

Krzysztof WIERZCHOLSKI*, Andrzej MISZCZAK**

PODSTAWY STOCHASTYCZNEGO OPISU HYDRODYNAMICZNEJ TEORII SMAROWANIA

FUNDAMENTALS OF THE STOCHASTIC DESCRIPTION OF THE HYDRODYNAMIC THEORY OF LUBRICATION

Słowa kluczowe:

gęstość stochastyczna, losowa grubość szczelin, odchylenie standardowe, dystrybuanta, mikrołożyska

Key words:

probability density, random gap height, standard deviation, cumulative function microbearing

Streszczenie

Głównym powodem generowania zmian losowych w czasie eksploatacji poprzecznych łożysk ślizgowych, nie wyłączając biołożysk a w szczególności mikrołożysk, jest stochastycznie zmieniająca się chropowatość w skali mikro i nano dwóch współpracujących powierzchni, a także probabilistycznie zmienne impulsy zewnętrzne wywołane drganiami lub mikrodrzaniami układu łoży-

* Politechnika Koszalińska, Instytut Mechatroniki, Nanotechnologii i Techniki Próżniowej, ul. Raclawicka 15–17, 75-620 Koszalin, e-mail: krzysztof.wierzcholski@wp.pl.

** Akademia Morska w Gdyni, Wydział Mechaniczny, ul. Morska 81/87, 81-225 Gdynia, e-mail: miszczak@wm.am.gdynia.pl.

skowego oraz zewnętrznej jego obudowy. Oba wymienione czynniki powodują stochastyczną zmianę wysokości szczeliny łożyskowej w takim zakresie, że ma to wpływ na rozkłady prędkości czynnika smarującego, rozkłady ciśnienia hydrodynamicznego, wartości sił nośnych, wartości momentów tarcia, współczynniki tarcia oraz na końcowym etapie na zużycie. Celem badań w niniejszej pracy jest przedstawienie podstawowych zasad dotyczących wykorzystania metod stochastycznych przy rozwiązywaniu problemów hydrodynamicznej teorii smarowania poprzecznych łożysk ślizgowych z uwzględnieniem odchylenia standardowego.

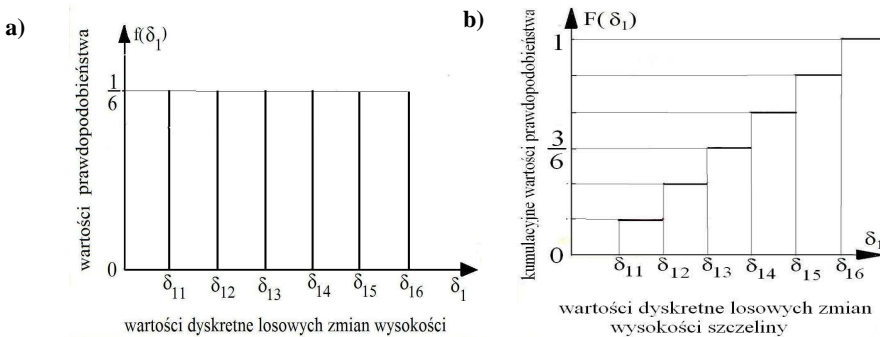
WPROWADZENIE

Zmiany przestrzeni szczeliny łożyskowej w kierunku jej wysokości, powodowane są często przez drgania oraz nieustalone impulsy ruchowe [L. 1–6]. Nieustalony impuls, który zaczyna się na początku czasu objętego badaniem, zanika, gdy czas dąży do nieskończoności, a wtedy czop przyjmuje pozycję stacjonarną. Rozkłady prędkości cieczy oraz ciśnienia zależne są w znaczącym stopniu od czasu. Uwidocznione efekty stochastyczne występów chropowatości i ukształtowania falistości wywołane są przez losowe ścinanie trących się nierówności na powierzchniach białego metalu w łożyskach klasycznych, a także powodowane zwłóknieniami powierzchni chrząstki stawowej oraz stwardnieniem kości podchrzęstnej w biołożyskach. Bezwymiarowa wysokość szczeliny ε_{T1} po kierunku osi y_1 w układzie prostokątnym (x_1, y_1, z_1) zależy od zmiennych x_1, z_1 , położenia, a także od czasu t_1 oraz składa się z dwóch części wskazanych poniższym wzorem [L. 5, 6]:

$$\varepsilon_{T1} = \varepsilon_{T1s}(x_1, z_1, t_1) + \delta_1(x_1, z_1, \xi) \quad (1)$$

gdzie ε_{T1s} oznacza całkowitą bezwymiarową wysokość cienkiej warstwy cieczy z gładkimi współpracującymi powierzchniami. Ta część wysokości szczeliny zawiera bezwymiarowe korekty powodowane hiperelastycznymi deformacjami. Symbol δ_1 oznacza bezwymiarową, losową część zmian wysokości szczeliny wywołanych drganiami, niestacjonarnym obciążeniem oraz występami chropowatości mierzonymi od umownego średniego poziomu. Symbol ξ opisuje zmienną losową, która charakteryzuje rozmieszczenie chropowatości. Tak więc opis rzeczywistych zmian wysokości szczeliny zależy od dokonujących się zmian nierówności powierzchni. Zmiany losowe nierówności współpracujących powierzchni są opisane funkcją gęstości prawdopodobieństwa na podstawie porównań pomiędzy rezultatami uzyskanymi na drodze eksperymentu autorów [L. 5, 6], a także badań doświadczalnych D. Dowsona oraz V.C. Mowa w zakresie biołożysk [L. 1].

Funkcję, która każdej wartości zmiennej losowej przyporządkowuje pewne prawdopodobieństwa, nazywamy funkcją gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej. Z racji wyboru skończonej ilości n punktów pomiarowych w obszarze smarowania z zakresu wartości δ_1 oraz przyporządkowania im określonych prawdopodobieństw mamy do czynienia z dyskretnym rozkładem funkcji $f(\delta_{1k})$ gęstości prawdopodobieństwa dla $k = 1, 2, \dots, n$ pokazanym na **Rys. 1a** dla $n = 6$.



Rys. 1. Dyskretnie wartości: a) funkcji gęstości prawdopodobieństwa, b) dystrybucyj

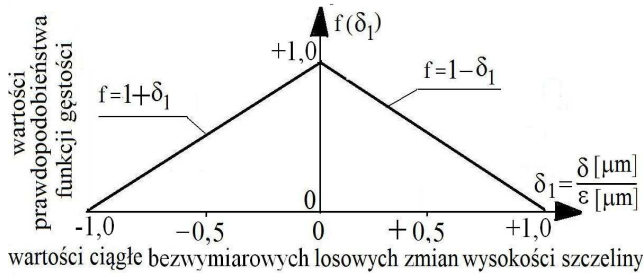
Fig. 1. Discrete values: a) of density probability function, b) of cumulative values of function shown in a)

Rys. 1b pokazuje dystrybuantę dyskretną, czyli funkcję kumulacji prawdopodobieństw dyskretnych pokazanych na **Rys. 1a**. W przypadku dużej ilości punktów pomiarowych [L. 7], funkcję gęstości możemy przedstawić jako funkcję ciągłą $f(\delta_1)$ pokazaną na **Rys. 2**. **Rys. 3** przedstawia dystrybuantę ciągłą dla rozkładu gęstości pokazanego na **Rys. 2**.

Wartości dodatnie δ_1 przedstawiają losowe bezwymiarowe wzrosty wysokości szczeliny, natomiast wartości ujemne to losowe zmniejszanie się wysokości szczeliny. Symetryczny rozkład wartości funkcji gęstości prawdopodobieństwa pokazanych na **Rys. 2** względem dodatnich i ujemnych wartości bezwymiarowych zmian δ_1 wysokości szczeliny wskazuje, że prawdopodobieństwa średnich spadków i wzrostów wysokości są jednakowe.

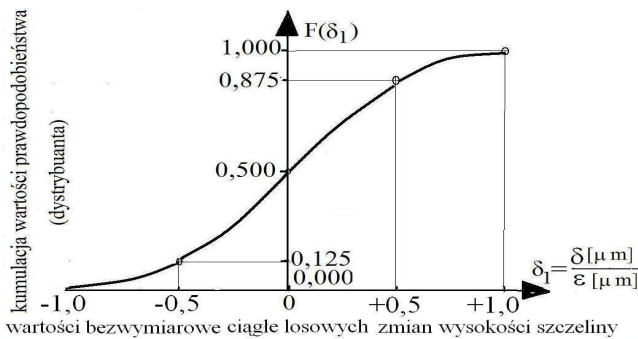
Nie każdy zbiór wartości pomiarowych prawdopodobieństw oraz nie każda funkcja ciągła może być funkcją gęstości prawdopodobieństwa. W każdym z tych przypadków żadna z rzędnych funkcji gęstości prawdopodobieństwa nie może przekroczyć wartości 1, bo taka jest największa wartość prawdopodobieństwa oraz jednocześnie w obu przypadkach dystrybuanta F_k, F_x musi dążyć do jedności, gdy k dąży do n lub x dąży do nieskończoności. Własność rozkładów stochastycznych prezentują następujące wzory [L. 7]:

$$F_k = \sum_{k=1}^{k < n} f(\delta_{1k}), F_n = \sum_{k=1}^n f(\delta_{1k}) = 1, F_x = \int_{-\infty}^{x < \infty} f(\delta_1) d\delta_1, F_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} f(\delta_1) d\delta_1 = 1 \quad (2)$$



Rys. 2. Ciągłe wartości bezwymiarowe $f(\delta_1)$ funkcji gęstości prawdopodobieństwa dla ciągłych bezwymiarowych zmian wysokości szczeliny łożyska, δ – wartości wymiarowe, δ_1 – wartości bezwymiarowe, ϵ – charakterystyczna wartość wymiarowa wysokości szczeliny w mikrometrach

Fig. 2. Continuous dimensionless values $f(\delta_1)$ of density probability function for continuous dimensionless changes of bearing gap height: δ – dimension values, δ_1 – dimensionless values, ϵ – characteristic dimensional value of gap height in micrometer



Rys. 3. Wartości dystrybuanty dla ciągłych wartości bezwymiarowych funkcji gęstości prawdopodobieństwa pokazanych na Rys. 3

Fig. 3. Cumulative values for continuous density probability function show in Fig. 3

WARTOŚĆ OCZEKIWANA

Przez wartość oczekiwaną losowych zmian wysokości szczeliny łożyskowej (*) rozumiemy uśrednioną ich wartość, którą zapisujemy następującym wzorem [L. 5, 7]:

$$E(*) = \int_{-\infty}^{+\infty} (*) \times f(\delta_1) d\delta_1 \tag{3}$$

gdzie f_k – bezwymiarowa funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa.

W przypadku funkcji gęstości prawdopodobieństwa przedstawionej na **Rys. 3** oraz dla wysokości szczeliny łożyskowej podanej wzorem (1) mamy następującą wartość oczekiwaną:

$$E(\varepsilon_{T1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varepsilon_{T1s} + \delta_1) f(\delta_1) d\delta_1 = \varepsilon_{T1s} + \int_{-1}^{+1} \delta_1 f(\delta_1) d\delta_1 = \varepsilon_{T1s} \quad (4)$$

Całka po prawej stronie równania (4) jest równa zero, ponieważ funkcja podcałkowa jest nieparzysta. Wartość oczekiwana z wysokości szczeliny jest równa wysokości szczeliny, ponieważ funkcja gęstości prawdopodobieństwa pokazana na **Rys. 3** jest parzysta, co oznacza, że wysokość szczeliny jest zwiększana w trakcie eksploatacji z takimi samymi prawdopodobieństwami, z jakimi ulega zmniejszaniu w trakcie pracy. Aby uzyskać wymiarowe wartości szczeliny, należy obie strony równania (4) pomnożyć przez wymiarową charakterystyczną wartość wysokości ε wyrażoną w mikrometrach.

ODCHYLENIE STANDARDOWE

Odchylenie standardowe jest możliwą różnicą pomiędzy losowymi wartościami realnymi a wartościami losowymi uśrednionymi oraz wyraża się następującym wzorem [L. 7]:

$$\sigma^{(*)} = \sqrt{E(\delta_1^2) - E^2(\delta_1)} \quad (5)$$

Z równości (4) wynika, że:

$$E(\delta_1) = 0 \quad (6)$$

Dla założeń (1), (3) uzyskujemy:

$$E(\delta_1^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_1^2 f(\delta_1) d\delta_1 = \int_{-1}^{+1} \delta_1^2 f(\delta_1) d\delta_1 = 2 \int_0^{+1} \delta_1^2 (1 - \delta_1) d\delta_1 = \frac{1}{6} \quad (7)$$

Podstawiając wzory (6), (7) do wyrażenia (5), uzyskujemy odchylenie standardowe równe:

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right) - 0^2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad (8)$$

LOSOWE RÓWNANIE REYNOLDSA

Stochastyczne najprostsze równaniu Reynoldsa we współrzędnych walcowych zapisujemy w postaci [L. 2– 6]:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{\varepsilon^3 E(\varepsilon_{T1}^3)}{\eta} \frac{\partial E(p)}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\varepsilon^3 E(\varepsilon_{T1}^3)}{\eta} \frac{\partial E(p)}{\partial z} \right] = 6\omega \frac{\varepsilon \partial E(\varepsilon_{T1})}{\partial \varphi} \quad (9)$$

gdzie: $p(\varphi, z)$ – ciśnienie hydrodynamiczne, $0 < \varphi \leq 2\pi$, $-b \leq z \leq b$, $\varepsilon_T = \varepsilon_T(\varphi, z)$ – wymiarowa wysokość szczeliny, $\varepsilon_{T1} = \varepsilon_T / \varepsilon$ – bezwymiarowa wysokość szczeliny, ε – charakterystyczna wymiarowa wartość wysokości szczeliny, $2b$ – długość łożyska.

W przypadku funkcji gęstości prawdopodobieństwa przedstawionej na **Rys. 3** oraz dla wysokości szczeliny łożyskowej podanej wzorem (1) mamy następującą wartość oczekiwaną z trzeciej potęgi wysokości szczeliny:

$$E(\varepsilon_{T1}^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varepsilon_{T1s} + \delta_1)^3 f(\delta_1) d\delta_1 = \varepsilon_{T1s}^3 + 3\varepsilon_{T1s}^2 \int_{-1}^{+1} \delta_1 f(\delta_1) d\delta_1 + 3\varepsilon_{T1s} \int_{-1}^{+1} \delta_1^2 f(\delta_1) d\delta_1 + \int_{-1}^{+1} \delta_1^3 f(\delta_1) d\delta_1 \quad (10)$$

Z powodu nieparzystości funkcji podcałkowej mamy:

$$3\varepsilon_{T1s}^2 \int_{-1}^{+1} \delta_1 f(\delta_1) d\delta_1 = 0, \quad \int_{-1}^{+1} \delta_1^3 f(\delta_1) d\delta_1 = 0 \quad (11)$$

Podstawiając wyniki (11) do wzoru (10) oraz wykorzystując obliczenia (7), uzyskujemy:

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_{T1}^3) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\varepsilon_{T1s} + \delta_1)^3 f(\delta_1) d\delta_1 = \varepsilon_{T1s}^3 + 3\varepsilon_{T1s} \int_{-1}^{+1} \delta_1^2 f(\delta_1) d\delta_1 = \varepsilon_{T1s}^3 + 3\varepsilon_{T1s} \sigma^2 = \\ &= \varepsilon_{T1s}^3 + \frac{1}{2} \varepsilon_{T1s} \end{aligned} \quad (12)$$

WNIOSKI

Niniejsza praca przedstawia metodę transformacji prostych równań Reynoldsa wyznaczających ciśnienie hydrodynamiczne do postaci równania Reynoldsa o stochastycznych współczynnikach z uwzględnieniem odchylenia standardo-

wego. Metoda ta jest wykonalna w przypadku wyznaczonej doświadczalnie funkcji gęstości prawdopodobieństwa dla losowo zmiennej wysokości szczeliny łożyska ślizgowego.

LITERATURA

1. Dowson D., Bio-Tribology of Natural and Replacement Synovial Joints, In: Van Mow C., Ratcliffe A., Woo S.L-Y., Biomechanics of Diarthrodial Joint. Springer-Verlag, New York, Berlin, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, 1990, Vol. 2, Chap. 29, pp. 305–345.
2. Wierzcholski K., The method of solutions for hydrodynamic lubrication by synovial fluid flow in human joint gap, Control and Cybernetics, 2002, Vol. 31, No. 1, pp. 91–116.
3. Wierzcholski K., Stochastic description for surfaces of cultivated joint cartilages in bioreactor. XLIV Sympozjon PTMTS Modelowanie w Mechanice, referat, 2005, pp. 12–13.
4. Wierzcholski K., Random changes of pressure in curvilinear slide bearing gap. Explo-Diesel & Gas Turbine Proceedings, IV International Scientific Technical Conference, Międzyzdroje-Kopenhaga, 2005, pp. 407–416.
5. Wierzcholski K., Random height of thin layer of rheological liquids. International Journal of Applied Mechanics and Engineering, Vol.10, 2005, pp. 151–158.
6. Wierzcholski K., Cwanek J., Measurements of surface roughness of heads of human hip joints in lubrication aspects, Zeszyty Naukowe Katedry Mechaniki Stosowanej, Politechnika Śląska, 2005, Z. 29, s. 477–483.
7. Sobczyk M., Statystyka, PWN, Warszawa 1996.

Summary

The aim of this paper is the presentation of basic principles referring to the application of stochastic methods during the solution of hydrodynamic lubrication problems for slide journal bearings, taking into account the standard deviation and expectancy values of gap height between two cooperating surfaces. A description of real gap height changes in micro- and bio-bearings depend on the variations of cooperating surfaces. Random changes of the surface are described by the probability density functions based on a comparison between results of the J. Cwanek and K. Wierzcholski's experiments and the investigations of D. Dowson and Mow. Such experiments are performed for micro-bearing surface samples as well cartilage surface samples obtained from human bio-joints. The random influence of the surface roughness on the change of the flow and operational parameters is indicated by many experiments. The presented methods based on values of probability density function obtained in experimental way enable one to formulate basic hydrodynamic dependencies for lubrication theory in random description.

