

PROGNOZOWANIE W LOGISTYCE NA PRZYKŁADZIE PROGNOZY METODĄ ŚREDNICH RUCHOMYCH

mgr Agnieszka DUDA
Akademia Sztuki Wojennej

Streszczenie

Prognozowanie w logistyce przedsiębiorstwa jest niezwykle istotnym elementem procesów decyzyjnych, dlatego też ważny jest adekwatny dobór metod prognozowania do badanych zjawisk i procesów logistycznych. Tematem artykułu jest prognozowanie w logistyce na przykładzie prognozy metodą średnich ruchomych. Celem artykułu jest usystematyzowanie pojęć i rodzaju metod prognozowania, a ponadto przedstawienie algorytmu obliczenia prognozy metodą średnich ruchomych na podstawie rzeczywistych danych empirycznych produkcji samochodów osobowych w Polsce w 2016 roku. Prowadzenie badań wszelkiego rodzaju metod prognozowania jest niezwykle przydatnym uzupełnieniem istniejących luk w teorii i praktyce procesów logistycznych przedsiębiorstw.

Słowa kluczowe: prognozowanie, prognozowanie w logistyce, metoda średnich ruchomych, szeregi czasowe.

Wstęp

Prognozowanie w logistyce, a szczególnie prognozowanie w logistyce przedsiębiorstwa, jest niezwykle istotnym elementem procesów decyzyjnych. Istnieje wiele metod prognozowania takich zjawisk, jak: popyt na wyroby gotowe, wielkość sprzedaży i produkcji wyrobów, wielkość zapotrzebowania surowców i materiałów do produkcji czy też wielkość zapasów. Rozpatrywanych zjawisk logistycznych, w których może być wykorzystywane prognozowanie, jest wiele, a zależą one od charakteru i rodzaju prowadzonej działalności przedsiębiorstwa (produkcyjnej, handlowej, usługowej). Dlatego ważny jest dobór adekwatnej metody prognozowania do badanych zjawisk i procesów logistycznych. Literatura przedmiotu badań w tym zakresie nie w pełni zaspokaja potrzeby logistyków w aspekcie odpowiedniego doboru metod prognozowania do posiadanych przez nich danych empirycznych. Dlatego celem badawczym tego artykułu jest usystematyzowanie pojęć i rodzaju metod prognozowania, które mogą być wykorzystane w logistyce przedsiębiorstwa głównie na bazie posiadanych danych empirycznych zaistniałych zdarzeń i procesów logistycznych.

Ponadto usystematyzowanie procesu prognozowania za pomocą odpowiedniego algorytmu, dzięki któremu można uzyskać prognozę odpowiednio wiarygodną (istotną statystycznie) w stopniu umożliwiającym jej praktyczne wykorzystanie. Celem szczegółowym, na którym się skupiono podczas krytycznej analizy literatury przedmiotu badań, była metoda prognozowania z wykorzystaniem średnich ruchomych. Powyższe cele implikują sformułowanie następującego problemu badawczego: Jaki jest stan wiedzy w obszarze prognozowania w logistyce, a w szczególności w prognozowaniu z wykorzystaniem metody średnich ruchomych na podstawie utworzonych szeregów czasowych?

W celu przedstawienia praktycznego zastosowania metody średnich ruchomych w prognozowaniu logistycznym wykorzystano rzeczywiste dane empiryczne wielkości produkcji samochodów osobowych w Polsce w poszczególnych miesiącach 2016 roku.

Prognozowanie w logistyce przedsiębiorstwa

Termin „prognozowanie”, a dokładniej „prognoza” możemy odnaleźć w greckim źródłosłowie jako *prognosis*, co oznacza prognozowanie określonych zjawisk. Wy różniamy dwa człony: *pro*, który wskazuje na wstępną, przygotowawczą fazę, oraz *gnosis*, oznaczający wiedzę o czymś, co jeszcze nie nastąpiło.

Z. Pawłowski stwierdza, że *prognoza to konkretny wynik wnioskowania w przyszłość na podstawie znajomości modelu ekonometrycznego, opisującego pewien wycinek sfer zjawisk ekonomicznych*¹. Natomiast Z. Hellwig twierdzi, że *prognoza ekonometryczna to sąd, którego prawdziwość jest zdarzeniem losowym, przy czym prawdopodobieństwo zdarzenia jest nie mniejsze od ustalonej z góry, bliskiej jedności liczby zwanej wiarygodnością prognozy*².

Definicji prognozy jest wiele, wynikają one z różnorodnych czynników, sytuacji prognostycznych, metod badań czy ich celów. Na potrzeby dalszych rozważań przyjmuje się proste uogólnienie, że prognoza to sąd odnoszący się do przyszłości.

System wspierania kierownictwa firmy nie może obejść się bez prognozowania. Związane jest to z nieustannym podejmowaniem wielu trudnych decyzji, które dotyczą działalności przedsiębiorstwa. Podczas zarządzania firmą powstają trudności, którym zawsze towarzyszy niepewność związana z podejmowanymi decyzjami. Stan przedsiębiorstwa i jego otoczenia determinuje podejmowanie decyzji, a ich trafność

1 Z. Pawłowski, *Zasady predykcji ekonometrycznej*, PWN, Warszawa 1982, s. 15.

2 Z. Hellwig, *Schemat budowy prognozy statystycznej metodą wag harmoniczných*, „Przegląd Statystyczny” t. 14, nr 2 (1967), Polska Akademia Nauk, Komitet Statystyki i Ekonometrii, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1967, s. 258.

musi się opierać na solidnych informacjach. Przewidywanie wydarzeń pozwala zoptimalizować i zaplanować działalność firmy³.

Błędne prognozowanie może się przyczynić do wystąpienia znaczących strat. Niedoszacowanie popytu na produkty czy usługi może wiązać się z utratą klientów lub ich zaufania, a także utratą potencjalnych zysków. Natomiast przeszacowanie popytu może się wiązać ze zwiększeniem kosztów działalności przedsiębiorstwa, najczęściej poprzez nadmierne zwiększenie zapasów magazynowych.

W przedsiębiorstwie podstawowymi obszarami, w których można wykorzystywać prognozowanie, są: popyt na produkty, sprzedaż produktów – produkcja sprzedana, zmiany stanów magazynowych, zapotrzebowanie na surowce⁴. Podstawą prognozowania są dane, które można poddać analizie na dwa sposoby. Po pierwsze, jako postawę aktywną, czyli uwzględniającą informacje o przyczynach wyników w danym okresie. Odzwierciedla się ona w tym, że np. zwiększenie sprzedaży może być wynikiem popytu sezonowego, a wysoki stan zapasów był spowodowany błędnym zamówieniem. Co za tym idzie posiadanie takich informacji powinno skorygować wnioski o przyszłych zdarzeniach. Po drugie, przyjmując postawę pasywną – w oderwaniu od uzasadnień merytorycznych. Zakłada się tutaj, że zdarzenia wystąpią również w przyszłości. Drugie podejście pozwala na konstruowanie uniwersalnych modeli prognostycznych, odwołując się do metod matematycznych. W tym momencie należy uważnie i bardzo starannie zweryfikować, czy istnieje model adekwatny do analizowanego zjawiska.

W praktyce, z formalnego punktu widzenia, dla badanego zjawiska nie ma idealnego modelu, który pozwoliłby wyznaczyć prognozę z pełną gwarancją jej spełnienia. Dlatego w procesie prognozowania niezmiernie ważna jest analiza błędów prognozy, która musi być integralną częścią wniosku⁵.

Metody prognozowania to specjalnie określone metody postępowania, wykorzystywane do rozwiązywania zadań prognostycznych. Sposobom przetwarzania danych towarzyszą różne reguły wyznaczania prognozy. Zatem metoda prognozowania składa się z dwóch elementów: modelu i reguły prognozowania⁶.

Najczęściej stosowaną klasyfikacją prognoz jest podział ze względu na typ zmiennej (mierzalna i niemierzalna). W tym przypadku wyróżnia się metody ilościowe i jakościowe. Metody ilościowe dotyczą zmiennych mierzalnych wyrażonych wartościami liczbowymi. Prognoza taka może być punktowa, co oznacza że zjawisko prognozowane przedstawiane jest w postaci jednej liczby. Prognoza ilościowa może być również przedziałowa, co oznacza że prognozowane zjawisko prezento-

3 A. Maciąg, R. Pietroń, S. Kukła, *Prognozowanie i symulacja w przedsiębiorstwie*, PWE, Warszawa 2013, s. 15.

4 A. Duda, *Modelowanie i prognozowanie ekonometryczne w logistyce przedsiębiorstwa*, „Systemy Logistyczne Wojsk. Zeszyty Naukowe Instytutu Logistyki Wydziału Logistyki Wojskowej Akademii Technicznej” 2016, nr 44, s. 20.

5 S. Krawczyk, *Metody ilościowe w planowaniu (działalności przedsiębiorstwa)*, Wydawnictwo C.H. Beck, Warszawa 2001, s. 245.

6 M. Sobczyk, *Prognozowanie. Teoria. Przykłady. Zadania*, Placet, Warszawa 2008, s. 9.

wane jest w postaci przedziału liczbowego. Natomiast prognoza jakościowa dotyczy zmiennej niemierzalnej formułowanej za pomocą opisu.

Inny, również popularny podział jest oparty na kryterium okresu prognozy. W tym przypadku wyróżnia się prognozy krótko-, średnio- i długookresowe. Cechą charakterystyczną prognoz krótkookresowych jest niewielki zasięg ekstrapolacji w porównaniu do liczby posiadanych danych, ponadto jest to prognoza jedynie na kilka odcinków czasowych do przodu lub dla konkretnego momentu, dla którego mogą zachodzić zmiany ilościowe badanego zjawiska. Prognoza średniookresowa wyróżnia się niewielkim zasięgiem ekstrapolacji dla średniej liczby danych. Umożliwia prognozy na średnią liczbę odcinków czasowych oraz prognozy momentu, do którego mogą zachodzić zmiany ilościowe oraz niewielkie (mało istotne) zmiany jakościowe badanego zjawiska. Natomiast prognoza długookresowa ma największy zasięg, jest to prognoza na dużą liczbę jednostek czasowych, a do momentu prognozowanego mogą zachodzić zarówno zmiany ilościowe, jak i istotne zmiany jakościowe badanego zjawiska⁷.

Klasyfikacji prognoz jest wiele, a zależą one od przyjętego kryterium (rysunek 1). Przedstawiony podział nie wyczerpuje wszystkich możliwych kryteriów klasyfikacji prognoz. Wskazuje jedynie na te, które są najczęściej stosowane.



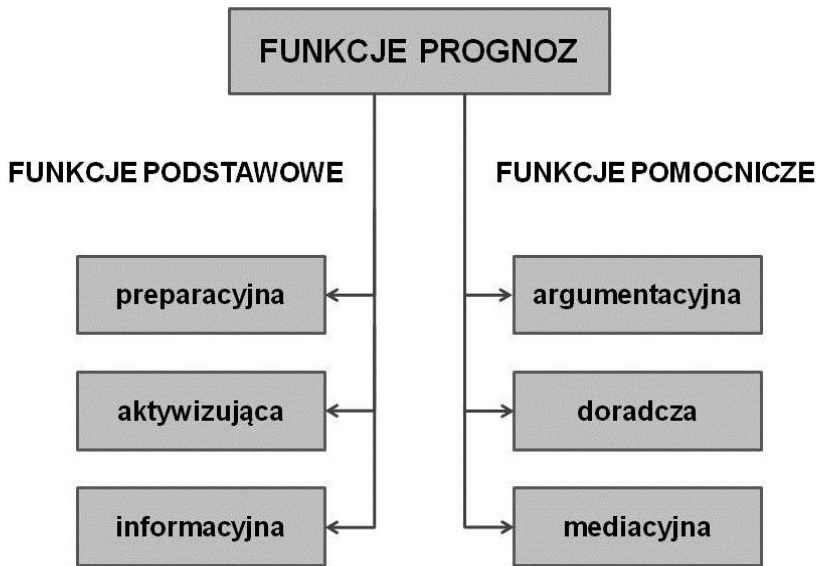
Rys. 1. Rodzaje prognozy w zależności od przyjętego kryterium

7 J. Bendkowski, M. Kramarz, W. Kramarz, *Metody i techniki ilościowe w logistyce. Wybrane zagadnienia*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2010, s. 16.

W procesie prognozowania bardzo istotną rolę odgrywają właściwe dane statystyczne. Są one podstawą do wyboru klasy modelu prognostycznego, który wyjaśnia relacje pomiędzy różnymi aspektami badanego zjawiska, oszacowania jego parametrów strukturalnych oraz struktury stochastycznej⁸, weryfikacji prognoz⁹ itp. Dlatego wymagane jest, by dane liczbowe były odpowiedniej jakości, to znaczy posiadały określone właściwości, takie jak: jednorodność, rzetelność, wiarygodność, jednoznaczność, kompletność, porównywalność, aktualność dla przyszłości¹⁰.

Najważniejszym celem prognozowania jest wspomaganie logistycznych procesów decyzyjnych. W związku z tym wyróżnia się podstawowe i pomocnicze funkcje prognoz¹¹ (rysunek 2). Do podstawowych funkcji prognoz można zaliczyć funkcje¹²:

- preparacyjne,
- aktywizujące,
- informacyjne.



Źródło: opracowanie własne na podstawie: M. Sobczyk, *Prognozowanie. Teoria. Przykłady. Zadania, Placet*, Warszawa 2008, s. 15.

Rys. 2. Podstawowe i pomocnicze funkcje prognoz

⁸ Parametry struktury stochastycznej – parametry rozkładu składnika losowego ξ_i szacowane w oparciu o elementy rachunku prawdopodobieństwa.

⁹ A. Duda, dz. cyt., s. 22.

¹⁰ M. Sobczyk, *Prognozowanie...*, dz. cyt., s. 29.

¹¹ Tamże, s. 15.

¹² A. Duda, dz. cyt., s. 22.

Funkcja preparacyjna jest pewnego rodzaju działaniem przygotowującym do podejmowania działań przez decydenta¹³. Decydent, posiadając prognozę przygotowaną przez prognostę, będzie działał racjonalnie tylko wtedy, kiedy będzie miał do niej zaufanie. Przygotowanie dobrej jakościowo prognozy jest zadaniem prognosty. Ale to decydent musi potrafić umiejętnie ją wykorzystać, ponieważ skutki tej decyzji wpływają na przyszłą działalność przedsiębiorstwa.

Funkcja aktywizująca pobudza do podejmowania działań, które są sprzyjające realizacji prognozy zapowiadającej korzystne zdarzenia. Jednocześnie funkcja ta przeciwstawia się spełnieniu prognozy, jeśli przewidywane zdarzenia są negatywne.

Funkcja informacyjna polega na przyzwyczajaniu społeczeństwa do zmian, które nadchodzą, oraz zmniejszaniu lęku przed przyszłymi wydarzeniami. Przedstawienie takich prognoz może się spotkać ze spokojnymi reakcjami na zmiany, czy nawet z pełną ich akceptacją.

Opisane funkcje bardzo skutecznie wspomagają procesy decyzyjne w logistyce przedsiębiorstwa, jeżeli oparte są na dużym zaufaniu i akceptacji przewidywanych wyników prognoz. Sprzyjają także pobudzaniu decydentów do podejmowania odpowiednich działań w kierunku ich realizacji.

Oprócz wyżej wymienionych podstawowych funkcji prognoz można wyróżnić jeszcze pomocnicze funkcje¹⁴:

- argumentacyjną,
- doradczą,
- mediacyjną.

Funkcja argumentacyjna polega na dostarczaniu przez prognozę argumentów decydentom do podejmowania decyzji, natomiast funkcja doradcza odpowiada za przygotowanie odpowiednich informacji, które odnoszą się do zjawisk będących przedmiotem procesu decyzyjnego. Funkcja mediacyjna ukazuje pomocność prognozy przy określaniu np. cen transakcyjnych. Oczywiście prognozy mają wiele funkcji, dzięki temu są uniwersalne i mogą być wykorzystywane w działalności wielu podmiotów gospodarczych, instytucji i nie tylko. Są w związku z tym podzielone na etapy, fazy i reguły postępowania.

Proces prognozowania składa się z dwóch zasadniczych faz: diagnozowania przeszłości i określania przyszłości¹⁵. Celem diagnozowania przeszłości jest poznanie natury prognozowanego zjawiska, mechanizmów jego funkcjonowania, a także ocena kształtujących go czynników. Faza ta odpowiedzialna jest za gromadzenie danych dotyczących przeszłości, którą poddaje się przetworzeniu w celu budowy formalnego modelu (np. modelu ekonometrycznego) lub modelu myślowego.

¹³ Decydentem może być pojedynczy człowiek, grupa osób, podmiot gospodarczy czy instytucja. Decydent może być jednocześnie prognostą.

¹⁴ M. Witkowski, T. Klimanek, *Prognozowanie gospodarcze i symulacje w przykładach i zadaniach*, AE, Poznań 2006, s. 14.

¹⁵ M. Sobczyk, *Prognozowanie...*, dz. cyt., s. 20–21.

Określenie przyszłości to przejście od danych przetworzonych do prognozy. Takie przejście nazywamy regułą prognozowania.

W większości procesów prognostycznych (rysunek 3) wyróżnia się kilka uniwersalnych etapów¹⁶:

- określania problemu prognostycznego,
- wyboru zmiennych,
- uzyskania i wstępnej analizy danych,
- wyboru metody badań,
- wyznaczenia prognozy oraz jej dopuszczalności,
- wykorzystania prognozy oraz jej weryfikacji.



Źródło: opracowanie własne na podstawie: A. Maciąg, R. Pietroń, S. Kukła, *Prognozowanie i symulacja w przedsiębiorstwie*, PWE, Warszawa 2013, s. 25–27.

Rys. 3. Etapy wyznaczania prognozy

Etap określenia problemu prognostycznego wymaga jasnego sprecyzowania celu badań. Chodzi tutaj o określenie zjawiska, którego dotyczy prognoza. Może to być wielkość popytu, wielkość sprzedaży, inflacja itp. Następnym jest **etap wyboru zmiennych**, który służy do określenia zmiennej (lub zmiennych) prognozowanej oraz zmiennych mających wpływ na prognozowane zjawisko. To dość skomplikowany problem, ponieważ zbyt dużo zmiennych nadmiernie komplikuje model, jed-

¹⁶ A. Maciąg, R. Pietroń, S. Kukła, *Prognozowanie i symulacja...*, dz. cyt., s. 25–27.

nak zbyt mała ich liczba może prowadzić do rozbieżności modelu z rzeczywistością. Po wyborze zmiennych należy określić powiązania między nimi¹⁷.

Etap uzyskania i wstępnej analizy zmiennych polega na zgromadzeniu niezbędnych danych (dla określonych zmiennych) oraz określeniu, jaki zakres danych jest dla prognozy interesujący. Uwzględnienie wszystkich posiadanych danych czasami może skutkować poważnym błędem, gdyż mogą one nie odnosić się do celu badań. Dane należy bardzo skrupulatnie przeanalizować, a także uporządkować, zwracając szczególną uwagę na to, czy danych nie brakuje (brakujące dane uzupełnia się danymi szacunkowymi) lub czy nie ma danych nietypowych¹⁸. Często występuje konieczność skumulowania danych (np. miesiące pogrupować w kwartały lub zmienić dane kwartalne na roczne) lub ich transformacji (np. przeliczenie wartości na osobę).

Etap wyboru metody zależy od wielu czynników. Najważniejszy jest charakter posiadanych danych (ilościowe, jakościowe). Następnym czynnikiem jest przyjęcie postawy aktywnej lub pasywnej. W postawie pasywnej zakłada się, że przyszłość jest następstwem przeszłości i wtedy najczęściej stosuje się analizę szeregów czasowych oraz modelowanie ekonometryczne ze stałymi w czasie parametrami. Natomiast postawa aktywna zakłada, że prognoza nie jest aż tak zależna od przeszłości, bowiem w przyszłości mogą pojawić się inne związki między zmiennymi niż istniały w przeszłości¹⁹. W tym przypadku najczęściej wybór prognozy pada na jedną z metod heurystycznych lub ekonometrycznych z parametrami zmiennymi w czasie.

Etap wyznaczenia prognozy oraz ocena jej dopuszczalności – prognoza po wyborze metody i uzyskaniu modelu wyznacza prognozę. Po jej wyznaczeniu należy określić jej dopuszczalność. Polega to, w miarę możliwości, na wyznaczeniu błędu prognozy *ex ante* lub w przypadku prognozowania jakościowego – wykorzystaniu opinii eksperta. Jeśli prognoza zostanie uznana za niedopuszczalną, należy zbadać przyczynę niepowodzenia i rozpocząć budowę nowej prognozy.

Etap wykorzystania prognozy oraz jej weryfikacji to moment, w którym prognoza dopuszczalna zostaje wykorzystana w praktyce. Etap ten to weryfikacja uzyskanej prognozy. Może do niej dojść jedynie w momencie, gdy dysponuje się danymi rzeczywistymi, które wcześniej były jedynie prognozowane. W prognozach ilościowych etap ten realizuje się wyznaczeniem błędu *ex post*, a prognozy jakościowe porównuje się ze stanem faktycznym²⁰. Weryfikacja jest bardzo istotnym etapem, gdyż pozwala na ocenę procesu prognozowania. Podaje informację, czy sposób prognozowania jest poprawny, czy też należy próbować go zmodyfikować. Każda prognoza i jej weryfikacja pozwala na uzyskanie większego doświadczenia prognozy.

17 A. Duda, dz. cyt., s. 23–24.

18 Tamże.

19 Tamże.

20 Tamże, s. 24–25.

Procesy prognostyczne, a dokładnie ich etapy wymagają stosowania odpowiednich zasad (reguł) prognozowania, do których należą: reguła podstawowa oraz reguła podstawowa z poprawką, a także reguły największej wiarygodności oraz minimalnej straty (tabela 1).

Tabela 1

Najczęściej stosowane reguły prognozowania

Rodzaj reguły	Charakterystyka
Reguła podstawowa	Prognozą jest stan zmiennej w przyszłości uzyskany z modelu, przy założeniu, że model będzie aktualny do chwili wyznaczenia prognozy. Jest to ekstrapolacja modelu poza zasięg danych, na podstawie których został wyznaczony.
Reguła podstawowa z poprawką	Prognozę uzyskaną za pomocą reguły podstawowej można skorygować, gdy występują uzasadnione przypuszczenia, że ostatnio zaobserwowane odchylenia zmiennej prognozowanej od wartości uzyskanych z modelu utrzymają się w przyszłości.
Reguła największej wiarygodności	Za prognozę przyjmuje się stan zmiennej, któremu odpowiada największe prawdopodobieństwo realizacji.
Reguła minimalnej straty	Za prognozę przyjmuje się stan zmiennej, której realizacja powoduje minimalne straty. Przyjmuje się, że wielkość tych strat jest funkcją błędu prognozy.

Źródło: opracowanie własne na podstawie: P. Dittmann, *Prognozowanie w przedsiębiorstwie. Metody i ich zastosowanie*, Oficyna Wolters Kluwer Business, Kraków 2008, s. 26–27.

Wyznaczanie prognoz według przyjętych faz, etapów i reguł prognozowania wiąże się z koniecznością określenia błędów prognozy. W przypadku prognoz jakościowych takie błędy określone są przez ekspertów z danej dziedziny. Natomiast w przypadku prognoz ilościowych niezbędne jest ich obliczenie. Wyróżnia się dwa rodzaje takich błędów prognozy: błąd *ex ante* i błąd *ex post*.

Błąd *ex ante* jest oszacowaniem błędu prognozy. Określa się go przed okresem, na który wyznaczona jest prognoza. Natomiast błąd *ex post* charakteryzuje się najczęściej miarą bezwzględną, czyli różnicą pomiędzy wartością zmiennej w okresie prognozowanym a jej prognozą. Błąd ten można wyznaczyć dopiero w okresie, po którym zaistniała wyznaczona prognoza.

Jedną z najczęściej wykorzystywanych metod prognozowania jest metoda średnich ruchomych na bazie utworzonych szeregów czasowych, w której największą trafność prognozowania uzyskuje się, wykorzystując obliczanie błędów średnich prognoz wygasłych (błędów średniokwadratowych).

Prognoza metodą średnich ruchomych

Prognoza metodą średnich ruchomych jest narzędziem wykorzystywanym do wyrównywania szeregów czasowych, a następnie prognozowania po dokonanej ekstrapolacji. Szereg czasowy jest wynikiem obserwacji zjawiska, które jest mierzalne

w kolejnych okresach (momentach)²¹. Szereg ten tworzą na przykład dane o liczbie wyprodukowanych przez przedsiębiorstwa motocykli w miesiącu na przestrzeni pewnego okresu, czy też liczba narodzin w danej gminie na przestrzeni kilku lat. Składnikami szeregu czasowego są:

- tendencja rozwojowa (trend);
- wahania okresowe (sezonowe), które charakteryzują się regularnymi odchyleniami od tendencji rozwojowej;
- wahania cykliczne (oscylacje obserwowane na przestrzeni lat), związane z cyklem koniunkturalnym;
- wahania przypadkowe.

Zjawisko, a dokładniej jego zmiany w czasie mogą mieć pewne prawidłowości, których zidentyfikowanie i opisanie jest przedmiotem analizy szeregu czasowego. Podstawowym celem analizy szeregu czasowego jest wykrycie i pomiar wymienionych składników oraz możliwość zbudowania formalnego modelu, który opisuje badane zjawisko.

Metody analizy szeregu czasowego polegają na wyodrębnieniu i opisie poszczególnych jego składników, często nazywane są metodami dekompozycji szeregu czasowego. Istnieje bardzo wiele metod analizy szeregów czasowych, różniących się stosowanymi narzędziami matematycznymi²². Najczęściej wykorzystywaną metodą jest analiza tendencji rozwojowej.

*Tendencją rozwojową (trendem) nazywamy powolne, regularne i systematyczne zmiany określonego zjawiska, obserwowane w dostatecznie długim przedziale czasowym i będące rezultatem działania przyczyn głównych*²³. Im dłuższy jest badany okres, tym tendencja rozwojowa jest pewniejsza, a wyciągane wnioski dokładniejsze. Ważne jest, by był to okres, w którym na badane zjawisko oddziałują te same główne czynniki. Dzięki długookresowości zmian można zastosować metody statystyczne wyodrębnienia tendencji rozwojowej (badania trendu) z szeregów czasowych wykorzystujących najczęściej dwie, podane poniżej metody²⁴:

- mechaniczną,
- analityczną.

Metoda mechaniczna wyrównywania szeregów czasowych (wyodrębnienia trendu) oparta jest na obliczeniu średnich ruchomych. Natomiast metoda analityczna wyodrębnia tendencję rozwojową szeregu czasowego poprzez dopasowanie określonej funkcji matematycznej z jedną zmienną²⁵.

Przy analizowaniu metod prognozowania konieczne jest sprecyzowanie i określenie podstawowych pojęć. Rozpoczynamy od określenia danych z przeszłości, które będą przedstawiane zgodnie z następstwem czasu, dlatego niezbędne jest wyróżnienie

21 J. Podgórski, *Statystyka dla studiów licencjackich*, PWE, Warszawa 2005, s. 337.

22 Tamże.

23 M. Sobczyk, *Statystyka*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1996, s. 293.

24 Tamże.

25 Tamże, s. 293, 297.

konkretnej jednostki czasu (np. dzień, miesiąc, kwartał, rok), która będzie nazywana okresem, natomiast dane tworzące ciąg będą nazywane szeregiem czasowym.

Pierwotny szereg czasowy tworzą dane: $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$, i na ich podstawie będzie obliczany wynik, czyli prognoza. Biorąc pod uwagę, że posiadane dane są dla okresu t od 1 do n , podczas prognozowania będzie interesował nas wynik dla okresu T obliczony od $n + 1$. Zatem horyzontem prognozy będziemy nazywać liczbę okresów, dla których wyznaczamy prognozę. Prognozę będziemy oznaczać symbolem y_T^P , z zaznaczeniem okresu, na który ją wyznaczamy²⁶.

Metoda średnich ruchomych polega na zastępowaniu danych empirycznych (dla przyjętego okresu wygładzania) średnimi poziomami, czyli średnimi arytmetycznymi prostymi obliczonymi z badanego okresu i kilku odpowiednich okresów sąsiednich. Należy zwrócić szczególną uwagę na fakt, że średnie ruchome mogą być obliczane zarówno dla parzystej, jak i nieparzystej liczby wyrazów szeregu empirycznego. Średnie obliczone z parzystej liczby wyrazów to średnie ruchome scentrowane, a obliczone z nieparzystej liczby wyrazów to średnie ruchome zwykłe²⁷. Wybór rodzaju obliczanych średnich ruchomych musi być w każdym przypadku zastosowania tej metody określany względami merytorycznymi.

Średnie ruchome zwykłe, na przykład trzyokresowe $k = 3$ dla $n \geq 3$, obliczamy w następujący sposób:

$$\bar{y}_{n-1} = \frac{y_{n-2} + y_{n-1} + y_n}{3} \quad [1]$$

gdzie:

\bar{y}_{n-1} – wartość średniej ruchomej,

y_n, y_{n-1}, y_{n-2} – poszczególne empiryczne wartości szeregu czasowego.

Wzory szczegółowe trzyokresowych średnich ruchomych $k = 4$, dla trzeciej $n = 3$ i szóstej $n = 6$ obserwacji empirycznej szeregu czasowego to odpowiednio:

$$\bar{y}_2 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \quad \text{dla } n = 3$$

$$\bar{y}_5 = \frac{y_4 + y_5 + y_6}{3} \quad \text{dla } n = 6$$

Natomiast średnie ruchome scentrowane na przykład czterookresowe $k = 4$ dla $n \geq 5$, obliczamy w następujący sposób:

$$\bar{y}_{n-2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot y_{n-4} + y_{n-3} + y_{n-2} + y_{n-1} + \frac{1}{2} \cdot y_n}{4} \quad [2]$$

²⁶ S. Krawczyk, *Metody ilościowe...*, dz. cyt., s. 245.

²⁷ M. Sobczyk, *Statystyka*, dz. cyt., s. 294.

gdzie:

\bar{y}_{n-2} – wartość średniej ruchomej,

$y_{n-4}, y_{n-3}, y_{n-2}, y_{n-1}, y_n$ – poszczególne empiryczne wartości szeregu czasowego.

Wzory szczegółowe czterookresowych średnich ruchomych $k = 4$, dla piątej $n = 5$ i dziesiątej $n = 10$ obserwacji empirycznej szeregu czasowego to odpowiednio:

$$\bar{y}_3 = \frac{\frac{1}{2} \cdot y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \frac{1}{2} \cdot y_5}{4} \text{ dla } n = 5$$

$$\bar{y}_8 = \frac{\frac{1}{2} \cdot y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + \frac{1}{2} \cdot y_{10}}{4} \text{ dla } n = 10$$

Warto w tym miejscu podkreślić, że okres wygładzania średnich ruchomych trzeba odpowiednio merytorycznie dostosować do danych empirycznych. Przykładem może być posiadanie danych miesięcznych o liczbie narodzin w danym województwie z kilku kolejnych lat. Dla takiego szeregu czasowego danych empirycznych do wyodrębnienia tendencji rozwojowej zasadne jest zastosowanie stałej wygładzania $k = 12$ (dwunastoelementowej scentrowanej średniej ruchomej).

Główną zaletą metody mechanicznej średnich ruchomych jest łatwość wykonania obliczeń. Wadą jest skracanie liczby danych szeregu czasowego wygładzonego tą metodą. Chodzi tutaj o to, że szereg empiryczny przy trzyokresowej średniej ruchomej $k = 3$ skraca się o dwa okresy – jeden na początku i jeden na końcu szeregu. Natomiast przy szeregu empirycznym z czterookresową średnią ruchomą skraca się on aż o cztery okresy, dwa na początku i dwa na końcu szeregu. Jednak nie zmienia to przydatności tego szeregu do wyznaczania prognoz.

Gdy prognosta nie może jednoznacznie wybrać stałej wygładzenia, kierując się jedynie względami merytorycznymi, najlepszym rozwiązaniem jest zastosowanie zasad wynikających z metod heurystycznych i iteracyjnych, polegających na kolejnym, krok po kroku, odkrywaniu najlepszych rozwiązań, stosując i sprawdzając kolejne stałe wygładzenia²⁸. Następnie, porównując wartości pierwiastków kwadratowych z błędów średniokwadratowych obliczanych dla kolejnych średnich ruchomych, wybiera się te, których błędy są najmniejsze. Zatem najlepszym wariantem do obliczenia prognozy jest taki dobór stałej wygładzenia, dla której średnio rzecz biorąc, wartości średnich ruchomych \bar{y}_t odchylają się w najmniejszym stopniu od wartości empirycznych (zmiennej y_t).

Wzory do obliczenia pierwiastków kwadratowych z błędów średniokwadratowych (czyli błędów średnich prognoz wygasłych) dla $k = 3$ i $k = 4$ przedstawiają się następująco:

²⁸ Liczbę przyjętych wstępnie stałych wygładzenia przyjmuje prognosta.

$$s_* = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{t=2}^{n-1} (y_t - \bar{y}_t)^2} \quad \text{dla } k = 3 \quad [3]$$

$$s_* = \sqrt{\frac{1}{n-4} \sum_{t=3}^{n-2} (y_t - \bar{y}_t)^2} \quad \text{dla } k = 4 \quad [4]$$

gdzie:

- s_* – pierwiastek kwadratowy z błędzi średniokwadratowego,
- n – liczba obserwacji empirycznych szeregu czasowego,
- t – zmienna empiryczna szeregu czasowego,
- y_t – wartość obserwacji empirycznej szeregu czasowego,
- \bar{y}_t – wartość średnia obserwacji empirycznych szeregu czasowego.

Im niższa wartość pierwiastka błędzi średniokwadratowego, tym lepszy dobór stałej wygładzenia, a co za tym idzie lepsze wygładzenie szeregu czasowego do prognozowania. Często progności wykorzystujący pierwiastki błędzi średniokwadratowego do wyznaczenia modelu teoretycznego i prognozy, stosują ekstrapolację trendu dla stałej wygładzania, która charakteryzowała się najniższą wartością błędzi. Wzory na modele: empiryczny, teoretyczny i prognostyczny przedstawiają się odpowiednio:

$$y_t = \alpha + \beta \cdot t + \xi_t \quad [5]$$

$$\hat{y}_t = a + b \cdot t \quad [6]$$

$$y_T^P = a + b \cdot T \quad [7]$$

gdzie:

- y_t – wartość empiryczna zmiennej,
- \hat{y}_t – wartość teoretyczna zmiennej,
- y_T^P – wartość prognostyczna zmiennej,
- α, β – parametry strukturalne modelu empirycznego z jedną zmienną,
- a, b – parametry strukturalne modelu teoretycznego (lub prognostycznego) z jedną zmienną,
- t – zmienna empiryczna szeregu czasowego,
- T – zmienna prognostyczna szeregu czasowego,
- ξ_t – składnik (czynnik) losowy.

Aby skorzystać z powyższych wzorów, należy obliczyć parametry a i b . Można to uzyskać, wykorzystując klasyczną metodę najmniejszych kwadratów, tworząc układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi (a i b), które rozwiązujemy klasycznymi metodami:

$$\begin{cases} n \cdot a + \sum t \cdot b = \sum \bar{y}_t \\ \sum t \cdot a + \sum t^2 \cdot b = \sum \bar{y}_t \cdot t \end{cases} \quad [8]$$

gdzie:

- n – liczba obserwacji empirycznych szeregu czasowego,
- a, b – parametry strukturalne modelu teoretycznego (lub prognostycznego) z jedną zmienną,
- Σt – suma wartości zmiennych empirycznych,
- Σt^2 – suma kwadratów wartości zmiennych empirycznych,
- $\Sigma \bar{y}_t$ – suma wartości średnich ruchomych,
- $\Sigma \bar{y}_t t$ – suma iloczynów wartości średnich ruchomych i zmiennych empirycznych.

Analiza literatury przedmiotu badań wykazała ponadto, że wielu autorów podaje również wzór²⁹ na obliczanie prognozy w metodzie średnich ruchomych, który nie uwzględnia obliczonych wcześniej wartości średnich wygładzonych. Zdaniem autorki nie jest to właściwe podejście, ponieważ nie wykorzystuje się wcześniej wykonanego wygładzenia, a co za tym idzie prognoza obarczona jest często dużo większym błędem. Dlatego też w dalszych rozważaniach autorka nie stosuje i nie poleca tego sposobu wyznaczania prognozy. Zamiast tego proponuje dokonanie ekstrapolacji obliczonych wartości wyrównujących szereg czasowy za pomocą średnich ruchomych, tworząc stosowne równanie prostej pokazującej tendencję rozwojową (trend) analizowanego szeregu czasowego.

Aby lepiej zrozumieć zastosowanie metody średnich ruchomych, przedstawiono praktyczny logistyczny przykład dotyczący określenia wielkości produkcji samochodów osobowych w Polsce na podstawie uzyskanych danych empirycznych z ostatnich dwunastu miesięcy 2016 roku. Wyrównując, utworzony na podstawie danych empirycznych, szereg czasowy metodą średnich ruchomych, a następnie obliczając prognozę na styczeń 2017 roku, otrzymamy spodziewaną wielkość produkcji w tym okresie.

Przykład

Produkcja samochodów osobowych w Polsce (w tys. szt.) w kolejnych dwunastu miesiącach 2016 roku została przedstawiona w tabeli 2. Na podstawie danych empirycznych należy wyznaczyć prognozę produkcji samochodów osobowych na styczeń 2017 roku.

Tabela 2

Dane empiryczne do rozpatrywanego przypadku

Rok 2016												
miesiące	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
tys. szt.	46,5	52,4	55,7	52,5	47,3	57,1	38,0	28,5	50,7	41,5	40,8	43,6

Źródło: Produkcja pojazdów samochodowych w Polsce w ujęciu miesięcznym, Polski Związek Przemysłu Motoryzacyjnego (www.pzpm.org.pl dostęp: 20.02.2017 r.).

$$29 \quad y_{n+1}^p = \frac{1}{k} \sum_{t=n-k+1}^n y_t$$

gdzie:

- y_{n+1}^p – wartość prognozy na okres $n + 1$,
- k – stała wygładzenia (okres średniej ruchomej),
- n – liczba obserwacji empirycznych szeregu czasowego,
- t – zmienna empiryczna szeregu czasowego,
- Σy_t – suma wartości empirycznych zmiennej.

Do wyznaczenia prognozy produkcji na styczeń 2017 roku zostanie wykorzystana metoda średnich ruchomych. Analizie zostaną poddane trzy rodzaje średnich ruchomych:

- trzyokresowa średnia ruchoma $k = 3$,
- czterookresowa średnia ruchoma $k = 4$,
- pięciookresowa średnia ruchoma $k = 5$.

Na podstawie obliczonych pierwiastków błędów średniokwadratowych zostanie wybrana najbardziej trafna stała wygładzenia k , a następnie obliczona prognoza.

Do obliczenia średnich ruchomych należy sporządzić tabelę pomocniczą (tabela 3), w której zostaną zapisane wyniki poszczególnych obliczeń.

Tabela 3

Tabela pomocnicza do obliczeń trzy-, cztero- i pięciookresowych średnich ruchomych

t	y_t	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
		\bar{y}_t	\bar{y}_t	\bar{y}_t
1	46,5	–	–	–
2	52,4	51,53	–	–
3	55,7	53,53	51,88	50,88
4	52,5	51,83	52,56	53,00
5	47,3	52,30	50,94	50,12
6	57,1	47,47	45,73	44,68
7	38,0	41,20	43,15	44,32
8	28,5	39,07	41,63	43,16
9	50,7	40,23	40,03	39,90
10	41,5	44,33	42,26	41,02
11	40,8	41,97	–	–
12	43,6	–	–	–

Trzyokresowa średnia ruchoma $k = 3$

Średnie ruchome trzyokresowe $k = 3$ dla $n \geq 3$ obliczane są przy wykorzystaniu wzoru 1: $\bar{y}_{n-1} = \frac{y_{n-2} + y_{n-1} + y_n}{3}$. Wzory szczegółowe i przykładowe obliczenia trzyokresowych średnich ruchomych przedstawiają się następująco:

$$\begin{aligned}
 \text{dla } n = 3 \bar{y}_2 &= \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{46,5 + 52,4 + 55,7}{3} \approx 51,53 \\
 &\vdots \\
 \text{dla } n = 6 \bar{y}_5 &= \frac{y_4 + y_5 + y_6}{3} = \frac{52,5 + 47,3 + 57,1}{3} = 52,30 \\
 &\vdots \\
 \text{dla } n = 11 \bar{y}_{10} &= \frac{y_9 + y_{10} + y_{11}}{3} = \frac{50,7 + 41,5 + 40,8}{3} \approx 44,33
 \end{aligned}$$

Obliczenia wykonujemy kolejno, poczynając od średniej ruchomej \bar{y}_2 , a kończąc na \bar{y}_{11} . Szereg empiryczny został skrócony o jeden okres z przodu i jeden okres z tyłu. Powstał nowy szereg czasowy z wyrównanymi zmiennymi, utworzony przez wartości średnich ruchomych o stałej wygładzenia $k = 3$ (tabela 3).

Czterookresowa średnia ruchoma $k = 4$

Średnie ruchome czterookresowe $k = 4$ dla $n \geq 4$ obliczane są na podstawie wzoru 2: $\bar{y}_{n-2} = \frac{\frac{1}{2}y_{n-4} + y_{n-3} + y_{n-2} + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n}{4}$. Wzory szczegółowe i przykładowe obliczenia czterookresowych średnich ruchomych $k = 4$ przedstawiają się następująco:

$$\begin{aligned}
 \text{dla } n = 5 \bar{y}_3 &= \frac{\frac{1}{2} \cdot y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \frac{1}{2} \cdot y_5}{4} \\
 \bar{y}_3 &= \frac{\frac{1}{2} \cdot 46,5 + 52,4 + 55,7 + 52,5 + \frac{1}{2} \cdot 47,3}{4} \approx 51,88 \\
 &\vdots \\
 \text{dla } n = 8 \bar{y}_6 &= \frac{\frac{1}{2} \cdot y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + \frac{1}{2} \cdot y_8}{4} \\
 \bar{y}_6 &= \frac{\frac{1}{2} \cdot 52,5 + 47,3 + 57,1 + 38 + \frac{1}{2} \cdot 28,5}{4} \approx 45,73 \\
 &\vdots \\
 \text{dla } n = 11 \bar{y}_9 &= \frac{\frac{1}{2} \cdot y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + \frac{1}{2} \cdot y_{11}}{4} \\
 \bar{y}_9 &= \frac{\frac{1}{2} \cdot 38 + 28,5 + 50,7 + 41,5 + \frac{1}{2} \cdot 40,8}{4} \approx 40,03
 \end{aligned}$$

Wykonano kolejno obliczenia, poczynając od średniej ruchomej \bar{y}_3 a kończąc na \bar{y}_{10} . Szereg empiryczny został skrócony o dwa okresy z przodu i dwa okresy z tyłu. Powstał nowy szereg czasowy z wyrównanymi zmiennymi, utworzony przez wartości średnich ruchomych o stałej wygładzenia $k = 4$ (tabela 2).

Czterookresowa średnia ruchoma $k = 5$

Średnie ruchome czterookresowe $k = 5$ dla $n \geq 5$ obliczane są przy wykorzystaniu następującego wzoru:

$$\bar{y}_{n-2} = \frac{y_{n-4} + y_{n-3} + y_{n-2} + y_{n-1} + y_n}{5} \quad [9]$$

gdzie:

\bar{y}_{n-2} – wartość średniej ruchomej,

$y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, y_{n-3}, y_{n-4}$ – poszczególne empiryczne wartości szeregu czasowego.

Wzory szczegółowe i przykładowe obliczenia pięciookresowych średnich ruchomych przedstawiają się następująco:

$$\begin{aligned} \text{dla } n = 6 \quad \bar{y}_4 &= \frac{y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6}{5} \\ \bar{y}_4 &= \frac{52,4 + 55,7 + 52,5 + 47,3 + 57,1}{5} = 53 \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{dla } n = 9 \quad \bar{y}_7 &= \frac{y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9}{5} \\ \bar{y}_7 &= \frac{47,3 + 57,1 + 38 + 28,5 + 50,7}{5} = 44,32 \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{dla } n = 12 \quad \bar{y}_{10} &= \frac{y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11} + y_{12}}{5} \\ \bar{y}_{10} &= \frac{28,5 + 50,7 + 41,5 + 40,8 + 43,6}{5} = 41,02 \end{aligned}$$

Kolejno wykonano obliczenia, poczynając od średniej ruchomej \bar{y}_3 a kończąc na \bar{y}_{10} . Szereg empiryczny został skrócony o dwa okresy z przodu i dwa okresy z tyłu (podobnie jak w przypadku stałej wygładzenia $k = 4$). Powstał nowy szereg czasowy z wyrównanymi zmiennymi, utworzony przez wartości średnich ruchomych o stałej wygładzenia $k = 5$ (tabela 3).

Pierwiastki kwadratowe błędów średniokwadratowych

Obliczanie pierwiastków kwadratowych błędów średniokwadratowych, podobnie jak obliczanie średnich ruchomych, implikuje skonstruowanie tabeli pomocniczej dla ułatwienia obliczeń (tabela 4).

Tabela 4

Tabela pomocnicza do obliczenia pierwiastków kwadratowych błędów średniokwadratowych dla stałej wygładzania $k = 3$, $k = 4$ i $k = 5$

y	y _t	k = 3			k = 4			k = 5		
		y _t	y _t - \bar{y}_t	(y _t - \bar{y}_t) ²	y _t	y _t - \bar{y}_t	(y _t - \bar{y}_t) ²	y _t	y _t - \bar{y}_t	(y _t - \bar{y}_t) ²
1	46,5	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	52,4	51,53	0,87	0,75	-	-	-	-	-	-
3	55,7	53,53	2,17	4,69	3,83	14,63	3,83	4,82	23,23	4,82
4	52,5	51,83	0,67	0,44	-0,06	0,00	-0,06	-0,50	0,25	-0,50
5	47,3	52,30	-5,00	25,00	-3,64	13,23	-3,64	-2,82	7,95	-2,82
6	57,1	47,47	9,63	92,80	11,38	129,39	11,38	12,42	154,26	12,42
7	38,0	41,20	-3,20	10,24	-5,15	26,52	-5,15	-6,32	39,94	-6,32
8	28,5	39,07	-10,57	111,65	-13,13	172,27	-13,13	-14,66	214,92	-14,66
9	50,7	40,23	10,47	109,55	10,68	113,96	10,68	10,80	116,64	10,80
10	41,5	44,33	-2,83	8,03	-0,76	0,58	-0,76	0,48	0,23	0,48
11	40,8	41,97	-1,17	1,36	-	-	-	-	-	-
12	43,6	-	-	-	-	-	-	-	-	-
				Σ 364,53		Σ 470,58		Σ 557,42		

Wykorzystując obliczenia zawarte w tabeli pomocniczej (tabela 4), a konkretnie obliczenia sumy kwadratów odchyłeń (czyli sumy kwadratów różnic pomiędzy wartościami empirycznymi i średnimi wygładzonymi), możemy obliczyć pierwiastki kwadratowe błędów średniokwadratowych dla stałych wygładzania $k = 3$, $k = 4$ i $k = 5$, odpowiednio podstawiając do wzorów:

$$\text{dla } k = 3 s_* = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{t=2}^{n-1} (y_t - \bar{y}_t)^2} = \sqrt{\frac{1}{12-2} \cdot 364,53} \approx 6,06$$

$$\text{dla } k = 4 s_* = \sqrt{\frac{1}{n-4} \sum_{t=3}^{n-2} (y_t - \bar{y}_t)^2} = \sqrt{\frac{1}{12-4} \cdot 470,58} \approx 7,67$$

$$\text{dla } k = 5 s_* = \sqrt{\frac{1}{n-4} \sum_{t=3}^{n-2} (y_t - \bar{y}_t)^2} = \sqrt{\frac{1}{12-4} \cdot 557,42} \approx 8,35$$

Najmniejszą wartość pierwiastka kwadratowego błędu średniokwadratowego ma stała wygładzenia $k = 3$, dlatego do prognozowania wykorzystamy obliczone średnie ruchome właśnie dla tej stałej wygładzenia.

Do wyznaczenia modelu teoretycznego $\hat{y}_t = a + b \cdot t$ (wzór 6) i prognozy $y_T^P = a + b \cdot T$ (wzór 7) należy wykorzystać wzór 8: $\begin{cases} n \cdot a + \sum t \cdot b = \sum \bar{y}_t \\ \sum t \cdot a + \sum t^2 \cdot b = \sum \bar{y}_t \cdot t \end{cases}$ oraz skonstruować tabelę pomocniczą (tabela 5) w celu obliczenia parametrów a i b .

Tabela 5

Tabela pomocnicza do wyznaczenia modelu teoretycznego oraz prognozy dla stałej wygładzenia $k = 3$ i $k = 10$ okresów wygładzenia (t)

t	$k = 3$		
	\bar{y}_t	$\bar{y}_t \cdot t$	t^2
1	51,53	51,53	1
2	53,53	107,07	4
3	51,83	155,50	9
4	52,30	209,20	16
5	47,47	237,33	25
6	41,20	247,20	36
7	39,07	273,47	49
8	40,23	321,87	64
9	44,33	399,00	81
10	41,97	419,67	100
Σ	55	463,47	2 421,83

Dzięki obliczeniom wykonanym w tabeli pomocniczej (tabela 5), stosując klasyczną metodę najmniejszych kwadratów, możemy utworzyć układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi a i b (wzór 8):

$$\begin{cases} 10a + 55b = 463,47 \\ 55a + 385b = 2421,83 \end{cases}$$

Układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi a i b rozwiązujemy dowolną metodą (np. metodą podstawiania, przeciwnych współczynników, czy też metodą wyznaczników) i otrzymujemy następujące wartości parametrów:

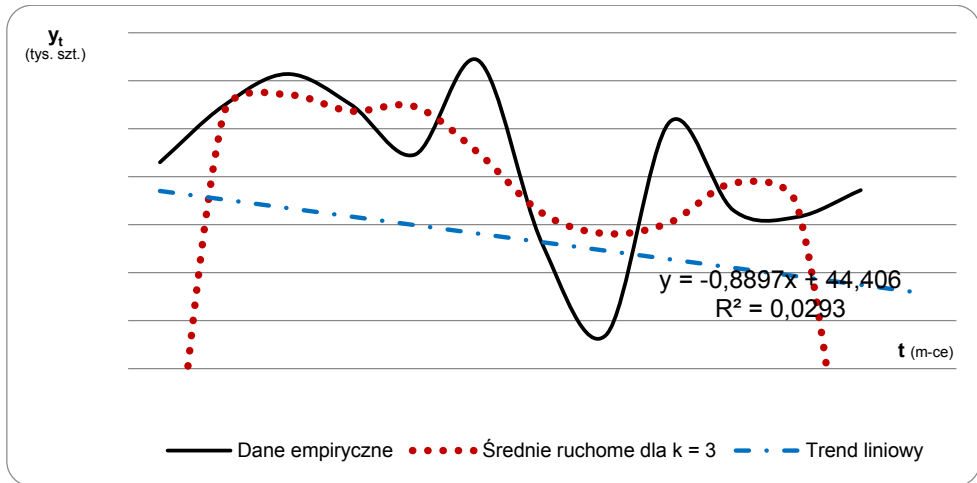
$$\begin{cases} a = 56,37 \\ b = -1,54 \end{cases}$$

Dzięki powyższym obliczeniom model teoretyczny (wzór 6) i model prognozy (wzór 7) z obliczonymi parametrami przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned} \hat{y}_t &= 56,37 - 1,54 \cdot t \\ y_T^P &= 56,37 - 1,54 \cdot T \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę, że mieliśmy 12 danych empirycznych (tabela 2) produkcji samochodów osobowych w Polsce od stycznia do grudnia 2016 roku, możemy obliczyć prognozę na okres $T = 13$ czyli na styczeń 2017 roku.

$$\text{dla } T = 13 \quad y_T^p = 56,37 - 1,54 \cdot T = 56,37 - 1,54 \cdot 13 = 36,35$$



Rys. 4. Wykres danych empirycznych, średnich ruchomych oraz trendu liniowego

Na podstawie dokonanych obliczeń, w tym wygładzania szeregu metodą średnich ruchomych o stałej wygładzenia $k = 3$ i obliczonej prognozy, możemy spodziewać się, że produkcja samochodów osobowych w Polsce w 2017 roku będzie wynosiła w styczniu 36,35 tys. szt. Z przedstawionego wykresu (rysunek 4) wynika, że trend (tendencja rozwojowa) jest spadkowy, co wróży nie najlepsze perspektywy dla przemysłu produkcji samochodów osobowych w najbliższych miesiącach.

Zakończenie

Prognozowanie w logistyce będące aktualnym problemem, z którym stykają się przedsiębiorcy w wielu branżach, realizując na co dzień procesy logistyczne, było przyczynkiem do napisania tego artykułu. Cel, jaki autorka postawiła sobie na wstępie, został osiągnięty, a problem rozwiązany poprzez usystematyzowanie wiedzy w obszarze przede wszystkim zdefiniowania prognozowania oraz uporządkowania jego rodzajów ze względu na przyjęte kryteria. Ponadto określono funkcje i fazy prognozowania, a także wyróżniono najważniejsze etapy prognozowania w ujęciu chronologicznym (utworzono algorytm). Pokazanie uporządkowanych kolejno działań w obliczaniu prognozy metodą średnich ruchomych umożliwiło wykonanie przykładu logistycznego zastosowania obliczania prognozy. Takie ujęcie badanego

zjawiska pozwoliło na pokazanie łatwości wykorzystania metody prognozowania średnich ruchomych w logistycznej praktyce decyzyjnej przedsiębiorstw.

Wartością dodaną w ocenie autorki tego artykułu, jest oprócz teoretycznego opisu zastosowania metody średnich ruchomych i wyprowadzonych wzorów ogólnych, a na ich podstawie utworzonych wzorów szczegółowych, pokazanie praktycznego przykładu obliczeń i wnioskowania z uzyskanej prognozy. Autorka zdaje sobie sprawę, że metoda prognozy na podstawie średnich ruchomych jest tylko jedną z metod prognozowania w logistyce przedsiębiorstwa, co skłania do kontynuowania badań teoretycznych i empirycznych w tym zakresie. Pogłębienie wiedzy i umiejętności praktycznego zastosowania tych metod na potrzeby procesów decyzyjnych w przedsiębiorstwach pozwala na docenienie również innych metod prognozowania w tym obszarze.

Bibliografia

- Bendkowski J., Kramarz M., Kramarz W., *Metody i techniki ilościowe w logistyce. Wybrane zagadnienia*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2010.
- Dittmann P., *Prognozowanie w przedsiębiorstwie: metody i ich zastosowanie*, Oficyna Wolters Kluwer Business, Kraków 2008.
- Krawczyk S., *Metody ilościowe w planowaniu (działalności przedsiębiorstwa)*, Wydawnictwo C.H. Beck, Warszawa 2001.
- Maciąg A., Pietróń R., Kukła S., *Prognozowanie i symulacja w przedsiębiorstwie*, PWE, Warszawa 2013.
- Pawłowski Z., *Zasady predykcji ekonometrycznej*, PWN, Warszawa 1982.
- Podgórski J., *Statystyka dla studiów licencjackich*, PWE, Warszawa 2005.
- Sobczyk M., *Prognozowanie. Teoria. Przykłady. Zadania*, Placet, Warszawa 2008.
- Sobczyk M., *Statystyka*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1996.
- Witkowski M., Klimanek T., *Prognozowanie gospodarcze i symulacje w przykładach i zadaniach*, AE, Poznań 2006.
- Duda A., *Modelowanie i prognozowanie ekonometryczne w logistyce przedsiębiorstwa*, „Systemy Logistyczne Wojsk. Zeszyty Naukowe Instytutu Logistyki Wydziału Logistyki Wojskowej Akademii Technicznej” 2016, nr 44.
- Hellwig Z., *Schemat budowy prognozy statystycznej metodą wag harmonicznnych*, „Przegląd Statystyczny” t. 14, nr 2 (1967), Polska Akademia Nauk, Komitet Statystyki i Ekonometrii, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1967.
- www.pzpm.org.pl.

PREDICTING IN LOGISTICS INCLUDING THE MOVING AVERAGES PREDICTION METHOD

Abstract

Predicting in logistics is an important element of decision-making, as is the selection of an adequate method of predicting in the studied phenomena and logistics processes. Therefore, the subject of the article is predicting in logistics and includes the moving averages prediction method. This article aims to systematise the concepts and types of prediction methods, and also to present an algorithm calculating the moving averages predicting method based on actual empirical data production of passenger cars in Poland in 2016. Conducting all kinds of prediction methods is an extremely useful complement to the existing gaps in the theory and practice processes in logistics.

Key words: predicting, predicting in logistics, moving averages method, time series.