Allen A., Zalewski W. (2010), *Form and forces. Designing efficient expressive structures*, Wiley, Hoboken NJ.
2. Henneberg L. (1911), *Die graphische Statik der starren Systeme*, Leipzig.
3. Laman G. (1970), *On graphs and rigidity of plane skeletal structures*, „J. Engrg. Math.” 4, 331–340.
4. Maxwell J.C. (1864), *On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames*, „Philosophical Magazine” 27, 294–299.
5. Rychter Z., Musiuk A. (2007), *Topological sensitivity to diagonal member flips of two-layered statically determinate trusses under worst loading*, „International Journal of Solids and Structures” 44, 4942–4957.

Pracę wykonano w ramach projektu badawczego S/WA/1/11 Politechniki Białostockiej.