

ODPOWIEDŹ DYNAMICZNA DROGI SZYNOWEJ JAKO STRUKTURY DWUWARSTWOWEJ W KIERUNKU WZDŁUŻNYM¹

Włodzimierz Czyczuła

Prof. dr hab. inż., Katedra Dróg, Kolei i Inżynierii Ruchu, Politechnika Krakowska, ul. Warszawska 24, 31-55 Kraków, email: czyczula@pk.edu.pl

Piotr Kozioł

dr hab., prof. PK, Katedra Dróg, Kolei i Inżynierii Ruchu, Politechnika Krakowska, ul. Warszawska 24, 31-55 Kraków, email: pkoziol@pk.edu.pl

***Streszczenie.** Praca przedstawia analizę liniowych modeli odpowiedzi toru przy obciążeniach wzdłużnych, wynikających z rozpędzania/hamowania pociągu. Przedstawiono zarówno strukturę jednowarstwową (szyny), jak i dwuwarstwową, gdzie wyodrębniono także warstwę podkładów. Analizę przeprowadzono przy założeniu, że – w krótkich przedziałach czasu – prędkość pociągu nie zmienia się istotnie; dlatego rozważana jest stacjonarna odpowiedź drogi szynowej. Elementem nowości w stosunku do poprzednich prac autorów jest wprowadzenie do modelu dynamicznego drugiej warstwy drogi szynowej, tzn. podkładów.*

***Słowa kluczowe:** droga szynowa, hamowanie/rozpędzanie pociągu, modele analityczne toru, przemieszczenia wzdłużne szyn i podkładów*

1. Wprowadzenie

Analiza odpowiedzi dynamicznej drogi szynowej dotyczy głównie płaszczyzny pionowej (por. np. [1,2,4]). Analiza w płaszczyźnie poziomej (w kierunku poprzecznym i wzdłużnym) dotyczy relatywnie niewielu prac, zarówno teoretycznych, jak i doświadczalnych (por. np. [5–8]). Prace na temat oddziaływań wzdłużnych, a ściślej hamowania i rozpędzania pociągu, dotyczą głównie dynamiki pojazdów i symulowanych przejazdów teoretycznych pociągów (por. np. [9]).

Niniejsza publikacja jest rozwinięciem prac [5,5a,5b]. Rozwinięcie to polega na uwzględnieniu dwóch warstw drogi szynowej w kierunku wzdłużnym, tzn. szyn i podkładów.

W pracy rozważany jest model drogi szynowej w kierunku wzdłużnym przy obciążeniach wynikających z hamowania/rozpędzania pociągu. Zakłada się, że w małym przedziale czasowym podczas hamowania/rozpędzania pociągu prędkość nie zmienia się istotnie – dlatego rozważana jest stacjonarna odpowiedź drogi szynowej, zarówno w przypadku rozpędzania, jak i hamowania pociągu. Siły wzdłużne wyznaczane są przez pomnożenie sił pionowych przez założony

¹ Wkład autorów w publikację: Czyczuła W. 65%, Kozioł P. 35%

współczynnik, zwany także współczynnikiem intensywności hamowania/rozpędzania.

2. Model drogi szynowej i obciążenia

Droga szynowa modelowana jest jako zastępcza belka, spoczywająca na sprężysto-lepkim podłożu. Belka składa się z dwóch szyn, opisanych dwoma parametrami: sztywność wzdłużna EA (gdzie E – moduł Younga stali szynowej [N/m^2], A – pole powierzchni przekroju poprzecznego dwóch szyn [m^2]) oraz masę jednostkową m_r [kg/m], która dotyczy zarówno masy jednostkowej dwóch szyn, jak również, ewentualnie, masy podkładów, przypadającej na jednostkę długości toru.

Podłoże szynowe opisane jest dwoma parametrami: jednostkową sztywnością k [N/m^2] oraz jednostkowym współczynnikiem tłumienia c [Ns/m^2]. Parametry te charakteryzują wzdłużne właściwości przytwierdzeń szyn do podkładów oraz opory wzdłużne przy ruchu podkładów w podsypce.

W przypadku struktury dwuwarstwowej parametry belki pozostają bez zmian, natomiast wydzielona warstwa podkładów ma masę jednostkową m_s [kg/m], określoną na podstawie masy podkładów M_s [kg] oraz rozstawu podkładów l_s [m]. W modelu dwuwarstwowym parametry przytwierdzenia i podsypki w kierunku wzdłużnym są wyznaczane na podstawie danych doświadczalnych. Mając daną sztywność wzdłużną i tłumienie przytwierdzenia określa się parametry jednostkowe, przypadające na jednostkę długości: k_r [N/m^2] oraz c_r [Ns/m^2]. Sztywność wzdłużną i tłumienie, związane z ruchem podkładów w podsypce wyznacza się również doświadczalnie. W odniesieniu do sztywności i tłumienia jednostkowego określają to parametry: k_s [N/m^2] oraz c_s [Ns/m^2]. Parametry drogi szynowej są stałe wzdłuż toru.

Jak już wspomniano, obciążenie wzdłużne będzie rozważane jako siły rozpędzania i hamowania pociągu w małych przedziałach czasu, w którym nie zmienia się istotnie prędkość pociągu. W pracy będzie rozważany następujący model obciążenia:

- 1) Siły wzdłużne na styku kół z szynami są równomiernie rozłożone na całej długości pociągu. Założenie to, w rozwiązaniu statycznym, było zweryfikowane w pracy [5]. Wykazano, że równomierne obciążenie w stosunku do – statycznie równoważnego – obciążenia dyskretnego poszczególnych osi nie wprowadza istotnych błędów. Dotyczy to zwłaszcza strefy maksymalnych wartości przemieszczeń wzdłużnych.
- 2) Obciążenie wzdłużne θ [N/m] zależy od obciążenia pionowego q [N/m], a zależność tę opisuje formuła:

$$\theta = \mu \cdot q \quad (1)$$

gdzie: μ – bezwymiarowy współczynnik (mniejszy od współczynnika tarcia ślizgowego).

3. Droga szynowa bez tłumienia – struktura jednowarstwowa

Równanie ruchu toru bez tłumienia, przy stałej sztywności podłoża szynowego k i obciążeniu θ , równomiernie rozłożonym na całej długości pociągu $2l$, ma postać (por. [5]):

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - m_r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - ku = -\theta(x, t); \quad \text{pod pociągiem} \quad (2a)$$

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - m_r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - ku = 0; \quad \text{poza pociągiem} \quad (2b)$$

gdzie:

$u(x, t)$ – przemieszczenie wzdłużne zastępczej belki (szyn), inne oznaczenia – jak w rozdziale poprzednim.

W ruchomym układzie współrzędnych ($\eta = u$, $\zeta = x - vt$), którego środek znajduje się w środkowym punkcie pociągu, gdzie v – prędkość pociągu, jeśli obciążenie nie zmienia się w czasie, równania (2) można zapisać w postaci równań zwyczajnych:

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} - \beta^2 u = -\frac{\theta}{EA - m_r v^2}; \quad \text{dla } |\xi| \leq l_t \quad (3a)$$

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} - \beta^2 u = 0; \quad \text{dla } |\xi| > l_t \quad (3b)$$

gdzie:

$$\beta = \sqrt{\frac{k}{EA - m_r v^2}}. \quad (4)$$

Łatwo zauważyć, że równania (3a-b) mają sens, gdy prędkość pociągu v jest mniejsza od wartości krytycznej v_{cr} , tzn.:

$$v < v_{cr} = \sqrt{\frac{EA}{m_r}}. \quad (5)$$

Rozwiązanie ogólne równania (3a), uwzględniając całą szczególną, można napisać w postaci:

$$u(\xi) = C_1 \cdot ch(\beta\xi) + C_2 \cdot sh(\beta\xi) + \frac{\theta}{k}; \quad \text{dla } |\xi| \leq l_t \quad (6a)$$

natomiast całka ogólna równania (3b) przyjmie postać:

$$u(\xi) = D_1 \cdot e^{-\beta(\xi - l_t)} + D_2 \cdot e^{\beta(\xi - l_t)}; \quad \text{dla } |\xi| > l_t \quad (6b)$$

gdzie: C_1, C_2, D_1, D_2 – stałe.

Symetryczne rozwiązanie względem punktu $\zeta = 0$, biorąc pod uwagę dodatnie wartości ζ , można uzyskać przyjmując następujące warunki brzegowe i warunki ciągłości funkcji i jej pochodnych na końcu pociągu:

$$\begin{aligned} gdy^{\xi} &\rightarrow 0^+; \frac{du}{d\xi} \rightarrow 0; \\ gdy^{\xi} &\rightarrow \infty; u \rightarrow 0; \\ u(\xi = l_t^+) &= u(\xi = l_t^-); \\ \frac{du}{d\xi}(\xi = l_t^+) &= \frac{du}{d\xi}(\xi = l_t^-) \end{aligned} \quad (7)$$

Dla tych warunków granicznych stacjonarne rozwiązanie problemu, dla dodatnich wartości ζ , przyjmie postać:

$$u(\xi) = \frac{\theta}{k} \cdot \left(1 - \frac{ch(\beta\xi)}{ch(\beta l_t) + sh(\beta l_t)} \right); gdy^{\xi} \leq l_t \quad (8a)$$

$$u(\xi) = \frac{\theta}{k} \cdot \left(\frac{sh(\beta l_t)}{ch(\beta l_t) + sh(\beta l_t)} \right) \cdot e^{-\beta(\xi - l_t)}; gdy^{\xi} > l_t \quad (8b)$$

i rozwiązanie jest symetryczne względem punktu $\zeta = 0$.

Podsumowując rozważania na temat odpowiedzi toru pod jednorodnym obciążeniem jednostkowym przy braku tłumienia, można sformułować następujące spostrzeżenia:

- 1) Krytyczna prędkość dla toru obciążanego w kierunku wzdłużnym nie zależy od sztywności podłoża szyny. Dla typowych parametrów konstrukcji nawierzchni prędkość krytyczna jest na poziomie 4000-7000 km/h (wzór (5)). Oznacza to, że prędkość krytyczna nawierzchni w kierunku wzdłużnym jest znacząco wyższa niż w przypadku obciążeń pionowych i poprzecznych do osi toru. (prędkość krytyczna na poziomie 1000-1500 km/h, por. np. [1,4]). Obliczenia pokazują, że dla typowych parametrów toru, przy prędkości do około 500 km/h, współczynnik dynamiczny, związany ze wzrostem przemieszczeń wzdłużnych można zaniedbać i traktować odpowiedź toru jak przy obciążeniu statycznym. Dotyczy to obciążenia równomiernie rozłożonego wzdłuż pociągu i niezmiennego podczas ruchu pociągu.
- 2) Stacjonarną odpowiedź toru; opisaną równaniami (8a-b) należy traktować jako ścisłe rozwiązanie problemu. Rozwiązanie to, w przypadku obciążenia statycznego, zostało zweryfikowane numerycznie [5]. Biorąc pod uwagę spostrzeżenia, sformułowane powyżej, można stwierdzić, że rozwiązanie to dobrze opisuje przypadki występujące obecnie w kolejnictwie (prędkości

poniżej 300-350 km/h). Na podstawie analiz numerycznych wykazano również dobrą zgodność rozwiązania ze statycznie równoważnym obciążeniem od układu sił skupionych [5], zwłaszcza w strefie maksymalnych przemieszczeń wzdłużnych toru.

4. Nawierzchnia jako struktura dwuwarstwowa z tłumieniem przy obciążeniu stałym

Równanie ruchu struktury dwuwarstwowej, gdy rozważamy tłumienie przytwierdzeń i podłoża podkładów, a obciążenie jednostkowe jest opisane dowolną funkcją $\theta(x,t)$, ma postać:

$$-EA \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} + m_r \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + c_r \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} - \frac{\partial u_s}{\partial t} \right) + k_r (u_r - u_s) = \theta(x, t) \quad (9a)$$

$$m_s \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} + c_s \frac{\partial u_s}{\partial t} + k_s u_s = c_r \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} - \frac{\partial u_s}{\partial t} \right) + k_r (u_r - u_s) \quad (9b)$$

gdzie:

u_r – przemieszczenie wzdłużne szyny, a u_s – przemieszczenie wzdłużne podkładów, pozostałe oznaczenia – jak w rozdziale 2.

W ruchomym układzie współrzędnych ($\eta_r = u_r$, $\eta_s = u_s$, $\zeta = x - vt$), w przypadku stałego, niezmiennego w czasie obciążenia, równania (9a-b) można zapisać w postaci następujących równań zwyczajnych:

$$(m_r v^2 - EA) \frac{d^2 u_r}{d\xi^2} - c_r v \left(\frac{du_r}{d\xi} - \frac{du_s}{d\xi} \right) + k_r (u_r - u_s) = \theta(\xi) \quad (10a)$$

$$m_s v^2 \frac{d^2 u_s}{d\xi^2} - c_s v \frac{du_s}{d\xi} + k_s u_s = -c_r v \left(\frac{du_r}{d\xi} - \frac{du_s}{d\xi} \right) + k_r (u_r - u_s) \quad (10b)$$

Obliczenia pokazały, że rozwiązanie układów (8), (10) dla typowych konstrukcji nawierzchni i obciążenia, jest praktycznie zerowe dla punktów odległych od końców pociągu o więcej niż 200-250 m. Dlatego przyjmiemy, że zarówno rozwiązanie układu równań (10a-b), tzn. funkcja przemieszczeń wzdłużnych, jak i obciążenie można zapisać w postaci nieskończonego szeregu Fouriera, ale w skończonym przedziale $\{0, \lambda\}$:

$$\begin{aligned}
\theta(\xi) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cdot \cos \Omega_i \xi + b_i \cdot \sin \Omega_i \xi); \\
u_r(\xi) &= \frac{u_{r0}}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \cdot \cos \Omega_i \xi + B_i \cdot \sin \Omega_i \xi); \\
u_s(\xi) &= \frac{u_{s0}}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (C_i \cdot \cos \Omega_i \xi + D_i \cdot \sin \Omega_i \xi); \\
\xi &\in [0, \lambda]; \Omega_i = \frac{2\pi \cdot i}{\lambda}
\end{aligned} \tag{11}$$

Po zróżniczkowaniu funkcji (11), podstawieniu otrzymanych wyrażeń do równania (10) oraz po uporządkowaniu, uzyskamy następujący układ równań algebraicznych na nieznanne wartości A_i, B_i, C_i, D_i (dla dowolnej liczby naturalnej „ i ”) oraz u_{r0} i u_{s0} :

$$\begin{aligned}
A_i[-(m_r v^2 - EA) \cdot \Omega_i^2 + k_r] + B_i[-c v \Omega_i] + C_i(-k_r) + D_i(c_r v \Omega_i) &= a_i \\
A_i[c v \Omega_i] + B_i[-(m_r v^2 - EA) \cdot \Omega_i^2 + k_r] + C_i(-c_r v \Omega_i) + D_i(k_r) &= b_i \\
A_i(-k_r) + B_i(c_r v \Omega_i) + C_i[-m_s v^2 \Omega_i^2 + (k_r + k_s)] + D_i[-v \Omega_i (c_r + c_s)] &= 0 \\
A_i(-c_r v \Omega_i) + B_i(-k_r) + C_i[v \Omega_i (c_r + c_s)] + D_i[-m_s v^2 \Omega_i^2 + (k_r + k_s)] &= 0 \\
u_{r0} &= \frac{a_0 (k_r + k_s)}{k_r k_s} \\
u_{s0} &= \frac{a_0}{k_s}
\end{aligned} \tag{12}$$

Liczbę a_0 , jak również współczynniki a_i oraz b_i - dla prostokątnego rozkładu obciążenia wzdłużnego na długości całego pociągu – można wyznaczyć ze wzorów analitycznych z dowolnie wysoką dokładnością i dla skończonej liczby współczynników Fouriera.

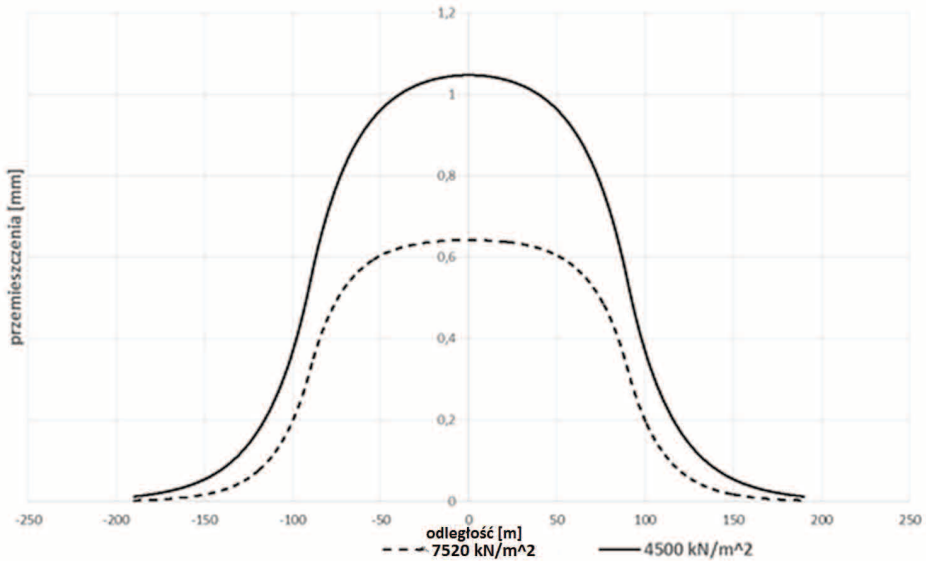
5. Przykłady obliczeń

Obliczenia przeprowadzono dla następujących parametrów drogi szynowej i obciążenia (na podstawie [3,5] oraz innych prac własnych Politechniki Krakowskiej):

- 1) Droga szynowa: szyny 60E1, $E=2,1 \cdot 10^{11}$ N/m², $A=2 \cdot 7687 \cdot 10^{-6}$ m², $m=2 \cdot 60$ kg/m (szyny) + 320 kg/0,6 m (podkłady typu PS-94) = 653,3 kg/m (także same szyny, $m=120$ kg/m), sztywność wzdłużna podłoża szynowe go $k=2500 - 7520$ kN/m², jednostkowy współczynnik tłumienia podłoża $c=3511$ Ns/m²;

- 2) Obciążenie: pociąg EMU-250 (Pendolino), o rozstawie skrajnych osi $2l_i = 185$ m, 28 osi $\cdot 160$ kN/os, jednostkowe obciążenie pionowe $q = 24,22$ kN/m, jednostkowe stałe obciążenie wzdłużne $\theta = \mu q$, $\mu = 0,2$; $\theta = 4,84$ kN/m;
- 3) Inne parametry: prędkość pociągu v – do 850 km/h; liczba współczynników Fouriera n – do 1000.

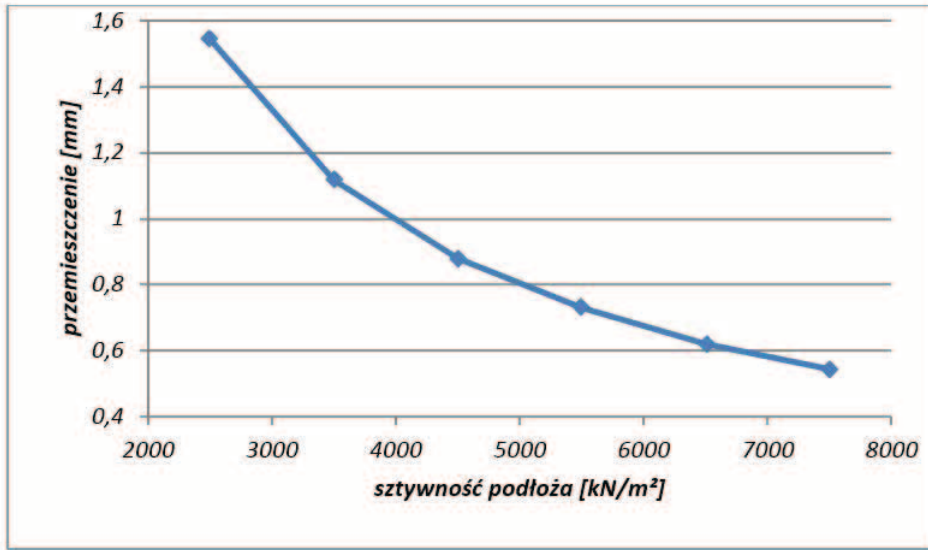
Na rysunku 1. pokazano linie przemieszczeń wzdłużnych toru (szyn) przy hamowaniu pociągu Pendolino w przypadku hipotezy stałej sztywności podłoża ($k_o = 4500$ kN/m²) oraz zmiennej sztywności – poza pociągiem 4500 kN/m², a pod pociągiem $k_p = 7520$ kN/m² (wartość tę przyjęto na podstawie nielicznych badań doświadczalnych, które potwierdzają tę hipotezę – na podstawie [5]).



Rys. 1. Rozkład przemieszczeń wzdłużnych szyn przy hamowaniu pociągu EMU-250 (Pendolino) przy przyjęciu dwóch hipotez wpływu obciążenia pionowego na sztywność wzdłużną podłoża szynowego

W przypadku zmiennej sztywności podłoża przemieszczenia wzdłużne są znacząco mniejsze – w analizowanym przykładzie o około 40%.

Na rysunku 2 pokazano wpływ sztywności podłoża na maksymalne przemieszczenie wzdłużne szyn. Wartości $k = 4500$ kN/m² odpowiada dobrze utrzymany tor, wartości 7500 kN/m² – bardzo dobrze utrzymany tor, natomiast wartości 3500 kN/m² i poniżej, średnio i źle utrzymany tor. Jak widać wpływ sztywności wzdłużnej na maksymalne przemieszczenia jest znaczący.



Rys. 2. Wpływ sztywności wzdłużnej podłoża szynowego na maksymalne przemieszczenia pod pociągiem EMU-250 (Pendolino) przy prędkości 250 km/h

Z punktu widzenia odporności nawierzchni na oddziaływania wzdłużne istotne jest nieprzekroczenie wartości granicznej oporu sprężystego w przytwierdzeniu szyn do podkładów. Z analizy modelu dwuwarstwowego można wyznaczyć przemieszczenia wzdłużne szyn i podkładów. Strefa najbardziej narażona znajduje się tuż przed pociągiem. W tej strefie należy wyznaczyć przemieszczenia wzdłużne szyny u_r oraz podkładu u_s przy hamowaniu ciężkiego pociągu, a następnie porównać różnicę z graniczną wartością sprężystej odpowiedzi danego typu przytwierdzenia u_{lim} . Jeśli zachodzi warunek:

$$u_r - u_s < u_{lim}$$

to można przyjąć, że nawierzchnia jest odporna na oddziaływania wzdłużne.

6. Podsumowanie i wnioski

W pracy przedstawiono zagadnienie odpowiedzi drogi szynowej przy obciążeniach wzdłużnych. Obciążenie wzdłużne przyjęto jako stałe, niezmiennie w czasie i równomiernie rozłożone na całej długości pociągu. Z przeprowadzonej analizy wynikają następujące wnioski:

1. Prędkość krytyczna przy obciążeniach wzdłużnych jest wielokrotnie wyższa od prędkości krytycznej w przypadku obciążeń pionowych i poprzecznych. Prędkość krytyczna zależy jedynie od sztywności wzdłużnej szyn i masy, uczestniczącej w drganiach wzdłużnych toru.
2. W zastosowaniach inżynierskich, przy analizie odpowiedzi struktury dwuwarstwowej można określić odporność nawierzchni na oddziaływania

wzdłużne poprzez określenie granicznych przemieszczeń szyny względem podkładów.

3. Dalsze prace w tym zakresie będą ukierunkowane na badania efektu obciążeń zmiennych w czasie, analizie zmiennego rozkładu obciążenia wzdłuż pociągu oraz zmianie prędkości w trakcie rozpędzania/hamowania pociągu, czyli analiza stanów niestacjonarnych.

Bibliografia

- [1] Bogacz R., Czyczuła W., Response of beam on visco-elastic foundation to moving distributed load. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2008, 46, 4, pp. 63-775.
- [2] Bryja D., Popiołek A., Analiza drgań pojazdów kolejowych w trakcie ich przejazdu przez nierówność progową toru. *Przegląd Komunikacyjny*, 2015, nr 9, s. 68-72.
- [3] Czyczuła W., Bogacz R. i wsp., Nawierzchnia kolejowa o podwyższonym standardzie i zmniejszonym oddziaływaniu na środowisko. Raport Politechniki Krakowskiej, 2013.
- [4] Czyczuła W., Koziol P., Kudła D., Lisowski S., Analytical evaluation of track response in vertical direction due to moving load. *Journal of Vibration and Control*, 2017.
- [5] Czyczuła W., Tor bezстыkowy. Książka akademicka, wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2002.
- [5a] Czyczuła W., Chudyba Ł., Odpowiedź dynamiczna drogi szynowej w kierunku wzdłużnym. *Przegląd Komunikacyjny*, 2018, nr 7.
- [5b] Czyczuła W., Chudyba Ł., Effect of track imperfections on longitudinal track response. *Materiały Konferencji Krynica 2018*.
- [6] Grassie S.L., The dynamic response of railway track to high frequency lateral excitation. *Journal of Mechanical Engineering Sciences*, 1982, 24,2, pp. 91-96.
- [7] Hunt G.A., Dynamic analysis of railway vehicle/track interaction forces. Doctoral thesis, Loughborough University, 1986.
- [8] Kostovasilis D., Thompson D., The effect of vertical-lateral coupling vibration of rails including initial curvature. *Proc. of 22th Int. Congress of Sound and Vibrations*, 2015, pp. 1-8.
- [9] Piechowiak T., Analiza symulacyjna wpływu wybranych parametrów hamulca pneumatycznego na skuteczność jego działania. *Pojazdy Szynowe*, 2008, nr 1, s. 14-25.

