Zbigniew Stropek, Krzysztof Gołacki
Katedra Podstaw Techniki
Akademia Rolnicza w Lublinie

Niektóre błędy wyznaczania parametrów modelu reologicznego na podstawie testu relaksacji naprężeń na przykładzie bulwy ziemniaka

Streszczenie

Artykuł prezentuje procedury oszacowania niektórych błędów wyznaczania parametrów modelu Maxwella opisującego zachowanie się walcowych próbek w teście relaksacji naprężeń na przykładzie tkanki ziemniaka odmiany Irga. Wyznaczono błędy zarówno toru pomiarowego jak i wynikające z niedokładności wykonania próbek. Uwzględniono także zmienny w funkcji siły reakcji próbki błąd systematyczny przy wyliczaniu współczynników sprężystości i lepkości dynamicznej modelu.

Słowa kluczowe: test relaksacji naprężeń, współczynnik sprężystości, lepkość dynamiczna, model Maxwella, błędy

Oznaczenia

A_i, α_i – parametry równania aproksymującego, [N], [s^{-1}]

E_i, η_i - współczynniki sprężystości i lepkości dynamicznej, [MPa], [Pa·s]

p - pole przekroju poprzecznego próbki, [m^2]

v - prędkość przemieszczenia [m·s^{-1}]

t_m - czas narastania odkształcenia, [s]

t – czas liczony od chwili rozpoczęcia odkształcania próbki, [s].

l - długość próbki, [m]

d – średnica próbki, [m]

λ - deformacji próbki podczas testu relaksacji, [m]

$u(t_j)$ - deformacja próbki z uwzględnieniem ugięcia czujnika w chwili t_j, [m]

$u_c(t_j)$ - ugięcie czujnika w chwili t_j, [m]

$\psi = 1{,}22322 \cdot 10^{-7}$ – podatność czujnika, [m·N^{-1}]

$F_1(t)$ - funkcja liniowa aproksymująca rzeczywisty przebieg siły w okresie wstępnego odkształcenia, [N]

$F_2(t)=\sum_{i=1}^{2} A_i \cdot e^{-\alpha_i (t-t_m)}$ - funkcja aproksymująca rzeczywisty przebieg siły w okresie relaksacji, [N]

Wstęp

Testy ściskania i relaksacji naprężeń są ważnym źródłem informacji o „stanie fizycznym" produktów rolniczych, takich jak owoce i warzywa. Ich wyniki wykorzystywane są do określenia odporności na uszkodzenia, stopnia dojrzałości, różnic między odmianami, a także do oceny jakości konsumpcyjnej owoców.

Testy ściskania i relaksacji naprężeń mają szczególne znaczenie, gdyż na ich podstawie możliwe jest zaproponowanie modelu badanego materiału. Stąd też oprócz bieżących ocen możliwe jest również przewidywanie zachowania się badanych materiałów w pewnym zakresie obciążeń mechanicznych wykraczających poza eksperyment. Celem pracy jest prezentacja analizy błędów wyznaczania stałych materiałowych na przykładzie próbek bulw ziemniaka traktowanych jako materiał liniowo lepkosprężysty.

Materiał i metody badań eksperymentalnych

Przedmiotem badań były ziemniaki odmiany Irga. Z każdej bulwy wycinano dwie walcowe próbki o średnicy i wysokości 20 mm, które poddawano następnie testowi relaksacji naprężeń ściskając wstępnie wzdłuż osi o wartość 1 mm. Pierwszą próbkę odkształcano między dwiema równoległymi płytkami w warunkach jednoosiowego naprężenia. Drugą próbkę ściskaną w warunkach jednoosiowego odkształcenia umieszczono w cylindrze i odkształcano poprzez przesuwanie tłoka zapobiegając w ten sposób przemieszczeniom bocznym. W wyniku przeprowadzenia dwóch testów relaksacji naprężeń próbek ściskanych swobodnie i w cylindrze otrzymuje się czasowe przebiegi funkcji relaksacji odpowiadających stanowi jednoosiowego naprężenia *E(t)* i stanowi jednoosiowego odkształcenia *X(t)* postaci:

$$E(t) = A \cdot \exp\left(-a \cdot t\right) + B \cdot \exp(-b \cdot t) \qquad (1)$$

$$X(t) = C \cdot \exp\left(-c \cdot t\right) + D \cdot \exp(-d \cdot t) \qquad (2)$$

gdzie: *A*, *B*, *C*, *D*, *a*, *b*, *c*, *d* są stałymi o wartościach dodatnich.

Równania te umożliwiają wyznaczenie dwóch niezależnych wielkości charakteryzujących materiał lepkosprężysty: współczynnika sprężystości i lepkości dynamicznej. Znajomość tych stałych pozwala w dalszej kolejności na wyznaczenie funkcji relaksacji naprężeń ścinających oraz ściśliwości objętościowej niezbędnych do analizy zachowania się materiału np. przy użyciu metody elementów skończonych. Testy relaksacji w quasi-statycznych warunkach obciążeń przeprowadzono na uniwersalnej maszynie wytrzymałościowej INSTRON 6022. Natomiast pomiary w udarowych warunkach obciążeń wykonano na stanowisku do badań dynamicznych [Gołacki 1999b]. Próbki poddawano deformacji, a następnie utrzymując stałe odkształcenie rejestrowano wartość siły reakcji w czasie 120 sekund.

Analiza błędów wyznaczenia współczynników sprężystości i lepkości dynamicznej

Na całkowity błąd wyznaczenia współczynników sprężystości ΔE i lepkości dynamicznej $\Delta \eta$ mają wpływ następujące składowe:

1. Błędy związane z geometrią badanej próbki (Δl, Δd)

   Wysokość walcowych próbek była sprawdzana poprzez kilkukrotny pomiar suwmiarką z dokładnością 0,1 mm w kilku różnych płaszczyznach. Podczas pomiaru dopuszczano odchyłkę od wymiaru nominalnego ± 0,1 mm, dlatego też przyjęto Δl= 0,2 mm. Wszystkie próbki były wycinane za pomocą wykrojnika cylindrycznego o średnicy wewnętrznej ϕ20 mm, w związku z tym pominięto błąd pomiaru średnicy próbek Δd ze względu na to, że miał on charakter błędu systematycznego i nie powodował rozrzutu wyników.

2. Błędy pomiaru siły i deformacji próbki podczas testu relaksacji (ΔF, $\Delta \lambda$)

   W testach relaksacji w warunkach obciążeń quasi-statycznych do pomiaru siły reakcji użyto głowicy o zakresie pomiarowym 1000 N i klasie 0,5 dla próbek ściskanych swobodnie, a dla próbek ściskanych w cylindrze zastosowano głowicę o zakresie pomiarowym 10 kN i klasie 0,5. Do obliczeń przyjęto zatem ΔF= 5 N dla próbek ściskanych swobodnie i 50 N dla próbek ściskanych w cylindrze. W warunkach obciążeń udarowych wykorzystano czujnik siły o zakresie pomiarowym 5 kN i klasie 0,05, stąd przyjęto ΔF= 2,5 N. Stałą wartość odkształcenia próbek w warunkach obciążeń quasi-statycznych realizowano poprzez przemieszczenie głowicy obciążającej uniwersalnej maszyny testującej Instron 6022, natomiast w warunkach obciążeń udarowych poprzez zmianę położenia stolika ze śrubą mikrometryczną z dokładnością do 0,01 mm. W obu przypadkach obciążenia nie zmieniano wstępnie ustawionej wartości wielkości deformacji próbek w czasie trwania testów relaksacji. W związku z tym błąd wielkości przemieszczenia $\Delta \lambda$ został pominięty ze względu na jego systematyczny charakter.

3. Błędy wyznaczenia stałych równania aproksymującego (ΔA, $\Delta \alpha$)

Podstawą wyznaczenia błędów ΔA_i, $\Delta\alpha_i$ był błąd pomiaru siły ΔF. Aby oszacować wielkość błędów równania aproksymującego wybrano test relaksacji przeprowadzony na próbce ściskanej w cylindrze, której zakres zmienności siły reakcji w czasie był zbliżony do średniej ze wszystkich próbek. Charakteryzował się on następującymi wartościami parametrów: A_1= 342,3 N, A_2= 4616,2 N oraz α_1= 0,1076 s^{-1}, α_2= 0,0024 s^{-1} - wzór (3). Wartość błędu pomiaru siły dla próbek ściskanych w cylindrze wynosiła 50 N. Dlatego też do wybranego przebiegu siły reakcji dodano 50 N i odjęto 50 N do każdej wartości siły w określonym punkcie czasowym. Po aproksymacji tych przebiegów dwuskładnikową krzywą wykładniczą

$$F(t) = \sum_{i=1}^{2} A_i \cdot e^{-\alpha_i \cdot t} \tag{3}$$

otrzymano wartości parametrów A_i^*, α_i^*. Z dwóch przebiegów wybrano ten, w którym różnica pomiędzy wyznaczonymi parametrami w stosunku do wartości A_i, α_i była większa. Dzięki temu uzyskano następujące odchyłki graniczne parametrów równania aproksymującego odpowiednio dla poszczególnych gałęzi modelu Maxwella:

ΔA_1= 0,95 N $\Delta\alpha_1$=0,000403 s^{-1}

ΔA_2= 48,95 N $\Delta\alpha_2$=0,000032 s^{-1}

4. Błędy obliczenia współczynników sprężystości i lepkości dynamicznej na podstawie parametrów równania aproksymującego

Do wyznaczenia błędów obliczenia współczynników sprężystości E_i i lepkości dynamicznej η_i zastosowano metodę różniczki zupełnej wykorzystując następujące wzory:

$$E_i = \frac{\alpha_i \cdot A_i \cdot l}{p \cdot v \cdot (1 - e^{-\alpha_i \cdot t_m})} \tag{4}$$

$$\eta_i = \frac{A_i \cdot l}{p \cdot v \cdot (1 - e^{-\alpha_i \cdot t_m})} \tag{5}$$

Powyższe zależności wynikają z aproksymacji dwuskładnikową funkcją wykładniczą przebiegów sił reakcji próbek podczas eksperymentu – wzór (3), a następnie wykorzystania wzoru podanego przez Chena [Chen 1972] dla walcowej próbki ściskanej wzdłuż osi:

$$F(t) = \sum_{i=1}^{2} \left(\int_0^{t_m} \frac{p}{l} \cdot v \cdot E_i \cdot e^{-\frac{E_i}{\eta_i}\cdot(t_m - t)} \cdot dt \right) \cdot e^{-\frac{E_i}{\eta_i}\cdot(t - t_m)} \tag{6}$$

Przyjęto, że pole przekroju poprzecznego p, prędkość przemieszczenia tłoka deformującego próbkę v oraz czas narastania odkształcenia t_m są stałe. W związku z tym zmiennymi są tylko parametry równania aproksymującego A_i, α_i oraz długość próbki l. Przy takich założeniach wartości błędów ΔE_i, $\Delta\eta_i$ można wyrazić wzorami:

$$\Delta E_i = \sqrt{\left(\frac{\partial E_i}{\partial A_i}\right)^2 \cdot (\Delta A_i)^2 + \left(\frac{\partial E_i}{\partial \alpha_i}\right)^2 \cdot (\Delta \alpha_i)^2 + \left(\frac{\partial E_i}{\partial l}\right)^2 \cdot (\Delta l)^2} \tag{7}$$

$$\Delta \eta_i = \sqrt{\left(\frac{\partial \eta_i}{\partial A_i}\right)^2 \cdot (\Delta A_i)^2 + \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial \alpha_i}\right)^2 \cdot (\Delta \alpha_i)^2 + \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial l}\right)^2 \cdot (\Delta l)^2} \tag{8}$$

Stosując powyższe zależności uzyskano wartości bezwzględnych błędów maksymalnych dla poszczególnych gałęzi:

ΔE_1= 0,3 MPa $\Delta\eta_1$= 2,945 MPa·s

ΔE_2= 4,314 MPa $\Delta\eta_2$= 2428 MPa·s

Na podstawie obliczonych maksymalnych błędów bezwzględnych można określić maksymalne błędy względne, które wynoszą:

$\Delta E_1/E_1$= 1% $\Delta\eta_1/\eta_1$= 0,66%

$\Delta E_2/E_2$= 1,5% $\Delta\eta_2/\eta_2$= 1,7%

Błąd systematyczny wynikający z ugięcia tensometrycznego czujnika siły

Ugięcie czujnika podczas testu relaksacji powoduje, że w przeprowadzonych eksperymentach rzeczywista deformacja próbki była mniejsza i zależna od siły reakcji próbki. Chwilową wartość ugięcia czujnika $u_c(t_j)$ wyznaczono na podstawie chwilowej wartości siły działającej na czujnik $F(t_j)$ i liniowej charakterystyki ugięcia podatnego elementu czujnika. W związku z powyższym realną wartość deformacji próbki określa zależność [Gołacki 1999a]:

$$u(t_j) = \begin{cases} v \cdot t_j - u_c(t_j) & dla \quad 0 \le t \le t_m \\ v \cdot t_m - u_c(t_j) & dla \quad t > t_m \end{cases} \tag{9}$$

W okresie narastania odkształcenia przebieg siły, na podstawie którego wyznaczono chwilowe ugięcie czujnika, aproksymowano funkcją liniową, natomiast w czasie relaksacji wykorzystano krzywą uzyskaną w eksperymencie. Analityczny model siły dla rozpatrywanego przypadku można zatem przedstawić w następujący sposób [Gołacki 1999a]:

$$F(t) = \sum_{i=1}^{2} \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \sum_{j=0}^{m} \frac{p}{l} \left[v \cdot (t_{j+1} - t_j) - \psi \cdot \left[F_1(t_{j+1}) - F_1(t_j) \right] \right] \cdot E_i \cdot e^{-\frac{E_i}{\eta_i} \cdot (t_m - t_{j+1})} \right\} + \\ \left\{ \sum_{j=m}^{p} \frac{p}{l} \cdot \psi \cdot \left[F_2(t_{j+1}) - F_2(t_j) \right] \cdot E_i \cdot e^{-\frac{E_i}{\eta_i} \cdot (t_{j+1} - t_m)} \right\} \end{array} \right\} \cdot e^{-\frac{E_i}{\eta_i} \cdot (t - t_m)}$$

(10)

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń stwierdzono, że wartości stałych lepkosprężystych dla poszczególnych gałęzi modelu Maxwella są większe dla przypadków uwzględniających ugięcie czujnika. Jest to spowodowane faktem, że przy tej samej sile powodującej deformację próbki, uwzględnienie ugięcia czujnika wiąże się z jej mniejszym odkształceniem. Błąd wyznaczenia parametrów E_i, η_i spowodowany zmiennym w funkcji siły reakcji próbki błędem systematycznym pochodzącym od ugięcia czujnika dla typowego przebiegu siły reakcji podczas eksperymentów wynosił: 3,1% i 3,1% oraz 4,2% i 5,6% odpowiednio dla pierwszej i drugiej gałęzi modelu Maxwella. Zmienny w funkcji siły reakcji próbki błąd systematyczny został uwzględniony w postaci zmiennej poprawki przy wyliczeniu modułów E_i, η_i.

Podsumowanie

Przeprowadzona analiza błędów wskazuje na źródła i przyczyny ich występowania związane z tolerancją wymiarów próbki oraz niedokładnością aparatury pomiarowej podczas rejestrowania wartości siły reakcji i deformacji próbki w teście relaksacji. Przedstawiono także sposób oszacowania błędu wynikającego z ugięcia tensometrycznego czujnika siły. Zastosowanie czujnika z elementem sprężystym do pomiaru siły reakcji próbki podczas testu relaksacji powoduje pojawienie się zmiennego w funkcji siły błędu systematycznego.

Posiadanie wiedzy na temat wartości błędów pomiaru jest bardzo ważna, gdyż na ich podstawie można podjąć decyzję o zaakceptowaniu lub odrzuceniu metody pomiarowej. Przykładem na wyeliminowanie błędu systematycznego może być zastosowanie czujnika piezoelektrycznego charakteryzująca się bardzo dużą sztywnością, co skutkuje pomijalnie małym ugięciem elementu pomiarowego w chwili przyłożenia siły.

Bibliografia

Chen P., Fridley R.B. 1972. Analytical method of determining viscoelastic constants of agricultural materials. Transactions of the ASAE 15(6): 1103-1106,.

Gołacki K., Stropek Z., Graboś A. 1999. Korekcja błędów systematycznych w teście relaksacji naprężeń materiału pochodzenia roślinnego. Inżynieria Rolnicza 1/99:111-117,

Gołacki K., Stropek Z., Graboś A. 1999. Test relaksacji naprężeń w materiale biologicznym w warunkach obciążenia dynamicznego – realizacja techniczna. Inżynieria Rolnicza 2/99: 55-61,

Selected errors of rheological model parameters determination evaluated on the basis of stress relaxation test for potato tubers

Summary

This paper presents the estimation procedures of Maxwell's model parameters describing the behaviour of potato samples during stress relaxation test. Into consideration were taken errors resulting from an inaccuracy of sample preparation, as well as the used measurement device (defined, limited precision). Moreover systematic error depending on sample reaction force, at calculation of elastic and viscosity coefficients was taken into account.

Key words: stress relaxation test, elastic and viscosity coefficient, Maxwell model, errors